FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

SIMONOVITS ANDRÁS

A team-elméletről

(J. Marschak és R. Radner sztochasztikus szervezetmodelljéről)

I. Bevezetés

Dolgozatom célja: Jacob Marschak és Roy Radner *team-elméletének* [12] ismertetése, bizonyos kiegészítése. A *team* — angol szó, magyarban is használatos; magyar megfelelője: munkaközösség, csapat stb.

A szervezet — tagjainak együttese, egységeinek rendszere. Adott a sztochasztikusan (véletlenszerűen) viselkedő Külvilág, amelyről a különböző tagok *különböző információival és döntési lehetőséggel* rendelkeznek. A tagok a szervezet által eleve meghatározott szabályok szerint tevékenykednek — *közös cél* érdekében. A szerzők ezt a homogén, egy célnak alárendelt tagokból álló szervezetet nevezik teamnek.

A team-elmélet célja: a team jó ill. legjobb információs- és döntési struktúrájának vizsgálata. E vizsgálat részben összefüggő matematikai modellrendszerre támaszkodik.

1. A dolgozat forrásai

Már említettem, hogy a dolgozat fő célja J. Marschak és R. Radner team-elméletének rövid ismertetése. A szerzők az USA-ban, az ötvenes évek közepétől rendszeresen közölnek team-elméleti cikkeket folyóiratokban, könyvekben: pl. Marschak [9], [10] és Radner [15], [16], [17], [18].

Nemrég készült el összefoglaló művük: „The Economic Theory of Teams" (magyarul: „A team gazdasági elmélete", röviden: „Team-Elmélet" [12].) A könyv 1970 szeptemberéig még nem jelent meg; kéziratát olvastam. A könyv többszáz oldalas, ezért ismertetésem csak bizonyos részeire szorítkozik. Nehézséget okoz, hogy magyar nyelven nem jelent meg olyan munka, amely a szükséges alapokat ismertetné.

Dolgozatomban több helyen hivatkozom Radner: „Team Decision Problems" („Team döntési problémák") c. [17] cikkre, amely matematikailag sokkal általánosabb és egzaktabb, mint a „Team-Elmélet".

Több új gondolatot ad H. Hax: „Döntések koordinálása" c. [4] könyve, amely eddig az egyetlen magyarul megjelent team-elméleti munka. Általános matematikai szintje alacsonyabb a „Team-Elmélet" szintjénél, viszont sokkal több gazdasági, főként üzemgazdaságtani gondolatot tartalmaz. Ezért is megengedhetőnek tartom, hogy e dolgozat főleg a matematikai kérdésekkel foglalkozzon.

2. Egy team-elméleti példa

A team-elmélet problémáit rögtön egy nagyon egyszerű példával illusztrálom.

Egy (külkereskedelmi) cég valamilyen termékét n (külföldi) ügynöknél lehet megvásárolni, az ügynökök a cégtől rendelik az árut. Az i. ügynök egy db-ot μ_i véletlen áron ad el. (A véletlen itt azt jelenti, hogy előre nem ismert az ár, de az i. ügynök minden terméket azonos áron ad el.) A cég összesen b db terméket kell hogy eladjon. Az i. ügynök az árvektorról bizonyos információval rendelkezik (pl. ismeri „szomszédai" árait). Jele: $y_i = \eta_i(\mu)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n)$.

Két kérdésre összpontosítunk:

— Adott információs rendszer esetén milyen általános szabályt írjon elő a cég az i. ügynök információ-rendelés kapcsolatára? A kérdéses függvényt $a_i = \alpha_i(y_i)$ jelöli.

— Milyen információkat kell az i. ügynöknek ismernie?

Mielőtt a cég megválasztja információs és döntési struktúráját, választási kritériumra van szüksége. Tegyük fel, hogy adott információs struktúra esetén maximális várható hozamú döntést választ; az információs struktúrák közül maximális hozamú struktúrát.

Legyen az i. ügynök rendelése $a_i \geq 0$, ekkor $\sum_{i=1}^{n} a_i = b_i$ és a cég bruttó bevétele $W(\mu, a) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$. Azaz (η,α) struktúra várható bevétele $V[\eta, \alpha] = MW\{\mu, \alpha(\mu)\}$.

