Frigyes Ervin—Simon Béláné

Strukturális változások mértékének és irányának vizsgálata[1]

A strukturális változások és eltérések vizsgálata a többváltozós problémák esetében merül fel, ha valamely vizsgálati egység több adattal, vektorral jellemezhető. Megoszlási viszonyszámokkal leírt strukturák mérésére számos eljárás áll rendelkezésünkre, ezek között találkozunk információelméleti mutatószámokkal is. E mérőszámok előnyös tulajdonsága, hogy megállapítható az egyes komponensekben jelentkező eltéréseknek a teljes eltéréshez való relatív hozzájárulása, ugyanakkor e mérőszámok nem szimmetrikusak, ami véleményünk szerint a mutató közgazdasági interpretálásánál problémát jelent, különösen jelentkezik ez abban az esetben, ha nem időbeli, hanem térbeli vizsgálatokat végzünk.

Cikkünkben olyan mérőszámok bemutatására törekszünk, amelyek lehetővé teszik a különböző struktúrák összehasonlítását és egyértelműen fejezik ki e struktúrák közötti eltérések mértékét és irányát.

1. A mérhetőség általános problémái

Strukturális eltérések mérése csak akkor lehetséges, ha az adott struktúrák számszerűen jellemezhetők.

Vezessük be a *mérhető struktúra* fogalmát:

Valamely „A" vizsgálati egység struktúrája akkor tekinthető mérhetőnek, ha hozzárendelhető egy

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad \textit{strukturális vektor}$$

Két adott „A" és „B" vizsgálati egység struktúrája akkor tekinthető összemérhetőnek, ha az a és b strukturális vektorokra fennáll, hogy bármely i-re az a_i, b_i komponensek *azonos tartalmúak*, és a két vektor dimenziója megegyezik. A továbbiakban meg kell különböztetnünk még az *additív*, *kváziadditív* és a *nem additív* vektorokkal jellemzett struktúrákat.

Egy adott a strukturális vektor akkor additív, ha értelmezhető a következő

$$1\ {}^*a \text{ skaláris szorzat,}$$

[1] A II. Magyar ÁKM konferencián elhangzott előadás alapján, Siklós, 1971.

Ebben az esetben az egyes a_i $(i = 1, \ldots, n)$ értékek egyneműek és a megadott formában összegezhetők, és összegük közgazdaságilag értelmezhető. Ez a helyzet áll fenn pl. az értékben, főben stb. megadott (megoszlási viszonyszámokkal is helyettesíthető) komponensekből álló vektorokkal jellemzett struktúrák esetében.

Kvázi-additív struktúra esetében az adott „A" struktúrára jellemző vektorra fennáll a következő

$a = \langle k \rangle^{-1} g$ egyenlőség, és értelmezhetők

az 1^*k és az 1^*g összegek.

Ebben az esetben az a vektor komponensei $\frac{g}{k}$ típusú viszonyszámokból állnak, g és k additív vektorok.

Kvázi-additívak az intenzitási viszonyszámokból álló vektorokkal jellemzett struktúrák. E vektorokat azért tekintjük kvázi additívnak, mert — bár az elemek összege nem értelmezhető — az elemek egyneműek, és nem merülhetnek fel a mértékegységek önkényes megválasztásából adódó problémák.

Nem additív struktúráról van szó, ha az a strukturális vektor sem additívnak, sem kvázi-additívnak nem tekinthető. Nem additívak tehát a különböző mértékegységekben kifejezett mutatókból álló strukturális vektorok.

A strukturális eltérések mérőszámának bevezetése előtt definiálnunk kell az *azonos struktúra* fogalmát.

