

Ex post jellegű modellek eredményeinek előrebecsléséről

Kérdésfelvetés¹

Az utóbbi években a szocialista országok tervezési gyakorlatában is mind gyakrabban javasolják többperiódusú makroökonómiai tervmodell összeállítását.² Az eddigi elméleti eredmények és gyakorlati számítások azt mutatják, hogy e modellekből nyerhető információk több-kevesebb áttétellel hasznosan alkalmazhatók az elkövetkezendő évek termelési, ár, beruházási, bér, jövedelmi és egyéb terveinek összeállításánál. Feltétlenül ez az általános benyomás akkor is, ha előnyeik mellett egy sor komoly nehézséggel is járnak. Ez utóbbiak okait vizsgálva a következő főbb észrevételeket tehetjük:

— A szóbanforgó többperiódusú optimalizációs (terv-) modellek vagy egy viszonylag rövidebb tervidőszak valamennyi évére (pl. 1972—73—74—75) vagy pedig egy hosszabb periódus megkülönböztetett időpontjaira (szakaszaira) készültek (pl. 1975—1980—1985). Ebből kifolyólag az eredmények utólagos extra-, illetve interpolációjára ritkán van módszertanilag is elfogadható lehetőség.

— Mind a primál, mind pedig a duális megoldásoknál gyakori az oszcilláció, az ágazati (szektor-) ár- és volumeindexek időbeli ugrálása, divergens mozgása. Ha erre a közgazdasági logika talál is magyarázatot (pl., hogy az ok a különböző szűkös erőforrások felszabadulásának időbeli eltérése), az eddigi tapasztalat, a bővített újratermelés vastörvénye, a piaci gyakorlat ellene szól e hullámzásoknak.

— Nagyméretű, többperiódusú modelleknél komoly problémát okoz a rop-pant adathalmaz előrebecslése. Különösen igaz ez, ha több periódus alatt nem-csak 2—3 tervévet értünk. Más probléma a feltételi rendszerek, a korlátok és a célfüggvények szükségszerűen eltérő jellegű (metodikájú) előrebecslése, az ily módon kialakított optimalizációs modell realitása, konzisztenciája.³

Az általunk kidolgozott eljárás lényege a következő. Nem több bázismodell előrevetítése útján nyert többperiódusú ex-ante (prognózis) modellt optimálunk, hanem *rendre elvégezzük* az összehasonlítható szerkezetű és tartalmú *ex-post* (bázis-) modellek optimálását, *s az ezekre nyert* (bázisidőszaki) *primál* és duális megoldásokat extrapoláljuk.⁴

Milyen előnyöket ígér ez az eljárás? Megítélésünk szerint a következőket:

¹ Ez a dolgozat a [3] második részének korrigált változata.

² Lásd pl. [1], [2], [7] és [9].

³ Bizonyos esetekben a konzisztencia megőrzésére jó algoritmus a [4]-ben ismertetett eljárás.

⁴ Ex-post modell-sorozat elvi igényével már [8] is jelentkezett. Dolgozatunkban egyébként a modell kifejezés mindig lineáris programozási modellt jelent; elvileg azonban nem látjuk akadályát, hogy az előrebecslési eljárást a nem lineáris modellek eredményeire is kiterjesszük.

— Már a korábbi modellekkel kapcsolatban is feltehetjük volna a kérdést: ha a primál és duális megoldásokat keressük valamely jövőbeli időpontra (időpontokra) miért nem a bázisidőszak primál és duális megoldásaiból prognosztizáljuk azokat? Ez látszana direkt útnak, nem pedig a többperiódusú ex-ante modellezés.

— Eljárásunk alkalmazása esetén a bázismodellek adatainak, vagyis az alapfeltételeknek időbeli változásain kívül automatikusan figyelembe jönnek a rendszer indirekt összefüggései is, lévén, hogy feltétel-rendszerek helyett már optimum-pontokat extrapolálunk.

— A módszer lényege folytán nem egy $n \cdot m$ -es alapmodellt, hanem egy (esetleg néhány) n és m elemű vektort kell erőrebecsülni. Ettől a hibalehetőség nagyfokú csökkenését remélhetjük. (Ez természetesen csak hipotézis.)

