Gábor Győző

Az intervallum programozás: a lineáris programozási feladatok egy speciális osztályának megoldási módszere

Az intervallum programozás módszere az alábbi típusú lineáris feladat megoldására alkalmas:

Maximalizálandó a

(1) $$\mathbf{c}^*\mathbf{x}$$

függvény a

(2) $$\mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

értelmezési tartomány felett, ahol az $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrix és a $\mathbf{c} = (c_j)$, $\mathbf{a} = (a_i)$, $\mathbf{b} = (b_i)$ vektorok adottak, $a_i \leq b_i$ $(i = 1,2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, továbbá a (2)-t kielégítő vektorok halmaza nem üres és (1)-nek korlátos optimuma van (2) felett.

Ez a feladattípus természetesen megoldható az ismert lineáris programozási algoritmusokkal, de egyrészt a feladat méretei jelentősen nőnek (a feltételi egyenlőtlenségek mindkét oldalról történt korlátozása a feltételek, a változók előjelkötetlensége a változók számának megkettőződéséhez vezet), másrészt egyszerűbb megoldó eljárásokkal a feladat speciális alakjából fakadó egyéb problémák is felmerülhetnek. (Ez az oszlopok, illetve sorok megduplázódásának lehet a következménye, ui. a bázistranszformációk sorozatával megoldott feladatoknál a kerekítési hibák okozta torzulás a szokásosnál *lényegesen veszélyesebb* lehet. Ezért a feladattípusnak szimplex módszerrel történő megoldásakor a [6] 2. fejezetében leírt transzformáció ajánlható.)

A feladattípus viszonylagos gyakorisága, valamint a fenti számítástechnikai nehézségek vezettek az intervallumprogramozás-sal kapcsolatos kutatásokhoz.

E cikk célja, ismertetni a Ben-Israel, Charnes és Robers által 1967—68 körül kidolgozott új módszer első eredményeit.

Az intervallumprogramozás legfontosabb tulajdonsága, hogy olyan feladatok megoldására, melyet eddig csak iteratív úton lehetett megoldani *explicit* megoldást kínál. Másik érdeme az, hogy segítségével lényegesen könnyebb megadni az optimális megoldások *halmazát.* Ez különösen akkor fontos, ha meggondoljuk, hogy egy duálisában erősen degenerált feladat valamennyi primálisan optimális bázisát meghatározni a szimplex módszer segítségével gyakorlatilag lehetetlen.

Az eljárás gondolatmenetének megértéséhez vizsgáljuk meg (1), (2) optimumát, ha $\mathbf{A}$ egységmatrix, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{E}_m$. Ekkor az optimális megoldás az alábbi módon határozható meg:

$$x_j = \begin{cases} a_i & \text{ha } c_j < 0 \qquad i = j = 1, 2, \ldots, m \\ b_i & \text{ha } c_j > 0 \\ \lambda a_i + (1-\lambda) b_i & \text{ha } c_j = 0 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Ezen speciális eset két általánosításáról lesz szó a továbbiakban.

I.

Tekintsük először [1] alapján azt az esetet, melyben **A** *minden sora lineárisan független.*

Ezen tulajdonság teljesülésekor mindig létezik olyan $n \cdot m$ méretű $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_m]$ matrix, mely kielégíti az alábbi matrixegyenletet:[1]

$$\mathbf{ATA} = \mathbf{A}\,, \tag{3}$$

és melynek segítségével megadhatók az optimális megoldások:

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in H_1} a_i \mathbf{t}_i + \sum_{i \in H_2} b_i \mathbf{t}_i + \sum_{i \in H_0} [\lambda b_i + (1 - \lambda) a_i] \mathbf{t}_i + \mathbf{y} \tag{4}$$

ahol:

$$H_1 = \{i \mid \mathbf{c}^* \mathbf{t}_i < 0\}$$
$$H_2 = \{i \mid \mathbf{c}^* \mathbf{t}_i > 0\}$$
$$H_0 = \{i \mid \mathbf{c}^* \mathbf{t}_i = 0\}$$
$$0 \leq \lambda \leq 1$$
$$\mathbf{y} \in N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{y} \in E^n\}$$

Legyen ugyanis

$$\mathbf{z} = \mathbf{Ax}$$

ekkor **A** fenti tulajdonsága miatt egyrészt minden **z** felírható ilyen alakban, másrészt

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} + \mathbf{y}$$

és emiatt (1), (2) a következő ekvivalens feladatra transzformálódik:

$$\max\,(\mathbf{c}^* \mathbf{Tz})$$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{b}$$

(ugyanis $\mathbf{c}^* \mathbf{y} = 0$, lásd később).