Az a és b vektorokkal jellemzett struktúrát akkor és csak akkor tekintjük azonosnak, ha

$$b = \alpha a \quad \text{ahol} \quad \alpha > 0$$

A strukturális eltérések mérőszámaival szemben — véleményünk szerint — az alábbi követelményeket kell támasztani:

1. Az azonos struktúra definíciója alapján — a strukturális eltérésről alkotott közgazdasági felfogásnak megfelelően — ne mutasson ki különbséget az a és az αa vektorokkal jellemzett struktúrák között, vagyis a strukturális eltérés valamely z mérőszámára érvényesüljön a következő egyenlőség:

$$z(a, b) = z(\alpha a, b), \qquad (\alpha > 0)$$

2. A mérés egyértelműsége érdekében mérőszámunk tegyen eleget a metrika követelményeinek, vagyis:

a) a z mérőszám értéke akkor és csak akkor legyen zérus, ha $a = \alpha b$, $(\alpha > 0)$ egyébként

$$z(a, b) > 0$$

b) a mutatószám legyen szimmetrikus, tegyen eleget a

$$z(a, b) = z(b, a) \text{ egyenlőségnek,}$$

c) teljesüljön az ún. háromszög egyenlőtlenség:

$$z(a, b) + z(b, c) \geq z(a, c)$$

E követelményeket mérlegelve a következő két mérőszámot javasolhatjuk:

1. két strukturális vektor hajlásszögét,
2. két egységnyi hosszúságúra normált strukturális vektor távolságát.

Két adott $a \neq 0$ $b \neq 0$ vektor hajlásszögén azt a φ szöget értjük, ami eleget tesz a következő összefüggésnek:

$$\cos\varphi = \frac{a^* \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

ahol: a^*b a két vektor skaláris szorzata,
$|a|$ ill. $|b|$ pedig az a ill. b vektorok hosszát jelenti.

Két vektor távolsága a következő kifejezés segítségével határozható meg:

$$d(a, b) = |a - b| = \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Két vektor távolsága tehát megegyezik a két vektor különbségének abszolút értékével. Mivel két vektor távolságára nem érvényes az 1. sz. feltétel, ugyanis a

$$d(a, b) = d(a, \alpha b)$$

egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha:

$$\alpha = 1;$$

azért $d(a, b)$ helyett a $d'(a, b)$ mérőszámot vezetjük be:

$$d'(a, b) = \left| \frac{1}{|a|} a - \frac{1}{|b|} b \right|$$

vagyis az egységnyi hosszúságúra normált a és b strukturális vektorok távolságát.

Ebben az esetben könnyen belátható, hogy

$$d'(a, b) = d'(a, \alpha b)$$

mind a hajlásszög, mind a normált (egységnyi hosszúságú) vektorok távolsága esetében célszerű kikötés,[2] hogy a vektorokra fennálljon $a \geq 0$, $b \geq 0$ reláció. A hajlásszögnél az $a \neq 0$, $b \neq 0$ nagyságrendi reláció érvényesülése is szükséges.

Mind a hajlásszögre, mind az egységnyi hosszúságú vektorok távolságára érvényesülnek a metrika követelményei.

A hajlásszög és a normált vektorok közötti távolság egymásra kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők. A két mutató között tehát elméleti alapon nem lehet különbséget tenni.

A strukturális eltérések mérőszáma

φ esetében a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ha $a \geq 0$, $b \geq 0$, és $\sum a_i \neq 0$, $\sum b_i \neq 0$,

d' esetében pedig a $[0, \sqrt{2}]$, ha $a \geq 0, b \geq 0$

intervallumokban jelentkezik.

[2] Ezt a kikötést azért tehetjük, mert a közgazdasági alkalmazások esetében a vektorok elemeire általában teljesül a nem negativitás.

Additív és kvázi-additív strukturális vektorok esetében a bevezetett mérőszámok egyértelműen jellemzik a strukturális eltérések mértékét.

Nem-additív struktúrák esetében felmerül a különböző mértékegységek problémája is.

Mivel nincs és — véleményünk szerint — nem is képzelhető el a mértékegységek olyan rendszere, ami e problémát kiküszöbölné; célszerűnek látszik valamilyen — a mértékegységtől független — *konvenció* bevezetése.

Ez a konvenció az eredeti komponensek dimenzió nélküli viszonyszámokkal való helyettesítése lehet; hogy a strukturális vektorok közötti eltéréseket kizárólag a vektorok megfelelő komponensei közötti arányok determinálják.