— Az eljárás kiküszöböli a primál és duális optimumok jövőbeli szakaszos hullámzásának problémáját. Ez a hullámzó mozgás elvileg a bázisadatokra is fennállhat, azonban egyrészt a [6] vizsgálat tapasztalatai, másrészt saját kísérleti számításaink szerint a makroökonomiai adatsorok zöme, így pl. a magyar népgazdaság struktúrája 1960—1970 között nagyon is „trendszerű” alakulást mutatott. A nehézséget itt csupán az előrejelzés módszertana okozza. Ennek megoldása után már tetszés szerinti időpontra megadható az optimális ár- és volumenterv.⁵

Eljárásunkkal kapcsolatban szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy a fenti állítások feltételezik a gazdasági fejlődés töretlen, viszonylag monoton voltát a tervidőszak folyamán. Ez igen komoly absztrakció, annak ellenére, hogy végső soron bevallva—bevallatlan a korábbi ex-ante modellek is éltek e feltételezéssel.

Az eljárásrendszer homályos pontjait, veszélyzónáit a következő területeken érezzük:

— Az eljárás feltételezi viszonylag nagyszámú „standardizált” ex post modell meglétét, illetve azok nagyfokú aggregáltságát, aminek eredményeként a gazdasági fejlődésben oly gyakori új feltételek és új változók hatása tompítottan jelentkezik.

— A javasolt megoldás könnyen inkonzisztens eredményre vezet, ugyanis első közelítésben semmi sem garantálja, hogy az előrebecsült x primál és r duális megoldásokra (illetve, hogy az eleve adott vagy szintén előrebecsült c cél-függvény és b korlátvektorokra) fennáll az ismert és szükségszerű

$$c^* \cdot x = r^* \cdot b$$

összefüggés. Annak ellenére, hogy ez a probléma már a „klasszikus” esetben is felvetődött (még hozzá olyan formában, hogy az egyenletrendszer, illetve a korlátok elemeinek egyedi becslése után kialakuló modellnek esetleg nincs megengedett megoldása), igyekeztünk e kérdést is megoldani, s dolgozatunk *hátralevő részében tulajdonképpen az e téren nyert eredmények bemutatására helyeztük a fő hangsúlyt.*

— A módszer feltételezi, hogy rendelkezésünkre áll az ex post modellekhez szükséges valamennyi alapadat, és pedig összehasonlítható szerkezetben és tartalommal. Ez jelenlegi adottságaink mellett meglehetősen erős feltétel, s így az eljárás népgazdaságtervezési alkalmazásának hatóköre némiképp korlátozott.

⁵ Elfogadva azt a Kantorovicsi koncepciót, miszerint a duális megoldást mint optimális arányvektort értelmezzük.

— Egyelőre nem keresünk választ arra, hogy a hagyományos vagy az általunk javasolt eljárás igényel-e több számítási munkát. (Azt a kérdést, hogy melyik ad „jobb” megoldást, aligha lehet egyértelműen megválaszolni, lévén, hogy azonos adatokból kiinduló, matematikailag egyaránt korrekt előrebecslések összehasonlítása általában értelmetlen; ha van is közgazdasági létjogosultsága, az mindig a szóbanforgó feladat jellegének függvénye.)

Mindenesetre az a körülmény, hogy a Magyarországon működő számítógépeken eddig maximum $2000 \cdot 2000$ -es méretű lineáris programozási feladatot tudtak megoldani, bizonyítani látszik eljárásunk „gazdaságosabb” voltát, különös tekintettel arra, hogy ismert módon (ugyancsak tapasztalati eredmények alapján) a modell méreteinek lineáris növekedése köbösen változtatja a számítási igényt.

— Ugyancsak nem kívánunk itt bővebben foglalkozni az extrapoláció módjával, a „legjobb előrebecslés” kérdésével; jelen esetben ezt egyéb közgazdasági, illetve matematikai megfontolások eredményeként már adottnak tekintjük.

— Abból eredően, hogy a módszer a lineáris programozás összefüggései közül csak az erős dualitási tételt használja közvetlenül fel (a többit pedig csak indirekte), az eredmények eltérnek más módszerek eredményeitől, de közgazdasági tartalmuk változatlan.