Ha tehát ismerünk egy olyan **T** matrixot, mely kielégíti (3)-t és ismerünk egy $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$ vektort, akkor (4) megadja (1) és (2) egy optimális megoldását. Meg kell jegyezni, hogy (4)-gyel definiált **x** független attól, hogy melyik **T** matrixot választjuk, de nem független **y** megválasztásától.

T és $N(\mathbf{A})$ meghatározásához szükség van egy olyan **S** m · m-es nem-szinguláris matrixra, melyre teljesül, hogy

$$\mathbf{SA} = [\mathbf{E}_m, \mathbf{D}]\mathbf{P} \tag{5}$$

ahol **P** n-ed rendű permutáló matrix. Ekkor

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^* \left[\begin{array}{c} \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{0}_{n-m,m} \end{array}\right]$$

és

$$N(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{P}^* \left[\begin{array}{c} -\mathbf{D} \\ \hline \mathbf{E}_{n-m} \end{array}\right] \mathbf{z}, \mathbf{z} \in E^{n-m} \right\}$$

(5)-ből látható, hogy a szokásos bázistranszformációs eljárás segítségével **T** és $N(\mathbf{A})$ meghatározható.

[1] A Moore-Penrose féle általánosított inverz ezen **T** matrix speciális esete.

Az eddigiekhez még két megjegyzés:

1. Az $N(\mathbf{A})$ halmaz sohasem lehet üres. Ui. a nullvektor mindig eleme a halmaznak.
2. Alapvető jelentősége van e kérdés tárgyalásakor annak a ténynek, hogy (1)-nek akkor és csak akkor van korlátos optimuma (2) felett, ha a célfüggvényegyütthatók vektora merőleges az $N(\mathbf{A})$ halmazra.

1. példa:

$$\text{maximum } (4x_1 - 8x_2 - 5x_3)$$
$$0 \leq 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$
$$-2 \leq -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}
\boxed{2} & -2 & 3 & 1 & 0 \\
-1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \boxed{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
1 & 0 & \frac{17}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}
\end{array}\right|$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{E}_3 \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad N(\mathbf{A}) = z \begin{bmatrix} -\frac{17}{4} \\ -\frac{11}{4} \\ -1 \end{bmatrix}_{-\infty < z < +\infty}$$

$$H_1 = \{2\}$$
$$H_2 = \{1\}$$
$$H_0 = \varnothing$$

$$\mathbf{x} = -2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\frac{17}{5} \\ -\frac{11}{4} \\ -0 \end{bmatrix}$$

ahol z tetszőleges skalár.

II.

Vegyük most [3] szerint azt az esetet, amikor **A** *minden oszlopa lineárisan független.* (Ebben az esetben a korlátos optimum létezése nyilvánvaló. Ekkor ugyanis $N(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, és erre bármilyen célfüggvényvektor merőleges.]

Ekkor az (1), (2) feladatot az alábbi feladattá alakítjuk át:

$$\tilde{\mathbf{c}}^*\mathbf{x}' = \max ! \tag{6}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}' \leq \bar{\mathbf{b}} \tag{7}$$

$$\hat{\mathbf{a}} \leq \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}' \leq \hat{\mathbf{b}}$$

feltételek mellett, ahol úgy $\hat{\mathbf{A}}$, mint az $\bar{\mathbf{A}}$ matrix kvadratikus és nem-szinguláris. Ez az átalakítás úgy történik, hogy az $m \cdot n$-es **A** matrixot, melynek rangja n (azaz $\varrho(\mathbf{A}) = n$), valamint az $m \cdot 1$-es **a** és **b**-t három részre bontjuk.

(8a) $\quad \mathbf{a}_1 \leq \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}_1$ $n \cdot n$-es méretű $\varrho(\mathbf{A}_1) = n$

(8b) $\quad \mathbf{a}_2 \leq \mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}_2$ $q \cdot n$-es méretű $\varrho(\mathbf{A}_2) = q$

(8c) $\quad \mathbf{a}_3 \leq \mathbf{A}_3\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{A}_3$ m-n-$q \cdot n$-es méretű.

Miután $\mathbf{A}_1$ sorait leválasztottuk **A**-ból, a fennmaradó sorok közül maximális számú lineárisan független $\mathbf{A}_2$-be kerül, míg a többi sor $\mathbf{A}_3$-ba.

Ezután (8a)-ból kiválasztjuk az

$$\mathbf{a}_4 \leq \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_4$$

sorokat oly módon, hogy az

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

matrix $n \cdot n$-es nem-szinguláris matrix legyen. (Ez a kiválasztás mindig lehetséges.)