E viszonyszámok bázisa lehet:

a) valamely kitüntetett vizsgálati egység strukturális vektora *(kiválasztott konvenció)*,

b) az adott vizsgálatba bevont egységek megfelelő adatainak átlagolása *(átlagolási konvenció)*.

A *kiválasztott konvenció* két szempontból sem látszik célszerűnek.

a) Minden vizsgálatnál új konvenció lenne szükséges a bázis meghatározására.

b) E konvenciónál bázisul olyan strukturális vektort kellene választani, amelynek nincs zérus eleme.

Az *átlagolási konvencióval* kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy az óhatatlanul együtt jár azzal, hogy amennyiben új vizsgálati egységet vonunk be az elemzésbe, az új viszonyítási bázis, új átlag számítását teszi szükségessé. Ez azt jelenti, hogy a strukturális eltérések mérőszáma nem additív struktúrák esetében mindig a vizsgálati egységek adott rendszeréhez kötődik.

Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy e strukturális eltérések mérőszámai nagyon érzékenyek az *aggregációra*, ill. a *komponensek számának csökkentésére*.

Az aggregáció, ill. a dimenziócsökkentés azonban módosítja mind a hajlásszöget, mind a d' távolságot. Mivel φ és d' kölcsönösen és egyértelműen meghatározzák egymást, elegendő, ha a $\cos\varphi$-re mutatjuk be ezt a módosulást.

Az *aggregáció* esetében az a és b vektor két-két komponensét, pl. az i-ediket és a j-ediket vonjuk össze, s így $n-1$ elemű vektorokat kapunk. E vektorok hajlásszöge φ aggr (a, b) és az eredeti a, b vektorok hajlásszöge között a következő összefüggés mutatható ki:[3]

$$\operatorname{arc}\cos_{aggr}(a, b) = \varrho \operatorname{arc}\cos(a, b),$$

ahol:

$$\varrho = \frac{1 + \dfrac{a_i b_j + a_j b_i}{a^* b}}{[(1 + 2a_i a_j)(1 + 2b_i b_j)]^{1/2}}$$

Amennyiben az „A", „B" és „C" vizsgálati egységekre vonatkozó információk inkompatibilitását csak *valamelyik komponens*, pl. az n-edik komponens *elhagyásával*, tehát a dimenzió aggregálás nélkül csökkentésével érhetjük el,

[3] Az összefüggést az egyszerűség kedvéért normált (egységnyi hosszúságú) vektorokra mutatjuk be.

a következőképpen módosul:

$$\cos (a_{n-1}, b_{n-1}) = \eta \cos (a, b),$$

ahol a_{n-1}, b_{n-1} az n-edik elem elhagyásával kapott vektorokat jelöli, és

$$\eta = \frac{1 - \dfrac{a_n \cdot b_n}{a^* \cdot b}}{[(1 - a_n^2)(1 - b_n^2)]^{1/2}}$$

Látjuk tehát, hogy $\cos \varphi$, s ennek következtében d' is megváltozik a komponensek számának akár aggregációval, akár aggregáció nélkül történő csökkentésétől. Ennek konzekvenciáit fel kell mérni az elemzés előkészítő szakaszában.

2. A strukturális változások irányának vizsgálata

A strukturális elemzések egyik igen gyakori esete az, amikor az egyes vizsgálati egységek megkülönböztetésére szolgáló csoportképző ismérvek mennyiségi vagy idősort[4] alkotnak.

A tárgyalás lerövidítése érdekében a továbbiakban az idősort alkotó vizsgálati egységek esetére szorítkozunk, a mennyiségi sorokra vonatkozó analógiák ugyanis kézenfekvő módon adódnak.