— A Lagrange-féle eljárás alkalmazásakor megtörténhet, hogy negatívnak adódnak olyan változók, melyekre csak nemnegatív értéket tudunk közgazdaságilag értelmezni. (Pl. termelési szintek.) Jóllehet ennek valószínűsége a feladat kérdésfeltevéséből eredően igen csekély, mint elvileg lehetséges hibával ezzel is számolni kell.

A primál és duál megoldások extrapolációjának lehetősége tehát arra a hipotézisre épül, hogy ha egy matrix-idősornak (feltételrendszernek), annak valamennyi elemének van meghatározott időbeli változása (trendje), úgy az azokból képzett optimalizációs modellek primál és duális megoldásainak is van. Itt kell még megemlíteni, hogy kutatásunk — mely ma még távolról sem lezárt — háromféle megoldás vizsgálatára koncentrálnánk:

— az egyes bázisévek modelljeit nem kapcsolni össze, csupán azonos szerkezetben, azonos célfüggvény- és korlátvektor típusokkal optimalni valamennyit, s a nyert primál (duális) megoldásokat előrevetíteni a kívánt időpontokra („monoton extrapoláció”).

— Az n -edik bázisév modelljének összeállításához felhasználni az $(n - 1)$ -edik időpont modelljének megoldásából nyert információkat („spirál-extrapoláció”).

— Valamennyi bázisév modelljét egyetlen átlós-szerkezetű nagy modellbe fogni össze és az utóbbit optimalni, majd az egyes évekre ily módon kialakuló primál és duál megoldásokat előrevetíteni.

Az utóbbi két eljárással, az azokkal végzett számítások eredményeivel egy későbbi dolgozatban kívánunk foglalkozni.

Az előrebecslések konzisztenciájáról

Az előrebecsült primál- és duális megoldások konzisztenciájának biztosítására jól hasznosítható a legkisebb négyzetek módszere, illetve a Lagrange-féle multiplikációs eljárás. Jelen esetben tehát az

$$(1) \quad r^*(t_q) \cdot b(t_q) = c^*(t_q) \cdot x(t_q)$$

összefüggést kielégítő vektorokat keressük a t_q időpontra előrebecsült $x(t_q)$, és $r^*(t_q)$ primál és duális megoldás-vektorok, valamint az ugyancsak előrebecslés eredményeként jelentkező $c'(t_q)$ és $b'(t_q)$ célfüggvény és korlát-vektorok ismeretében.

Elhagyva a t_q argumentumokat, megoldandó a

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n [(c_j - c'_j)^2 + (x_j - x'_j)^2] + \sum_{j=1}^m [(r_j - r'_j)^2 + (b_j - b'_j)^2] \rightarrow \text{minimum!}$$

szélsőértékszámítási feladat a

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{j=1}^m r_j b_j = 0$$

feltétellel, aholis n és m a vektorok elemszámát mutatja.

A feltételes szélsőértékszámítási feladat a Lagrange-féle multiplikációs eljárással a következő (feltétel nélküli) szélsőértékszámítási feladatra vezet:

$$(4) \quad L = \sum_{i=1}^n [(c_i - c'_i)^2 + (x_i - x'_i)^2] + \sum_{j=1}^m [(r_j - r'_j)^2 + (b_j - b'_j)^2] + \lambda \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{j=1}^m r_j b_j \right) \rightarrow \text{minimum!}$$

ahol λ a Lagrange-féle multiplikátor, közgazdaságilag a konzisztencia „ára”.

Képezve a c_k , x_k , r_s , b_s és λ szerinti parciális deriváltakat, a következő egyenleteket kapjuk:

$$(5) \quad \partial L / \partial c_k = 2(c_k - c'_k) + \lambda x_k = 0$$

$$(6) \quad \partial L / \partial x_k = 2(x_k - x'_k) + \lambda c_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$(7) \quad \partial L / \partial r_s = 2(r_s - r'_s) - \lambda b_s = 0 \quad s = 1, 2, \dots, m$$

$$(8) \quad \partial L / \partial b_s = 2(b_s - b'_s) - \lambda r_s = 0$$

$$(9) \quad \partial L / \partial \lambda = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{j=1}^m r_j b_j = 0$$

Ebből — vektorformában — kapjuk, hogy

$$(10) \quad 2(c - c') + \lambda x = 0$$

$$(11) \quad 2(x - x') + \lambda c = 0$$

$$(12) \quad 2(r - r') - \lambda b = 0$$

$$(13) \quad 2(b - b') - \lambda r = 0$$

$$(14) \quad c^* x - r^* b = 0$$

▼agyis

$$(15) \quad c = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2c' - \lambda x')$$

$$(16) \quad x = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2x' - \lambda c')$$

$$(17) \quad r = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2r' + \lambda b')$$

$$(18) \quad b = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2b' + \lambda r')$$

feltéve, hogy $\lambda \neq \pm 2$

Helyettesítjük a (15)–(18) egyenleteket (14)-be és egyszerűsítsünk $\frac{2}{4 - \lambda^2}$ -tel.