Ekkor az (1), (2) feladat így „bővül":

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} = \max !$$

$$\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{a}_2 \leq \mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{a}_4 \leq \mathbf{B}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_4$$

$$\mathbf{a}_3 \leq \mathbf{A}_3\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_3$$

feltételek mellett.

Képezzük most az alábbi feladatot:

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} + \mathbf{0}^*\mathbf{y} = \max ! \tag{9}$$

az alábbi korlátokkal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{m-n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(10)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{E}_{m-n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

Nyilvánvaló, hogy (1), (2) optimuma és (9), (10) optimuma között kölcsönös és egyértelmű a megfeleltetés és (9), (10) optimális megoldásából (1), (2) optimuma minden átalakítás nélkül adódik.

Ilyen módon (6), (7) valóban előállítható (1), (2)-ből (9), (10) szerint. Írjuk át ezután (6), (7)-et az alábbi ekvivalens feladattá:

$$\mathbf{c}^*\bar{\mathbf{x}} = \max! \tag{11}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \tag{12}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{b}} \tag{13}$$

$$\hat{\mathbf{a}} \leq \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} \leq \hat{\mathbf{b}} \tag{14}$$

feltételi rendszer mellett. Erre a feladatra alkalmazhatók a Dantzig és Wolfe által leírt dekompozíciós elvek:[2] A (13)-mal reprezentált polieder (ekkor ugyanis egyrészt $\bar{\mathbf{A}}$ nemszingularitásából következően az adjungált homogén rendszernek nincs a triviálistól különböző megoldása, ezért a halmaz korlátos, másrészt a halmaz konvex és extremális pontjainak száma véges, ezért a halmaz konvex poliéder) elemei felírhatók az

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{1}^*\bar{\mathbf{v}} = 1, \quad \bar{\mathbf{v}} \geq \mathbf{0} \tag{15}$$

összefüggésekkel, ahol $\bar{\mathbf{P}}$ matrix oszlopvektorai a (13)-mal előállított polieder extremális pontjait tartalmazzák. Mivel (14) hasonlóan kezelhető, ezért (11), (12), (13), (14) felírható így:

$$\text{maximum } (\bar{\mathbf{c}}^*\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{v}})$$

ha

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^*\bar{\mathbf{v}} &= 1 \\ \mathbf{1}^*\hat{\mathbf{v}} &= 1 \\ \bar{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{16}$$

Tegyük fel, hogy ezen feladatnak ismerjük egy lehetséges bázismegoldását egy $\mathbf{s}^* = [\mathbf{s}_1^*, s_2, s_3]$ duális vektorral együtt. Ezután $\bar{\mathbf{P}}$ és $\hat{\mathbf{P}}$ oszlopait meghatározzuk, de csak a feltétlenül szükséges mértékben. Jelöljük ezen oszlopokat a $\hat{\mathbf{p}}_i(i = 1, \ldots, \bar{N})$ és $\bar{\mathbf{p}}_i(i = 1, \ldots, \hat{N})$ szimbólumokkal, legyen továbbá

$$\bar{\mathbf{k}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{k}}_i = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{p}}_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{k}}_i$ vagy $\hat{\mathbf{k}}_i$ bekerülhet a bázisba, ha a

$$(\mathbf{c}^*\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{s}^*\hat{\mathbf{k}}_i) > 0 \quad \text{vagy} \quad -\mathbf{s}^*\hat{\mathbf{k}}_i > 0$$

A szokásos szimplex eljárás szerint ez a vektor kerül be a bázisba, ami a legnagyobb célfüggvényelemmel (θ-val) rendelkezik.

$$\theta = \max\,[\max_{\bar{p}_i}(\mathbf{c}^*\bar{\mathbf{p}}_i - \mathbf{s}^*\bar{\mathbf{k}}_i),\ \max_{\hat{p}_i}(-\,\mathbf{s}^*\hat{\mathbf{k}}_i)]$$

[2] A továbbiak megkívánják a szimplex technika és a DW eljárás bizonyos ismeretét. ([4], [5], [6] stb.)

Közismert, hogy az eljárás addig folytatódik, amíg θ pozitív. θ nempozitivitása már optimális megoldást jelez.