Idősort alkotó vizsgálati egységek esetében a következő kérdéseket kívánjuk vizsgálni:

1. A kezdőponthoz viszonyított strukturális eltérések milyen mértékben képviselik a végső időpont struktúrájának vagy valamely normatív struktúrának a megközelítését, vagyis *mennyiben tekinthetők a strukturális eltérések fő irányába ható változásnak.*

Az első kérdés végeredményben két oldalról is megközelíthető: Ha idősorunk strukturális vektorai az $s_1, \ldots s_t$ sorozatot alkotják, megvizsgálhatjuk, hogy milyen nagyságrendi relációk érvényesülnek a következő:

a) $\varphi(s_1, s_2), \varphi(s_1, s_3), \ldots \varphi(s_1, s_t)$ vagy a $d'(s_1, s_2), d'(s_1, s_3), \ldots d'(s_1, s_t)$ sorozatban,

b) $\varphi(s_1, s_2), \varphi(s_2, s_3), \ldots \varphi(s_{t-1}, s_t)$ ill. a $d'(s_1, s_2), d'(s_2, s_3), \ldots d'(s_{t-1}, s_t)$, sorozatban.

E két sorozat vizsgálata azonban *csak* a strukturális eltérések *mértékére* nyújt felvilágosítást, és egyáltalán nem ad információt e változások *irányára.*

Idősorok strukturális elemzésénél azonban igen érdekes a második kérdés, vagyis a *fő irányba* ható strukturális eltérések vizsgálata és mérése is.

Fő irány alatt a *strukturális változásoknak* azt az irányát értjük, ahová a strukturális változásoknak vezetniük kellett volna, vagy ahová ténylegesen vezettek. A fő irány megállapítására két lehetőséget látunk.

a) Valamely normatív (tervezett) struktúra irányába ható vagy (és)

b) az utolsó ténylegesen előállott struktúra irányába ható változásoknak, mint fő iránynak elfogadását.

[4] Idősor alatt itt nem speciális sztochasztikus folyamatot, hanem időrendi sorrendben rendezett, strukturális vektorokból álló sorozatot értünk.

A továbbiakban a végső időszak struktúrájának megközelítését tekintjük a strukturális fejlődés fő irányának. A bemutatott módszerek azonban normatív vizsgálatokra is könnyen kiterjeszthetők.

Fő iránynak tehát azt a vektort tekintjük, melynek a megfigyelt első struktúra vektorával alkotott eredője a végpont struktúráját eredményezi.

Ha a fő irányt d'-vel jelöljük, akkor

$$s_1 + d' = s_t, \quad \text{vagyis} \quad d' = s_t - s_1,$$

ahol s_i $(i = 1, \ldots t)$ normált vektorok.

Fő irányba ható változás alatt pedig bármely: $(s_j - s_1)$ $(j = 2, \ldots t)$ eltérésvektornak e d' vektor irányába eső ortogonális vetületét (hosszát) értjük.

Ha ezt az ortogonális vetületet Δ_j-vel jelöljük:

$$\Delta_j = \cos(d', s_j)\, d'(s_j, s_1); \qquad j = 2, \ldots t$$

A Δ_j értékeket természetesen előjelesen kell figyelembe venni.

A Δ_j értékek a kezdő és a j-edik időpont közötti, a fő irányba eső távolságot jelölik. Az egyes időszakokhoz tartozó (fő irányba megtett) távolság mérésére pedig a következő mérőszámot definiáljuk:

$$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_{j-1}; \qquad j = 2. \ldots t$$

Könnyű belátni, hogy

$$\sum_{j=2}^{t} \Delta'_j = |d'| = d'(s_1, s_t)$$

A fő irányba ható változás vizsgálatánál két kérdésre kívánunk választ adni:

a) Az egyes Δ'_j értékek milyen sorozatot alkotnak, vagyis az idősor folyamán bekövetkezett strukturális *változások* milyen *ütemben* közelítették meg a végső időszak struktúráját.

b) Összegezve az egész időszak fejlődését, az mennyiben tekintheti *konzekvensnek*, vagyis a *végső időpont struktúrája fokozatos megközelítésének.*

Az első kérdésre a Δ_j $(j = 2, \ldots t)$ sorozat diszkussziójával adhatunk feleletet. A második kérdés megválaszolásához további mérőszámok adhatók meg: Ilyen mérőszám lehet pl. a

$$K_1 = \frac{d'}{\sum_{j=2}^{t} |\Delta'_j|} \quad \text{vagy a} \quad K_2 = \frac{\varphi(s_1, s_t)}{\sum_{j=2}^{t} \varphi(s_j, s_{j-1})} \quad \text{mutatószám.}$$

Mindkét mutatószámra jellemző, hogy értékei

$$\sum_{j=2}^{t} |\Delta'_j| \neq 0; \ \sum_{j=2}^{t} \varphi(s_j, s_{j-1}) \neq 0$$

esetben (vagyis amikor ilyen vizsgálat szükségessége egyáltalán felmerülhet) — a $[0, 1]$-ben jelentkeznek.

