LJUBOMIR MARTIĆ

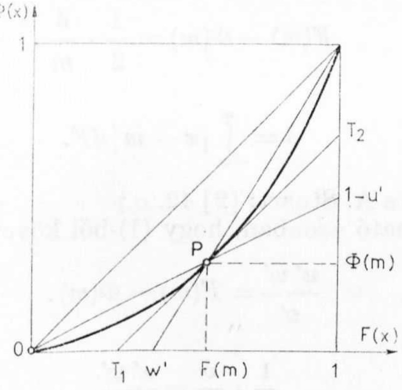
Geometriai megjegyzések az új jövedelem-egyenlőtlenségi mutatókhoz*

Éltető Ödön és Frigyes Ervin a Frigyes-féle u, v és w egyenlőtlenségi mutatók egyszerű geometriai interpretációját adja. Dolgozatunkkal kapcsolatban itt az u', v' és w' standardizált mutatókat kívánjuk interpretálni. Ezenkívül ebben a jegyzetben bebizonyítunk egy, e mutatók és a relatív középeltérés közötti összefüggést, és ennek is geometriai interpretációját adjuk.

Folytonos eloszlás esetén a standardizált mutatók a következőképpen fejezhetők ki:

$$(1) \qquad u' = \frac{F(m) - \Phi(m)}{F(m)}, \quad w' = \frac{F(m) - \Phi(m)}{1 - \Phi(m)}, \quad v' = \frac{F(m) - \Phi(m)}{F(m)\,[1 - \Phi(m)]},$$

ahol: m az átlagos jövedelmet, $F(x)$ és $\Phi(x)$ az eloszlásfüggvényt, ill. az első momentum-eloszlásfüggvényt jelöli, $F(m)$ és $\Phi(m)$ pedig a koncentrációs görbe azon pontjának koordinátái, amely a $\Phi(x) = F(x)$ egyenestől maximális távolságban helyezkedik el (1. ábra).



1. ábra

Ahhoz, hogy bemutassuk e mutatók geometriai jelentését, egyeneseket kell húzni a $P[F(m), \Phi(m)]$ ponton keresztül (0, 0)-tól és (1, 1)-től. E két egyenes

* A megjegyzések alapjául szolgáló cikk eredetileg magyar nyelven jelent meg, lásd [1A]. A megjegyzések maguk először az *Econometrica* 1970. évi novemberi számában (36. évf., 6. sz., 936–937. o.) jelentek meg. *(Szerk.)*

közül az első az $F(x) = 1$ egyenest $(1, 1 - u')$ pontban metszi. Ebből következik, hogy u' az $(1, 1 - u')$, $(1, 1)$ szakasz hossza. Könnyű azonban belátni, hogy u' a $(0, 0)$, $(1, 1)$ és $(1, 1 - u')$ csúcsokkal meghatározott háromszög területének kétszeresét is képviseli.

A P-n és $(1, 1)$-en átmenő egyenes az $F(x)$ tengelyt a w' pontban metszi. Könnyen kimutatható, hogy w' az $(0, 0)$, $(1, 1)$ és $(w', 0)$ csúcsokkal meghatározott háromszög területének kétszeresét is képviseli. Már csak v'-nek, a harmadik standardizált mutatónak a geometriai jelentését kell megtalálni. Ehhez csak egy egyenest kell meghúzni,

$$\Phi = \frac{w}{u}(F - w') \tag{2}$$

amely összeköti a $(w', 0)$ és az $(1, 1 - u')$ pontokat. A $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 1 - u')$ és $(w', 0)$ csúcsokkal meghatározott négyszög kétszeres területe egyenlő v'-vel, hiszen

$$2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - w')(1 - u')\right] = u' + w' - u' w',$$

és Éltető Ödön és Frigyes Ervin szerint [1A, 18. o.] $u' + w' - u'w' = v'$.

Éltető Ödön és Frigyes Ervin cikkében [1A, 19. o.] az u' standardizált egyenlőtlenségi mutató az R. R. Schutz-féle $F(m) - \Phi(m)$ koefficienshez (lásd [4]) a következőképpen kapcsolódik:

$$F(m) - \Phi(m) = F(m)u'. \tag{3}$$

G. Rosenbluth [3] bebizonyította, hogy a Schutz-koefficiens nem más, mint a relatív középeltérés:

$$F(m) - \Phi(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{m}, \tag{4}$$

ahol

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m| \, dF.$$

(lásd pl. M. Kendall és A. Stuart: [2] 42. o.)

Könnyen kimutatható azonban, hogy (1)-ből következik

$$\frac{u' w'}{v'} = F(m) - \Phi(m). \tag{5}$$

(5)-ből és (4)-ből

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{m} = \frac{u' w'}{v'}. \tag{6}$$

Így megkaptuk az összefüggést a relatív középeltérés — egy jól ismert egyenlőtlenségi mutató — és az új standardizált jövedelem-egyenlőtlenségi mutatók között.

Könnyen kimutatható, hogy a T_1 pont abszcisszáját (6) megadja. Ez következik a P pont definíciójából és a (4) és (6) relációkból. Továbbá kimutatható, hogy (6) a $(0, 0)$, $(1, 1)$, P háromszög kétszeres területét képviseli. Ennek a háromszögnek ugyanis ugyanakkora a területe, mint a $(0, 0)$, $(1, 1)$, T_1 háromszögnek. Ebből következik, hogy (6), akárcsak a Gini-féle koefficiens, a Lorenz-görbe segítségével értelmezhető.

$$\Phi = \begin{cases} \dfrac{F}{u}, & 0 \leq F \leq F(m), \\ 1 + w(F - 1), & F(m) \leq F \leq 1. \end{cases} \tag{7}$$

IRODALOM

1. ÉLTETŐ, Ö.—FRIGYES, E.: New income inequality measures as efficient tools for causal analysis and planning. Econometrica, Vol. 36. No. 2. 1968. pp. 383—396.

1A. ÉLTETŐ Ö.—FRIGYES E.: Új jövedelem-egyenlőtlenségi mutatók, tulajdonságaik és hasznosítási lehetőségeik. SZIGMA, 1968. 1. sz. 17—28. o.

2. KENDALL, M.—START, A.: The Advanced Theory of Statistics. Vol. 1. London, 1958.

3. ROSENBLUTH, G.: Note on Mr. Schutz's Measure of Income Inequality. The American Economic Review. Vol. 41. No. 5. (1951) 935—937. p.

4. SCHUTZ, R. R.: On the Measurement of Income Inequality. The American Economic Review. Vol. 41. No. 1. (1951) 107—122. p.