Adott **s**-hez tartozó optimális $\bar{\mathbf{p}}^0$ kiszámításának módja (4) szerint [$N(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, $\lambda = 1$]:

(17)
$$\bar{\mathbf{p}}^0 = \sum_{i \in \bar{H}_1} \bar{a}_i \bar{\mathbf{t}}_i + \sum_{i \in \bar{H}_2} \bar{b}_i \bar{\mathbf{t}}$$

ahol:

$$\bar{\mathbf{T}} = [\bar{\mathbf{t}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{t}}_{m-q}] = \bar{\mathbf{A}}^{-1}$$

és

(18)
$$\bar{H}_1 = \{i | (\mathbf{c} - \mathbf{s}_1)^* \bar{\mathbf{t}}_i < 0\}$$
$$\bar{H}_2 = \{i | (\mathbf{c} - \mathbf{s}_1)^* \bar{\mathbf{t}}_i \geq 0\}$$

Hasonlóan:

(19)
$$\hat{\mathbf{p}}^0 = \sum_{i \in \hat{H}_1} \hat{a}_i \hat{\mathbf{t}}_i + \sum_{i \in \hat{H}_2} \hat{b}_i \hat{\mathbf{t}}$$

ahol:

$$\hat{\mathbf{T}} = [\hat{\mathbf{t}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{t}}_{m-q}] = \hat{\mathbf{A}}^{-1}$$

és

(20)
$$\hat{H}_1 = \{i | \mathbf{s}_1^* \hat{\mathbf{t}}_i > 0\}$$
$$\hat{H}_2 = \{i | \mathbf{s}_1^* \hat{\mathbf{t}}_i \leq 0\}$$

Ha $\theta > 0$, akkor vagy $\bar{\mathbf{k}}_l^0$, vagy $\hat{\mathbf{k}}_l^0$ kerül be a bázisba, at új bázishoz új duális $\mathbf{s}^*$ tartozik és a számítási ciklus kezdődik elölről. Ha a degenerációt sikerül elkerülni, az eljárás véges lépésben optimumhoz vezet. Az optimális megoldás értéke (15) első képletébe visszahelyettesítve nyerhető.[3]

Ha az olvasó netán fél a dekompozíciós módszerek számítástechnikai nehézségeitől, akkor rá kell mutatni arra, hogy a magyar terminológiában „szektorfeladat" néven meghonosodott (13) és (14) összefüggések (17), (18) illetve (19), (20) képletekkel szimbolizált megoldása közvetlenül kiszámítható, míg a [4] „szektorfeladatai"-nak megoldása lineáris programozási feladatok meghatározását kívánja. (Az $\bar{\mathbf{A}}$, illetve $\hat{\mathbf{A}}$ matrixokat természetesen előbb invertálni kell.) A „központi" feladatnak nevezett (16)-os összefüggés kiszámítása [4] szellemében történik.

Kezdő bázismegoldást mesterséges változók beiktatásával kapunk. A feladat ekkor igy írható fel:

$$\text{maximum } (\mathbf{c}^* \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{v}} - M \mathbf{1}^* \mathbf{z})$$

$$\bar{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}} & \\ \mathbf{1}^* & \mathbf{0}^* & \mathbf{E}_{m-q+2} \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{1}^* & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-q} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ahol M nagy pozitív skalár. (Ha a **z** vektor valamelyik eleme a bázisban marad, a feladatnak nincs megoldása.) Az algoritmus illusztrálására tekintsük az alábbi példát:

[3] Az [5] 11. fejezet 7 §-ában leírt módszer ezen algoritmus elődjének tekinthető. Ugyancsak hasonló módszer található Hadley G.: Nonlinear and Dynamic Programming (Reading, 1964. Addison-Wesley.) c. könyvében, 4. fejezet 7. § 126–129. o.

2. *példa:*

$$\text{maximum } (2x_1 + x_2)$$

$$0 \leq x_1 \leq 16$$

$$0 \leq x_2 \leq 20$$

$$-1 \leq \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 \leq 6$$

$$-6 \leq \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 \leq 4$$

Ekkor:

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A megoldás menetét a mellékelt táblázat mutatja.

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{v}_3 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{20} & 1 & -\frac{6}{20} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{20} & -1 & \frac{21}{20} \\ -\frac{1}{16} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az optimális megoldás (15) első képlete szerint:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

III.

Nagyon fontos körülmény, hogy az (1), (2) feladatot, ha

$$\varrho(\mathbf{A}) < \min (m, n)$$

könnyen át lehet alakítani olyan feladattá, melynek minden oszlopa lineárisan független és rendelkezik a feltételezett tulajdonságokkal. Az átalakított feladat megoldása egyúttal megoldása az eredeti feladatnak is.