A két mutatószámmal kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy egymást nem helyettesítő, hanem egymást kiegészítő információtartalommal bírnak.

$K_1 = 1$ azt jelenti, hogy a vizsgált időszak alatt *nem történt a fő iránnyal ellentétes strukturális változás,* vagyis $\Delta'_j \geq 0$ $(j = 2, \ldots t)$.

$K_2 = 1$ pedig azt fejezi ki, hogy minden változás *teljesen a fő irányba* történt, és az összes s_j ($j = 1, \ldots t$) strukturális vektorunk — tehát d' is — ugyanabban a síkban helyezkedik el. Meg kell jegyeznünk, hogy a $K_2 = 1$-ből egyértelműen következik a $K_1 = 1$ egyenlőség.

Mind a K_1, mind a K_2 mutató akkor veszi fel a zérus értéket, ha $d' = 0$, vagyis ha a vizsgált időszak egészére nézve nincs strukturális változás, tehát az egymást követő több irányú strukturális változások az s_1 struktúra visszaállását eredményezik.

3. A dinamikus változások összetevőkre bontása

Az eddigiekben a strukturális eltérések mértékének és irányának vizsgálat módszerével foglalkoztunk.

Dinamikus vizsgálatok esetében azonban az a kérdés is felmerülhet, hogy valamely két időszakot jellemző (nem normált) vektorok közötti különbség milyen tendenciák eredőjeként jött létre. Itt a változás két összetevőjét kívánjuk megkülönböztetni: mégpedig a kiinduló időszak struktúrája irányába mutató inerciális tendenciát — a továbbiakban nem strukturális hatást — és a strukturális eltérések irányába mutató tendenciát — a továbbiakban strukturális hatást. E két tendencia vizsgálatánál abból indulunk ki, hogy mind a strukturális, mind a nem strukturális hatások időben egyenletesen jelentkeznek.

Legyen:

$$d = s_t - s_j,$$

ahol s_j a kiinduló időszak (nem normált) strukturális vektora,
s_t pedig a végső időszak (nem normált) strukturális vektora.

Feltevésünk szerint:

$$d = v + w,$$

ahol v a nem strukturális hatások és
w a strukturális hatások vektora.

A v és w vektorok bármely tetszőleges *két* időszak között egyértelműen meghatározhatók, mivel a két vektor iránya adott:

v iránya szükségszerűen, a definícióból adódóan megegyezik (vagy ellentétes) a kiinduló időszak strukturális vektorának s_j-nek az irányával.

w iránya pedig csak a j-edik és t-edik időszak közötti strukturális változásoktól függhet: tehát megegyezik a strukturális változást kifejező, korábban definiált

$$d' = \frac{s_t}{|s_t|} - \frac{s_j}{|s_j|} \quad \text{vektor irányával.}$$

Az ismert paralellogramma szabály alapján a v és w vektorok koordinátás alakja is előállítható.

$$v = \alpha s_j, \quad \text{ahol} \quad \alpha = \frac{|s_t|}{|s_j|} - 1,$$

$$w = \beta d', \quad \text{ahol} \quad \beta = |s_t| \,.$$

A v és a w vektorokkal voltaképpen – a fizikából vett analógiával – azt a *két erőt* határoztuk meg, ami a d vektorral jellemzett *teljes mozgást* létrehozta. Továbbmenve szükségesnek látszik összetevőire bontani azt a *tényleges változást*, ami a *d vektor irányában* e két hatásra külön-külön létrejött. Ez azonos a v és a w vektoroknak a d vektor irányába eső ortogonális vetületével.