Egyelőre csak a legegyszerűbb információs struktúrákkal foglalkozunk:

1. Semmilyen információ sincs az árak pillanatnyi értékéről. Ekkor $V[\eta, \alpha] = \sum_{i=1}^{n} (M\mu_i)a_i$. Feltehetjük, hogy úgy indexeltük a változókat, hogy $M\mu_1 \geq M\mu_2 \geq \ldots \geq M\mu_n$ teljesül. Nyilván $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) = (b, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ — optimális döntés. Persze, ha $M\mu_1 = M\mu_2$, akkor $\hat{a} = (\hat{a}_1, b - \hat{a}_1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ is optimális, $(0 \leq \hat{a}_1 \leq b)$, stb.

2. Mindegyik ügynök ismeri mindegyik ár tényleges értékét. Ekkor mindegyik ügynök tudja, ki(k) a legmagasabb árfekvésű ügynök(ök). Tegyük fel, hogy ezek közül mindig a minimális indexű ügynök adja el az egészet. — Sokszor egyszerűbb egy Központot létrehozni, amely kiválasztja a legmagasabb árakat és a megfelelő ügynököket utasítja a megfelelő mennyiség eladására.

3. Gyakran adódik olyan eset, mikor minden ügynök csak a „saját" árát ismeri. Ez az eset bonyolultabb annál, hogy illusztratív példaként tárgyaljuk.

3. *A dolgozat felépítése*

A dolgozat a *Bevezetés*en kívül további öt részből áll.

A II. rész: *Információ és döntés*. Először a „döntés — bizonytalanság mellett" klasszikus problémát érintjük; ismertetjük Marschak és Radner felfogásának alapelemeit. Ismertetjük az információs- és a döntésfüggvény fogalmát és számszerű értékét.

A III. rész: *A team információs- és döntési struktúrája*. A II. rész általánosítása többtagú szervezetre. Néhány fontos információs struktúrát definiálunk.

A IV. rész: *Optimális döntésfüggvények*. Ismertetem az optimalitás Radner-féle szükséges és elégséges feltételét, valamint új eljárásomat, mely fokozatosan javítja a döntésfüggvényeket és bizonyos feltétel mellett bebizonyítom, hogy az optimális döntésfüggvény tetszőlegesen megközelíthető eljárásommal.

Az V. rész: *Kvadratikus team*. A team nyereségfüggvénye kvadratikus függvénye a döntésnek. Ez a team-elmélet legjobban kidolgozott része — az általános tételek itt jól alkalmazhatók.

A VI. rész: *A team-elmélet és a rokonelméletek viszonya*. Rövid áttekintés.

II. Információ és döntés

A Bevezetésben már kiemeltem, hogy a team-elmélet a team információs- és döntési struktúrájára összpontosít. Ezért kiinduló fogalmaink: az *információ* és a *döntés;* szokás szerint e fogalmakat először az „egytagú team" esetében ismertetjük.

1. Döntés bizonytalanság esetén

Legtöbb döntésünket bizonytalanság mellett hozzuk. Gondoljuk azt, hogy meleg nyári reggel van, de estére 20%-os valószínűségű esőt jelzett a rádió. Vigyünk-e esőkabátot a munkába vagy ne? . . .

Döntésünket valamilyen kritérium szerint hozzuk. „Semmi esetre se akarok megázni" — mondja a pesszimista. „Nagyon kényelmetlen az esőkabát" — mondja az optimista . . .

Nyilván a következő két tényező együttesét (az ún. *kimenetelt)* értékeljük:

— a döntésthozó számára adott tényezőt (= a *Külvilág állapota)*

— a döntésthozó számára választható tényezőt (= a *döntés)*

Persze nem ért egyet ezzel a felosztással az az ember, aki esőben, esőkabát nélkül — azt mondja: „Ha esőkabátot hoztam volna, biztosan nem esett volna". Komolyra fordítva a szót: ha a döntés visszahat a Külvilág állapotára, akkor modellünk nem alkalmazható.