Iteráció i	Bázisváltozók	Bázisinverz				s_1 / s_2, s_3	$\bar{H}_1$ / $\hat{H}_1$	$\bar{H}_2$ / $\hat{H}_2$	$\bar{p}_i^0$ / $\hat{p}_i^0$	$c^*\bar{p}_i - s^*\bar{k}_i$ / $-s^*\hat{k}_i$	A bázisba kerülő változó: jele	A bázisba kerülő változó: oszlopa
1	z_1	1	0	0	0	$-M$	$\varnothing$	1	16	$52+37\,M$	$\bar{v}_1$	16
	z_2	0	1	0	0	$-M$		2	20			20
	z_3	0	0	1	0	$-M$	1	2	-5	$4\,M$		1
	z_4	0	0	0	1	$-M$			2			0
2	z_1	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	$-M$	2	1	16	$32+17\,M$	$\bar{v}_2$	16
	$\bar{v}_1$	0	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{13}{5}+\frac{17}{20}\,M$			0			0
	z_3	0	$-\frac{1}{20}$	1	0	$-M$	$\varnothing$	1	2	$\frac{208}{5}+\frac{63}{5}\,M$		1
	z_4	0	0	0	1	$-M$		2	16			0
3	$\bar{v}_2$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{20}$	0	0	$2+\frac{1}{16}\,M$	1	2	0	M	$\hat{v}_1$	-12
	$\bar{v}_1$	0	$\frac{1}{20}$	0	0	1			20			-6
	z_3	$-\frac{1}{16}$	0	1	0	$-M$	2	1	12	$30+\frac{7}{4}\,M$		0
	z_4	0	0	0	1	$-M$			6			1
4	$\bar{v}_2$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{20}$	0	$\frac{9}{20}$	$2+\frac{1}{16}\,M$	1	2	0	M	$\bar{v}_3$	0
	$\bar{v}_1$	0	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{3}{10}$	1			20			20
	z_3	$-\frac{1}{16}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-M$	2	1	12	0		1
	$\hat{v}_1$	0	0	0	1	$30-\frac{3}{4}\,M$			6			0
5	$\bar{v}_2$	0	$-\frac{1}{20}$	1	$-\frac{6}{20}$	2	$\varnothing$	1	16	0	$\theta = 0$ optimum	
	$\bar{v}_1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{20}$	-1	$\frac{21}{20}$	1		2	20			
	$\bar{v}_3$	$-\frac{1}{16}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	2	1	12	0		
	$\hat{v}_1$	0	0	0	1	30			6			

A fent vázolt két algoritmus egész sor probléma megoldására alkalmazható. Néhány gazdasági természetű modell megoldását mutatja be a [2] dolgozat.

A leggyakoribb lineáris programozási probléma, mely a következő alakú:

$$\text{maximum } (\mathbf{c}^*\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{21}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

szintén átfogalmazható az (1), (2) alakra:

$$\text{maximum } (\mathbf{c}^*\mathbf{x})$$

(22)
$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq M\mathbf{1}$$

$$M\mathbf{1} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

ahol M elegendően nagy pozitív skalár. A (22)-vel jelzett feladatra az elsőként vázolt algoritmus a duál szimplex módszerhez szolgáltat „jó" induló bázist, míg a második algoritmussal e feladat minden átalakítás nélkül megoldható.

A közelmúltban publikált több dolgozat kifejezetten azt a célt tűzte ki és oldotta meg, hogy (21)-re *hatékony* módszereket adjon az intervallum programozás segítségével (pl. [7]).

Összefoglalva: Az intervallum programozás egyik fő erénye — a számítástechnikai előnyökön túlmenően — az, hogy szemben az iterációk sorozatával optimumot elérő algoritmusokkal, az optimális megoldást *explicite* adja meg, hátránya viszont, hogy általában nem szolgáltatja a primál feladat megoldásával egyidejűleg a feladat duálásának megoldását is.

IRODALOM

1. Ben-Israel, A.—Charnes, A.: An explicit solution of a special class of linear programming problems. Operations Research, Vol. 16 (1968), pp. 1166—1175.
2. Ben-Israel, A.—Charnes, A.—Hurter, A. P.—Robers, P. D.: On the explicit soluton of a special class of linear economic models. Operations Research, Vol. 18 (1970), pp. 462—470.
3. Ben-Israel, A.—Robers, P. D.: A decomposition method for interval linear programming. Management Science, Vol. 16 (1970), pp. 374—387.
4. Dantzig, G. B.—Wolfe, P.: The decomposition principle for linear programs. Operations Research, Vol. 8 (1960), pp. 101—111.
5. Hadley, G.: Linear Programming. Reading, 1962. Addison-Wesley.
6. Orchard-Hays, W.: Advanced Linear Programming Computing Techniques. New York, 1968. McGraw Hill.
7. Zlobec, S.—Ben-Israel, A.: On explicit solutions of interval linear programs. Israel Journal of Mathematics, Vol. 8 (1970), pp. 12—22.