Ezeket az ortogonális vetületeket d_v, ill. d_w szimbólumokkal jelölve:

$$d_v + d_w = d$$

ahol d_w a strukturális hatások következtében létrejött tényleges változások vektora és

d_v a nem strukturális (inerciális) hatások következtében létrejött tényleges változások vektora.

E vetületek előjeles hossza

$$|d_v| = \cos(d, v)\,|v|$$

$$|d_w| = \cos(d, w)\,|w| \text{ természetesen:}$$

$$|d_v| + |d_w| = |d|$$

Így a két időszak között bekövetkezett teljes változást jellemző d vektort két párhuzamos komponensre bontottuk fel.

A strukturális és nem strukturális változásoknak a teljes változásra gyakorolt hatás-intenzitása $d \neq 0$ esetében

$$q_w = \frac{|d_w|}{|d|}$$

és a

$$q_v = \frac{|d_v|}{|d|}$$

hányadosok formájában fejezhető ki (ahol $|d_v|$ és $|d_w|$ előjeles hosszakat jelentenek).

Az eddigiekben csak a kezdő és a végső időszak közötti változásokat fejeztünk ki strukturális és nem strukturális hatások vektorainak eredőjeként. Ez a felbontás azonban több közbeeső időszak esetére is kiterjeszthető; és részletesebb elemzésre is módot nyújt.

A bemutatott mérési módszereket az 1959–68. évekre kidolgozott ÁKM-ek strukturális elemzésére alkalmaztuk [3] Mivel számításaink célja elsősorban a javasolt mérési eljárások illusztrációja volt, ezért csupán az eredmények vázlatos elemzésére törekedtünk.

(Beérkezett: 1972. február 8.)

IRODALOM

1. KOSZOV V. V.: Az aggregációs probléma lehetséges megoldásai az ágazati kapcsolatok mérlegében. Voproszi Ekonomiki 1963/6.
2. LINNEMANN H.: An Econometric Study of International Trade-Flows. Amsterdam, 1966. North Holland Publishing Company.

3. FRIGYES E.—SIMON B.: A strukturális eltérések mérhetősége és mérési módszerei. OT. Tervgazdasági Intézet Közleményei, 1969/6.
4. THEIL H.: Közgazdaságtan és információelmélet. Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

THE MEASUREMENT OF EXTENT AND DIRECTION OF STRUCTURAL CHANGES

In the recent years several papers have been published that make use of certain elements of classical vector calculus for the examination of structural deviations. It is a general feature of these papers that they use the angle of inclination between the vectors characterizing the examined structures as the index number of structural deviation.

a) The paper clarifies the basic concepts of structural examinations.

b) It determines the mathematical and economic requirements for the measurement of structural deviations or changes.

c) It shows that the suggested index numbers, the angle of inclination and the index number *d* (the distance between the standardized, unit length vectors) are consistent with the economic interpretation of structural changes and, at the same time, they meet the mathematical requirements of metrics.

d) Besides precise and unambiguous measurement the suggested methods analyse also the direction of structural changes.

In case of time series of structural vectors the paper contains index numbers measuring the consequence of changes. For the case of dynamic analysis, processes have been elaborated that separate the main forces affecting the entire multidimensional variation, (structural and inertial changes) and express their intensity numerically.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕРЫ И НАПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

В последние годы был опубликован ряд работ, использующих некоторые элементы классического векторного анализа для исследования структурных различий. Общая характерная черта этих работ, что они используют наклона векторов, характерных для исследуемых структур, в качестве показателя структурных разхождений,

а) Данная статья выясняет основные понятия, связанные с исследованием структур,

б) определяет возможные математические и экономические требования к измерению структурных разхождений или изменений.

в) Он показывает, что предлагаемые индексы, угол наклона и показатель «d» (расстояние между нормированными векторами единичной длине) согласуются с экономическим толкованием структурных изменений и в то же время они выполняют математические требования метрики.

г) Кроме точного и единозначного измерения, предлагаемые методы анализа исследуют и направление структурных изменений.

Относительно временных рядов структурных векторов труд содержит показатели для последовательности изменений. Также для динамических исследований были подготовлены методы анализа для обособления главных сил (структурных и инертных изменений) и для числового выражения их интенсивности.