Vagyis feltehetjük, hogy létezik a Külvilág, állapota véletlenszerűen változik, s ezt egy ismert $(X, \mathcal{X}, P)$ — objektív vagy szubjektív — valószínűségi mezővel reprezentáljuk (Rényi: [19], Savage: [20]). Általában nem vesszük — nem is vehetjük — figyelembe az X eseménytér minden részhalmazát. Legyen $\mathcal{X}$ a *megfigyelhető események családja*, s $\mathbf{X} \subset X$, $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ valamilyen megfigyelhető esemény. $P(\mathbf{X})$ $(0 \leq P(\mathbf{X}) \leq 1)$ $\mathbf{X}$ esemény valószínűsége. $x \in X$ — *elemi esemény* (= állapot).

Megjegyzem, hogy a döntéselméletben gyakran megelégednek véges elemszámú eseménytér vizsgálatával. A „Team-Elmélet" is csak a normális eloszlás alkalmazása miatt tér át általánosabb, bonyolultabb eseményterek vizsgálatára. Már a legegyszerűbb esetben is szükséges viszont a *megfigyelhető* esemény fogalma. Pl. „fej vagy írás"-t játszunk két pénzdarabbal, melyeket nem különböztetünk meg. Nyilván F, I és I, F elemi események nem megfigyelhető események, uniójuk viszont megfigyelhető.

2. Az egyén információs és döntési struktúrája

Kezdjük egy példával, mégpedig az előző példa módosításával! Képzeljük azt, hogy két megkülönböztethető pénzdarabbal játszunk, csak a megfigyelő nem tud különbséget tenni köztük. Ekkor két valószínűségi mezőt különböztethetünk meg: a valóságost, az eredetit és a képzeltet, a másodlagost. Természetesen egy távollevő személy számára egy harmadik valószínűségi mező létezik — ti. a triviális, amely két eseményből áll: a biztos és a lehetetlen eseményből.

Az előző példák után definiálhatjuk az *információs struktúra* fogalmát: A megfigyelő számára a Külvilág valódi állapota nem ismert; csak az ismert, hogy a valódi állapot milyen *állapot-osztályhoz* tartozik. Pl. nem ismert, hogy egy termék idei termelése hányszorosa lesz a tavalyinak; csak az ismeretes, hogy több lesz (vagy esetleg kevesebb).

Véges vagy megszámlálható elemű eseménytér esetén nincs különösebb értelmezési nehézség. Tegyük fel, hogy úgy osztályozzuk az elemi eseményeket (= állapotokat), hogy egy osztályba azok és csak azok az elemi események kerülnek, amelyeket a megfigyelő nem tud egymástól megkülönböztetni. Így minden elemi esemény pontosan egy ilyen eseményhalmazba (= állapotosztály) tartozik. A későbbiek miatt absztraktan indexszeljük ezeket az állapot-osztályokat: $\{\mathbf{X}_y\}_{y\in Y}$ ahol $\mathbf{X}_y \in \mathcal{X}$, $\mathbf{X} = \bigcup_{y\in Y} \mathbf{X}_y$, $\mathbf{X}_{y_1} \cap \mathbf{X}_{y_2} = \emptyset$, $(y_1 \neq y_2)$.

y indexet *elemi információnak*, Y indexhalmazt *információs térnek*, $\mathcal{Y}$ halmazcsaládot *információs struktúrának* nevezzük. Az információs struktúrának megfelelő *információs függvényt* „$\eta(x) = y$ ekvivalens $x \in \mathbf{X}_y$" összefüggés adja.

Az általános definíció lényegesen bonyolultabb, a „Team-Elmélet" éppen csak érinti a kérdést — részletesen Radner [17] foglalkozik e kérdéssel.

Most először az *információ teret* definiáljuk — egyszerűen valamilyen absztrakt halmazként. Az *elemi információ* — az információ tér absztrakt eleme: $y \in Y$.

A megfigyelhető esemény analógiájára be kell vezetnünk a *megfigyelhető információ* fogalmát — ezen az információ tér valamilyen részhalmazát értjük. Nyilván több megfigyelhető információ létezik, családjuk jele $\mathcal{Y}$, azaz $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}$. *Információs függvényen* $\eta: X \to Y$, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ mérhető függvényt értünk.

