Kovács Álmos – Stahl János

A vállalati beruházási politika optimálásának egy modellje

A vállalatok anyagi érdekeltsége elsősorban a $\dfrac{N}{sB+E}$ mutató – továbbiakban hatékonysági mutató – alakulásához fűződik [4], ahol N a vállalati nyereséget, B az éves bérköltséget, E az évi átlagos eszközállományt, s pedig a bérszorzót jelöli. A vállalati beruházási politikának így célja lehet egy olyan fejlesztési stratégia kidolgozása, amely valamilyen értelemben a mutató maximálására vezet. A „valamilyen értelemben” kifejezést azért kell használnunk, mert a beruházás hatásai általában több éven át érezhetőek és így többnyire nem lehet egyetlen év hatékonysági mutatójának maximálását célul kitűzni. Először azonban röviden azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor ez a közelítés elfogadhatónak tűnik.

A hosszútávú beruházási politika kialakításakor feltétlenül egy nagyobb időszakot kell átfogni a tervezésnek, ugyanakkor adódhatnak olyan, viszonylag szűkebb területet érintő fejlesztési kérdések is, amelyekben egyetlen év eredményeire gyakorolt hatás alapján dönthetünk. Két alapvető feltételnek azonban ekkor együttesen teljesülnie kell:

– a beruházás hatása a vállalati eredményre, valamint a vállalat eszköz- és bérszükségletére a tervezés során átfogott időszak egészében azonos legyen (tehát pl. a létrehozott kapacitás kezdettől fogva ugyanolyan szinten legyen kihasználható, a gyártott termékek várható eladási ára, minősége ne változzék stb.);

– a döntés mindenképpen megvalósítandó feladatok alternatív megoldási módjai közötti választásra vonatkozzon.

Ha a j beruházási javaslat megvalósítására ezután várható nyereség növekmény n_j, a bérköltség növekmény b_j, eszközállomány növekmény pedig e_j, akkor a feladat az

$$\frac{N+\sum\limits_j n_j x_j}{s\left[B+\sum\limits_j b_j x_j\right]+E+\sum\limits_j e_j x_j}$$

mutató maximálása, ahol az x_j-k 0,1 értékű változók.

Ha erőforráskorlátokat és feltétlenül megoldandó feladatokat leíró feltételeket nem veszünk figyelembe, akkor – amint azt alább megmutatjuk – a beruházási javaslatokat az $\dfrac{n_j}{sb_j+e_j}$ mutatójuk szerinti sorrendben kell megvalósítani, de csak abban az esetben, ha ez a mutató még nagyobb, mint a már kialakult vállalati $\dfrac{N^*}{sB^*+E^*}$ érték.

Már ebben az egyszerű esetben is megállapíthatjuk, hogy

– a pozitív nyereséghozam önmagában még korlátlan fejlesztési erőforrások esetén sem elegendő ahhoz, hogy egy beruházás gazdaságos legyen;

– azonos nyereségnövekményt biztosító és azonos bér- és eszközfelhasználással járó beruházások megvalósítása a vállalat induló helyzetétől függően egy vállalat számára gazdaságos, más vállalat számára pedig gazdaságtalan lehet;

– végül azonos főmutatók esetén a bérszorzó értékétől függően is változik az egyes beruházási változatok gazdaságosságára jellemző kép.

Ha az erőforráskorlátokat is figyelembe vesszük, az optimális beruházási politika meghatározása érdekében meg kell oldani a megfelelő „hiperbolikus" célfüggvény mellett a 0,1 változós programozási feladatot, de a feltételek nélküli maximálás alapján levonható következtetések is utalnak arra, hogy a nyereségmaximáló modelltől eltérő eredményeket kaphatunk.

Az $\dfrac{N}{sB+E}$ mutató nevezőjében szereplő kifejezést írjuk $M + \Sigma m_j x_j$ alakban, a korlátozó feltételeket kielégítő lehetséges programok halmazát jelöljük X-szel.

Megoldandó feladatunk most tehát

$$(1) \qquad x \in X \Big\} \frac{N + \sum n_j x_j}{M + \sum m_j x_j} \to \max$$

alakú, ahol minden $x \in X$-re a nevezőben szereplő kifejezés pozitív. Ezen feladat megoldására kézenfekvőnek látszik az alábbi eljárás:

Legyen $\lambda^{(1)}$ tetszőleges szám és $k = 1$.