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$(19) \quad \lambda^2 - 2q\lambda + 4 = 0$$

ahol

$$q = \frac{c^{*'} \cdot c' + x^{*'} \cdot x' + r^{*'} \cdot r' + b^{*'} \cdot b'}{c^{*'} \cdot x' - r^{*'} \cdot b'}$$

feltéve, hogy $c^{*'} \cdot x' - r^{*'} \cdot b' \neq 0$. Ellenkező esetben a feladat kitűzése értelmetlen, hiszen az előrebecsült adatok (a vonással jelölt vektorok) már eleve konzisztensek.

(19) megoldásaként

$$\lambda = q \pm \sqrt{q^2 - 4}$$

adódik. A $q^2 \geq 4$ mindenkori teljesülése a q definíciójából könnyen belátható s így a λ -t a (15)–(18) összefüggésekbe írva már a keresett x^* , r^* , c és b vektorokat kapjuk.

A módszert a magyar népgazdaság 1959–1966-os összevont input-output tábláin alapuló optimalizációs modelleken már kipróbáltuk. A konkrét számítások eredményéről egy előkészület alatt álló nagyobb tanulmányban kívánunk referálni, befejezésül álljon itt példaként a [3]-ban is ismertetett részeredmény.

Ágazati árnyékkárok időbeli változása⁶

Szektor	Év	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	
									tény- adat	előre- becsült érték
Ipar		0,85	0,83	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	0,85	0,87
Építés		0,78	0,73	0,76	0,77	0,79	0,82	0,83	0,83	0,84
Élelmiszergazdaság		1,48	1,59	1,64	1,61	1,57	1,54	1,61	1,59	1,61
Tercier ágazatok		0,97	0,92	0,97	1,03	1,04	1,12	1,14	1,15	1,17

⁶ Ex post előrebecslés négysektoros optimalizációs modell alapján, melynek alapadatait dezaggregált formában [6] tartalmazza, elvi sémája pedig szinte teljesen azonos a [8] alapjául szolgáló modellével. A célfüggvény a dolgozó létszám minimalása volt.

(Beérkezett: 1971. március 8.)

IRODALOM

1. BOB P.: A népgazdaság hosszútávú (15–20 éves) tervezésének egy lehetséges matematikai modelljéről. *Szigma*, 1969. 1. sz. 59–66. o.
2. CERNY, M.—HEYL, L.—LOULA, D.—OCENASEK R.: Experiments with a linear medium-term optimal planning model. *Ekonomicko—Matematicky Obzor*, 1968. 3–4. se.
3. GLATTFELDER, P.—VÁCZI, P.: Some price design methods with multi-period models. Az Ökonometriai Társaság második konferenciáján elhangzott előadás. Cambridge, 1970. szeptember.
4. GLATTFELDER P.—VÁCZI P.: Egy algoritmus input-output sémák előrebecslésének korrekciójára. *Szigma*, 1970. 3. sz. 167–172. o.
5. Канторович, Л. В.—Макаров, Л. В.: Оптимальные модели перспективного планирования. Применение математики в экономических исследованиях. Том 3. Москва, 1965. Соцэкиз. стр. 7–87.
6. Az ártervezés ökonometriai modellje. OAÁH-Infelcor Rendszertechnikai Vállalat kiadványai. Budapest, 1968–1971.
7. SIMON Gy.: A népgazdasági árprogramozás dinamikus modellje. *Szigma*, 1968. 1. sz. 3–16. o.
8. Шимон, Д.: Исследование оптимальных оценок на основе народнохозяйственного программирования. Előadás az 1967-es moszkvai input-output konferencián.
9. Урлаки, Зс.: A multi-technological, multi-period model for Hungarian twenty-year planning. Az ötödik nemzetközi input-output konferencián elhangzott előadás, Genf, 1971. január.