Oldjuk meg az

$$(2) \qquad x \in X\} \, N + \sum_j u_j x_j - \lambda^{(k)} (M + \sum_j m_j x_j) \to \max$$

feladatot. Ha ennek nincs lehetséges megoldása, nyilván (1)-nek sincs. Ellenkező esetben legyen $x^{(k)}$ (2) egy optimális megoldása. Ha az optimumérték zérus, $x^{(k)}$ (1)-nek is optimális megoldása. Ha nem, legyen

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{N + \sum_j n_j x_j^{(k)}}{M + \sum_j m_j x_j^{(k)}}$$

és folytassuk (2) megoldásával $k = k + 1$-re.

Az eljárás helyessége, illetve véges volta nyilvánvaló.

$\lambda^{(1)}$ legcélszerűbb választásának az (1)-nek megfelelő folytonos feladat optimumértéke látszik, mikor is $\lambda^{(1)}$ felső korlát, a további $\lambda^{(k)}$-k az (1) feladat optimumértékének monoton növekvő alsó korlátai.

Elég valószínű, hogy ezen eljárás nem túl hatékony, függetlenül attól, hogy (2)-t valamilyen leszámlálási algoritmussal [5] vagy vágási technikával oldjuk meg.

(1) megoldására leginkább valamilyen leszámlálási algoritmus látszik legcélszerűbbnek, és a következőkben két ilyen eljárást körvonalazunk.

Minthogy X-et a változók egészértékű voltát kikötő feltételeken túl lineáris egyenlőtlenségek határozzák meg, azért mindenekelőtt alkalmazhatók az összes ezen alapuló tesztek.

A hányados célfüggvény figyelembevételének alapja az lehet, hogy miután bizonyos változók értékét rögzítettük, az $\frac{N+\sum rn_j x_j}{M+\sum rn_j x_j}$ hányados feltétel nélküli maximuma a szabad változók függvényében egyszerűen meghatározható.

Rendezzük ugyanis nemnövekvő sorrendbe a változókhoz tartozó $\frac{n_j}{m_j}$ hányadosokat és legyen a sorban következő szabad $x_{j'}$ változóra $x_{j'}=1$ mindaddig, amíg $\frac{n_{j'}}{m_{j'}} > \frac{N^*}{M^*}$ ahol

$$N^* = N + \Sigma' n_j x_j$$

$$M^* = M + \Sigma' n_j x_j$$

és Σ' azt jelöli, hogy azokat a változókat kell összegezni, amelyek az előzőek során értéket kaptak: a rögzített változókat és a sorban eddig vizsgált szabad változókat.

Az eljárás helyességét igazolandó vezessük be a következő jelöléseket:

$$N_R = N + \Sigma' n_j x_j, \qquad M_R = M + \Sigma' m_j x_j$$

ahol Σ' a rögzített változókra történő összegzést jelöl,

$$N_s = \Sigma' n_j, \qquad M_s = \Sigma' m_j$$

ahol viszont Σ' az eljárás során $x_j = 1$ értéket kapott szabad változókra történő összegzést jelöli.

Legyen továbbá
$$\frac{N_R + \Sigma'' n_j + \Sigma''' m_j}{N_R + \Sigma'' m_j + \Sigma''' m_j}$$
az x_j változók egy tetszőleges 0—1 értékadásához tartozó hányadosérték, ahol Σ''-ben összegeztük az N_s, illetve M_s definíciójában is fellépő indexeket, Σ'''-ban pedig a többit.

Be kell látnunk, hogy

$$\frac{N_R + \Sigma'' n_j + \Sigma''' n_j}{M_R + \Sigma'' m_j + \Sigma''' m_j} \leq \frac{N^*}{M^*}$$

ahol N^* és M^* az eljárás eredményeként kapott számláló, illetve nevező.

Ha Σ'' és Σ''' mindegyike üres, az állítás nyilván igaz, hiszen az eljárás az $\frac{N_R}{M_R}$ hányadosból indul ki és azt végig növeli.

Ha Σ''' nem üres, akkor minden ide tartozó j indexre

$$\frac{n_j}{m_j} \leq \frac{N^*}{M^*}$$

amiből

$$\Sigma''' n_j \leq \frac{N^*}{M^*} \Sigma''' m_j$$

Elég most már igazolni, hogy

$$N_R + \Sigma'' n_j \leq \frac{N^*}{M^*} (M_R + \Sigma'' m_j)$$

mert ez az előbbivel együtt éppen a bizonyítandó állítás.

Ez nyilván igaz, ha Σ'' üres és nyilván igaz akkor is, ha Σ''-ben pontosan azok a szabad változók szerepelnek, amelyek N^*, illetve M^*-ban.

Ha viszont a fennmaradó esetre

$$N_R + \Sigma'' n_j > \frac{N^*}{M^*} (M_R + \Sigma'' m_j)$$

teljesülne, akkor tekintve egy olyan x_j szabad változót, mely N^* és M^*-ban szerepel, de Σ''-ben nem, erre

$$\frac{n_j}{m_j} \geq \frac{n_{j'}}{m_{j'}} > \frac{N^*}{M^*}$$

azaz

$$n_j < \frac{N^*}{M^*} m_j$$

ahol x_j az eljárás során adódó legnagyobb indexű nemnulla szabad változó.

Ezen egyenlőségeket az őket megelőzővel összeadva

$$N^* > \frac{N^*}{M^*} M^*$$

-hoz jutunk, ami ellentmondás.

Vegyük még észre, hogy a változók sorrendje rögzített — függetlenül attól, hogy melyek a szabad és melyek a rögzített változók — aminek a számológépi programozás megkönnyítése szempontjából van jelentősége.

Egy másik eljárás alapja az összes 0 vagy 1 komponensű x generálása olyan sorrendben, hogy a megfelelő $\frac{\sum n_j x_j}{\sum m_j x_j}$ értékek monoton nemnövekvők legyenek. Az előbbiekhez hasonlóan könnyen belátható, hogy a [2]-ben lineáris célfüggvény esetére javasolt eljárás ebben az esetben is helyes, ha a lineáris függvény együtthatói helyett az $\frac{n_j}{m_j}$ hányadosokkal dolgozunk.

Térjünk most vissza ahhoz a lényegesen reálisabb kérdéshez, amelynél a beruházási politika kialakítása során azt kell figyelembe vennünk, hogy legalábbis egy-egy döntés hatásai egy időszak folyamán nem azonos módon jelentkeznek minden évben. Ez a feltevés jobban megfelel a valóságnak, hiszen egy-egy beruházás sokszor maga is több lépcsőben fejeződik be, de emellett is az a jellemzőbb, hogy a létrehozott kapacitás teljes kihasználása csak fokozatosan következik be, a várható értékesítési lehetőségek sem azonosak az időszak valamennyi évében stb.

Az a gyakran használt modell, amelynek a célja egy diszkontált nyereségösszeg maximálása és a feltételek között a különböző fejlesztési erőforrások nagyságát veszi figyelembe éves bontásban [7], esetleg elfogadhatatlan megoldást eredményez, mivel egyes években a részesedési alap szintje nagyon kedvezőtlenül alakulhat. Hasonló a helyzet egy olyan modell esetén is, amely valamely év $\frac{N}{sB+E}$ mutatójának maximálását tűzi ki célul.

Kikerülhető ez a probléma, ha célfüggvényként az $\frac{N}{sB+E}$ mutató átlagos értékének maximálását választjuk, erősen diszkontálva a későbbi évek mutatóit, ez a célfüggvény azonban még mindig meglehetősen bonyolultnak látszik, ezért a következő megoldást javasoljuk: a feladat feltételei között írjuk elő az $\frac{N}{sB+E}$ mutató elérendő értékét az egyes években, és ilyen feltételek mellett törekedjünk a nyereség maximalizálására.

A modell ekkor általánosan a következő feltételekkel írható fel:

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

$$x_{j-1} \leq x_j \qquad (j = J_{k-1}+1, \ldots, J_k - 1 \quad k = 1,2 \ldots) \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(t)} x_j \leq \bar{b}_i^{(t)} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

$$\frac{N = \sum_{j=1}^{n} n_j^{(t)} x_j}{sB + s\sum_{j=1}^{n} b_j^{(t)} x_j + E \sum_{j=1}^{n} e_j^{(t)} xj} = d^{(t)} \qquad (t = 1, \ldots, T) \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} n_j^{(t)} (1 + \beta^{(t)}) x_j \to \max \tag{7}$$

A j beruházási lehetőségekhez az x_j változót rendeljük: ha egy megoldás alapján a beruházás megvalósításra kerül, értéke 1, egyébként 0.