ON THE FORECASTING OF THE RESULTS OF EX POST MODELS

In the planning of future prices and quantities so-called ex-ante models are applied more and more often in recent times. The essence of such procedures based on linear programs consists in forecasting the A , c^* and b components of the well-known problems of type $\{x \geq 0; Ax \leq b; c^*x \rightarrow \max\}$ with different methods for one or two points of time, and then interpreting the primal solution x and dual solution r^* as the optimal plan of quantities and price proportions, respectively.

The authors suggest another procedure which also operates by means of the method of linear programming, but differs from the ex-ante modelling conceptually. Its essence is that optimization does not succeed here the forecasting of the constraint system, the bounding vector and objective function, but it is done for the different point of time of the basic period, and the projection of time series formed from the primal and dual solution vectors gives the optimal plan of quantities and prices for the future.

The general explanation of the concept is followed by the discussion of the positive and negative features of the procedure. The authors include in the advantages of the method that, compared to ex-ante modelling, considerably less elements must be forecasted, and so the economic reality of the method is likely to be greater. Another remarkable advantage is that the method automatically excludes the possibility of inconsistency (sometimes appearing in ex-ante modelling), because it does not forecast the partial components of the model but its results. In certain cases, especially with large-size models the computational requirements also seem smaller.

The paper does not examine the question what methods should be used for forecasting. The dangerous zones of the suggested procedure, however, are discussed, in a great extent. Among these it is conspicuous that the method supposes the existence of a sufficient number of basic period models similar both in form and in contents. The authors also state unambiguously that even this method cannot always eliminate the temporal fluctuations, „oscillation” of the primal and dual solutions either, at most it transfers them from the years of the plan period to the basic period models.

The authors provide for the consistency of the forecasted primal and dual solutions in the framework of a special constrained extreme value problem, where they forecast objective function and bound vectors, too. The paper concludes in discussing the numerical results of an optimization based on the input-output tables of the Hungarian economy in the years 1959–1966.

ОБ ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛЕЙ ВИДА EX POST

В последнее время планирование цен и выпусков все чаще употребляет для будущего так называемые ex-ante модели. Сущность этих методов, обоснованных на линейном программировании, состоит в том, что для известной задачи типа $x \geq 0$; $Ax \leq b$, $cx \rightarrow \max!$ с помощью различных методов оценивают компоненты A , c и b на один или больше моментов времени, а потом прямое решение x и двойственное решение r^* берут за план оптимального соотношения выпуска и — соответственно — цен.

Авторы предлагают другой метод, который работает тоже методом линейного программирования, но в принципе отличается от моделирования ex-ante. Сущность этого метода находится в том, что в это случае оптимализация происходит не после оценки систем ограничений, вектора ограничений и целевой функции, а на различные моменты времени базисного периода, а оптимальный план цен и выпусков для будущего получается из отражений вектора временного ряда, полученного таким образом из прямых и двойственных решений.

После общего описания принципа излагаются положительные и отрицательные черты метода. В числе преимущественных этого метода авторы перечисляют, что сравнивая с моделированием ex-ante для этой модели нужно оценивать значительно меньше элементов, и так экономическая реальность решения наверняка больше. Другое значительное преимущество этого метода вытекает из того, что оценивает не отдельных компонентов модели, а ее результатами, таким образом заранее исключает возможность таких неконсистенций, которые возникают при моделировании ex-ante. В некоторых случаях, особенно в случае больших моделей, и расчетные проблемы оказываются меньшими.

Данная работа не занимается с тем вопросом, что с какими методами производится сама оценка. Тем больше излагаются опасности предлагаемого метода. Из них нужно подчеркивать, что метод предлагает существование нужного числа базисных моделей одинаковой формы с одинаковым содержанием. Авторы однозначно констатируют и то, что и данная модель не всегда сможет устранять волнение прямых и двойственных решений во времени, в крайнем случае переносит с годы планового периода на базисные модели.

Авторы обеспечивают консистентно оцененных прямых и двойственных решений в рамках специальной условной экстремальной задачи, используя также оцененные целевую функцию и векторы ограничений. В заключении работы представляют числовые результаты оптимализации, базированной на агрегированные межотраслевые балансы венгерского народного хозяйства за 1959—1966.