A modell általános jellegének megfelelően figyelembe veszünk olyan beruházási lehetőségeket is, amelyek valamely önállóan is értelmezhető beruházás „folytatásaként" valósíthatók meg. A (4) feltételek az ilyen típusú beruházásoknak a modellbe való beépítését teszik lehetővé: a „többütemű" beruházási javaslat „elemei" az $X_{j_{k-1}} \ldots X_{j_{k-1}}$ változóknak felel meg, az indexek sorrendje pedig a megvalósítás sorrendjét határozza meg. Természetesen az olyan több ütemű beruházási javaslatokat, amelyek esetében az egyes ütemek önállóan nem értelmesek, egyetlen változó reprezentálja.

Az (5) feltételek biztosítják azt, hogy a kialakított fejlesztési politika erőforrás igénye az egyes években ne legyen több a rendelkezésre álló erőforrásoknál (pénzügyi, munkaerő, anyag, import stb. keretek). Ennek megfelelően $a_{ij}^{(t)}$ a j beruházási javaslat i erőforrásigényét, $\bar{b}_i^{(t)}$ pedig az i erőforrásból felhasználható mennyiséget mutatja a t-edik évben, és $\beta^{(t)}$ jelöli a t-edik évre vonatkozó diszkont faktort.

Már itt érdemes megjegyezni, hogy e kereteket nem célszerű nagyon mereven kezelni, hiszen legalábbis jó részük bizonyos mértékig rugalmasnak tekinthető.

Ugyanez elmondható az egyes beruházási javaslatok erőforrás igényeinek többségéről is, elég például a megvalósítás ütemének változtatásával elérhető lehetőségekre utalnunk.

Még határozottabban mondhatjuk el mindezt a (6) feltételekkel kapcsolatban, amelyek a hatékonysági mutató alakulására vonatkozóan írják elő évenként az adott érték ($d^{(t)}$) elérését. Megjegyezzük, hogy hasonló módon vehetők figyelembe a bérgazdálkodás szempontjából lényeges ,,jövedelmezőségi'' mutató $\frac{N+B}{L}$, (ahol L a vállalat dolgozóinak létszámát jelöli) alakulására vonatkozó feltételek is, hiszen az egyes beruházási javaslatok létszámhatásai szintén felmérhetőek. Nyilván nem mellékes a vállalat számára, hogy hogyan alakul hatékonysági mutatója és így a részesedési alap szintje, ugyanakkor a mereven megválasztott feltételek miatt hosszú távon mindenképpen kedvező változatok esetleg nem kerülnek be az optimális programba.

Már utaltunk arra, hogy e feltételek figyelmen kívül hagyása elfogadhatatlan megoldásra vezethet, de hasonlóan káros volna, ha merev kezelésük eleve kizárná a távlatilag eredményes fejlesztési alternatívák egy részét.

Miután a feltételek közt kikötöttük, hogy a hatékonysági mutatónak bizonyos szintet valamennyi figyelembe vett évben el kell érnie, jogosnak tűnik a diszkontált nyereséghozam maximálását szerepeltetni célfüggvényként. Így a figyelembe veendő évek száma nem lesz túlságosan nagy, hiszen a célfüggvény távlatilag már biztosítja a hatékonysági mutató szintjét. Ugyanakkor egy kiválasztott év hatékonysági mutatóját célfüggvényként szerepeltetve, a későbbi időszakra gyakorolt hatást kevésbé venné a modell figyelembe. A diszkontálást szélesen értelmezzük, a kamatlábnak tükröznie kell azt a tényt is, hogy a későbbi években várható eredmények csak kisebb megbízhatósággal mérhetők fel, váratlan körülmények lényegesen nagyobb szerepet játszhatnak, a gyors megtérülés lehetőséget adhat kedvező, de ma még nem ismert lehetőségek fokozottabb kihasználására stb.

A programozási feladatok többsége esetén a szigorú feltételek és a döntésre rendelkezésre álló rövid idő miatt azokat a megoldási módszereket tekinthetjük legjobbnak, amelyek pontosan meghatározzák az optimális megoldást. A beruházási politika kialakításakor azonban – amint arra már utaltunk – nagyon sok olyan feltételt is figyelembe kell vennünk, amelyeket csak hozzávetőleges pontossággal lehet leírni, és sokszor nem fogalmazhatók meg pontosan az optimalitás kritériumai. Ugyanakkor a döntésre általában hosszabb idő áll rendelkezésre, lehetőség van arra, hogy a döntésben illetékesek a már előzetesen megszűrt változatokat tovább mérlegeljék, és esetleg újabb szempontok felvetésével tovább szűkíthessék a tovább vizsgálandó kört.

Mindezek alapján célszerűnek látszik Everett G. L. M. módszerét [1] (magyarul pl. [4]-ben) alkalmazni, hiszen e módszer segítségével rendkívül gyorsan és egyszerűen meghatározhatunk viszonylag kevés számú, a feltételeket ,,nagyjából'' teljesítő beruházási ,,politikát'', amelyek a generált erőforrás felhasználás és a hatékonysági mutató generált értékei mellett optimálisak.

A G. L. M. módszert Kaplan [3] alkalmazta a feladatunkhoz nagyon hasonló Lorie—Savage feladatra [6], [7]. A módszert azonban triviális módosítással ebben az esetben is alkalmazhatjuk. [1]-ben a maximumfeladatban csak kisebb-egyenlő feltételek szerepelnek, ennek megfelelően a multiplikátorok nem—negatívak. A megfelelő tételek azonban könnyen átfogalmazhatók úgy, hogy a kisebb-egyenlőséget előíró feltételekhez pozitív, a nagyobb-egyenlőséget előíró feltételekhez pedig negatív multiplikátorokat rendelünk. Ebben az esetben is azonnal látszik a kapcsolat a megfelelő lineáris programozási feladat árnyékáraival, amelyek fontos szerepet játszanak a javasolt megoldási eljárásban. Tekintsük tehát a (3)-, (5)-, (6)- és (7)-nek megfelelő alábbi feladatot:

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i \ (i = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq d_j \ (i = m+1, \ldots, m+p) \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{11}$$

Legyen az s vektor első m eleme nempozitív, utolsó p eleme nemnegatív, és legyen továbbá a

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=m=1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \tag{12}$$

Lagrange-függvény maximuma x^0-ban. x^0 ekkor maximálja a $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ függvényt a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j x_j^0 = a_i^0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^0 = d_i^0 \qquad (i = m+1. \ldots, m+p) \tag{14}$$

feltételek mellett.

Ugyanis x^0 definíciója szerint

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - \sum_{j=m+1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^0 \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=m+1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j,$$

következésképpen (13) és (14) esetén fennáll

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq 0$$

Hasonlóan belátható, hogy ha $x(\varepsilon)$ mellett a Lagrange-függvény értéke maximumánál legfeljebb ε-nal kisebb, akkor $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j(\varepsilon)$ legfeljebb ε-nal lesz kisebb a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(\varepsilon) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(\varepsilon) \qquad (i = m+1, \ldots, m+p)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

feladat optimumértékénél.

A módszer alkalmazhatóságának alapvető feltétele, hogy valamilyen módon szabályozni tudjuk (13) és (14) feltételek jobboldalának értékeit, tehát lehetőség adódjon arra, hogy ezeket az értékeket közelíthessük (9) és (10) jobboldalának értékeihez. Everett 2. tétele utal ilyen lehetőségre, de triviálisan bizonyíthatjuk a következő állítást is két, csak egyetlen elemben eltérő s vektor esetén:

Az első n erőforrás valamelyikéhez (tehát kisebb-egyenlő feltételhez) tartozó s_i érték növelése esetén a megfelelő erőforrás optimális programbeli felhasználása azonos marad vagy kisebb lesz, csökkentése esetén pedig azonos marad vagy nagyobb lesz. A következő p feltétel valamelyikéhez (tehát a nagyobb egyenlőség feltételekhez, azaz valamilyen színvonal elérését célzó feltételekhez) tartozó s_i abszolút értékének növelése esetén a megfelelő felhasználás az optimális programban azonos marad vagy nagyobb lesz, csökkentése esetén pedig azonos marad vagy kisebb lesz.

Legyen ugyanis az $s^{(1)}$ és az $s^{(2)}$ vektor egyetlen elem kivételével azonos: $s_j^{(1)} = s_j^{(2)}$ $j \neq i$, és $s_i^{(1)} \neq s_i^{(2)}$.

Legyen továbbá az $s^{(1)}$-hez tartozó optimális megoldás $x^{(1)}$, az $s^{(2)}$-höz tartozó optimális megoldás $x^{(2)}$, a megoldáshoz tartozó jobboldalak $d^{(1)}$ és $d^{(2)}$, a megfelelő optimumértékek pedig c_1 és c_2.

Ekkor nyilván teljesülnek

$$c_1 - s_i^{(1)} d_i^{(1)} - \sum_{j\neq i} s_j^{(1)} d_j^{(1)} \geq c_2 - s_i^{(1)} d_i^{(2)} - \sum_{j\neq i} s_j^{(1)} d_j^{(2)} \tag{15}$$

és a

$$c_2 - s_i^{(2)} d_i^{(2)} - \sum_{j\neq i} s_j^{(2)} d_j^{(2)} \geq c_1 - s_i^{(2)} d_i^{(1)} - \sum_{j\neq i} s_j^{(2)} d_j^{(1)} \tag{16}$$

egyenlőtlenségek.

(15) és (16) összeadásával az

$$s_i^{(2)} (d_i^{(1)} - d_i^{(2)}) \geq s_i^{(1)} (d_i^{(1)} - d_i^{(2)}),$$

illetve az

$$(s_i^{(2)} - s_i^{(1)}) (d_i^{(1)} - d_i^{(2)}) \geq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahonnan az állítás már következik.

Adott s mellett a Lagrange-függvény maximuma rendkívül könnyen meghatározható, hiszen

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=m+1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left[c_j - \sum_{i=1}^{m} s_i a_{ij} - \sum_{i=m+1}^{m+p} s_i b_{ij} \right] x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j .$$

Tehát a függvény maximumát megkapjuk, ha azokat az x_j értékeket választjuk 1-nek, amelyekhez tartozó $\alpha_j \geq 0$.

Az általános modell (4) feltételeit nem kell külön kezelnünk: egy „többütemű" beruházás első ütemei akkor kerülnek be az optimális programba, ha a későbbi fázisokhoz tartozó pozitív α_j-k abszolút értékeinek összege nagyobb, mint a negatív α_j-k abszolút értékeinek az összege. Az α_j értékek alapján viszonylag könnyen meghatározhatjuk azokat a megoldásokat is, amelyek az optimum adott ε-sugarú környezetébe esnek: optimális x_j-knél a j-k összes olyan részhalmaza esetén, amelyhez tartozó $\Sigma\alpha_j < \varepsilon$, a megfelelő x_j-k a 0 és 1 értékek valamennyi kombinációján végigfuthatnak, a többi x_j értékeinek változatlansága mellett.

Az induló s vektor meghatározása érdekében célszerű a megfelelő lineáris programozási feladat — amelyet az egészértékűségre vonatkozó kikötést az $x_j \geq 1$ feltételekkel helyettesítve nyerünk — árnyékárait meghatároznunk, hiszen ebben az esetben a megfelelő s és az árnyékárak azonosak [4]. Az s vektor változtatásának mértékére vonatkozóan hasznos információkat kaphatunk, ha a megfelelő lineáris programozási feladatot más jobboldalak esetén is megoldjuk.

(Beérkezett: 1971. január 22.)

IRODALOM

1. EVERETT III, H.: Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. Operations Research, 1. (1963), 339—417. o.
2. GREENBERG, H.: A dynamic programming solution to integer linear programs. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 26. (1969), 454—459. o.
3. KAPLAN, S.: Application of the generalized multiplier method. Operations Research, 14. (1966), 1130—1136. o.
4. KOVÁCS Á.: Megjegyzések a jövedelemszabályozási rendszerről és a vállalati célfüggvényről. Pénzügyi Szemle, 1969/2.
5. KOVÁCS L. B.: A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei. Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, 1969.
6. LORIE, J. — SAVAGE, L. J. :Three problems in capital rationing. J. Business, 1966. Oct.
7. WEINGARTNER: Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems. Prentice-Hall, 1963.

A MODEL FOR THE OPTIMIZATION OF INVESTMENT POLICY IN A FIRM

Two programing models concerning the index number $\frac{N}{sB+E}$ are investigated. This indicator — where N denotes the profit of the firm, E the stock of assets, B the wages and s the wage coefficient — expresses the firm's material interests. Beside economic conclusions the solution possibilities are also dealt with for programming problems, where the constraints are linear in the 0—1 variables, and the objective function is the quotient of two linear functions. Furthermore a certain modification of the so-called G. L. M. method is discussed.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛИТИКИ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ

В статье исследуется две модели программирования, учитывающие показатель $\frac{N}{sB+E}$ которая выражает материальную заинтересованность предприятий, и где обозначение следующие: N — доход предприятия, B — затраты на заработные платы, E — закрепленные фонды, a s — умножитель заработной платы. Кроме экономических выводов статья занимается с возможностью решения таких задач программирования, которые содержат линейные условия для переменных 0—1 и целевая функция которых является частным двух линейных функций, т. е. исследуется т. н. метод G. L. M. в небольшой мере модифицированном виде.