Általában azért informálódunk, hogy dönthessünk. Pl. ha piaci konjunktúra van, akkor a vállalatok növelik eladásaikat. Elméletünkben a *döntés* alapfogalom; jele a, a *lehetséges döntések halmaza* A, $a \in A$.

Olyan döntéseket vizsgálunk, melyek az információtól függnek. Azaz, ha két különböző elemi eseménynek azonos elemi információ felel meg, akkor a két döntés azonos. Ezeket a függvényeket nevezzük *döntésfüggvény*eknek. Jelük: $\alpha: Y \to A$. A *lehetséges döntésfüggvények halmaza* $\mathcal{A}_\eta$. Követve a „Team-Elmélet"-et, ebben a dolgozatban is minden $Y \to A$ függvény megengedett. (Célszerű lehetne csak bizonyos típusú függvényeket szerepeltetni — pl. valós vektoroknál folytonos-, esetleg lineáris stb. függvényeket.) Viszont különböző információs struktúrákhoz különböző döntésfüggvények tartozhatnak.

Két triviális struktúra létezik:

1. a teljes informálatlanság, a *rutin*. Azaz az információs függvény állandó. (Persze a modell apriori adatai ismertek a team-nek!) Jele: $\mathcal{Y} = (\emptyset, Y)$. A megfelelő döntésfüggvények a *rutin döntések:* $\mathcal{A}_\emptyset = A$.

2. *a teljes informáltság:* Ekkor ismert a Külvilág tényleges, pillanatnyi állapota: $Y = X$, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\{x\} \in \mathcal{X}$, ahol $\{x\}$ az x elemből álló halmaz.

3. *A döntésthozó kritériumáról*

Tegyük föl, hogy a team rendelkezik valamilyen preferencia-rendezéssel.

Bizonyos feltevések mellett Neumann és Morgenstern bebizonyították [14], [7], hogy a kimenetelek preferencia-rendezése egyértelműen reprezentálható egy valós értékű függvénnyel; s a döntéseket e *hasznosság-függvény* várható értékével mérhetjük. A „Team-Elmélet" nyomán mi is ezt a függvényt használjuk a továbbiakban. Jele: $W(x, a)$.

Félreértéshez vezet, ha a hasznosság- (= nyereség) függvényt azonosítjuk a döntésthozó valamilyen pénzbeli nyereségével. Ugyanis egy vállalat nem csupán nyeresége várható értékét figyeli, hanem — többek között — a nyereség ingadozását, minimumát stb. A Neumann—Morgenstern-féle — általában ismeretlen — nyereségfüggvénynél viszont ez a probléma explicite nem is létezik, bennfoglaltatik a hasznosságfüggvényben. (Részletesebben: Luce és Raiffa: [7].) Tegyük fel, hogy minden $\alpha \in \mathcal{A}_\eta$-ra $W\{x, \alpha[\eta(x)]\}$ várható értéke véges: $V[\eta, \alpha] = MW\{x, \alpha[\eta(x)]\}$ — ez (η, α) *hozama*. Mivel optimalizálunk, célszerű $V(\eta) = \sup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_\eta} V[\eta, \alpha]$-t nevezni η *információsfüggvény hozamának*. $\hat{\alpha}_\eta$ — *optimális döntésfüggvény* (η információs függvény mellett), ha maximális hozamú: $V[\eta, \hat{\alpha}_\eta] = V(\eta)$

4. *Kiegészítések*

Hasznosnak tartom itt megemlíteni, hogy Hax ([4] — 46. o. stb.) jóval általánosabban definiálja az információs struktúrát. Eredeti példánkon illusztrálom az általánosítást: két elemi információ legyen; Az érmék között {van F} ill. {van I}. Nyilván az elemi események közül a vegyes párok (F, I ill. I, F) mindkét elemi információnak megfelelnek, tehát egy elemi eseményről több, nem összeillő elemi információ is keletkezhet.

Hax gondolatát még általánosabban, de szándékosan nem teljes általánosságban fogalmazom meg. Legyen mind az eseménytér, mind az információ tér véges-dimenziós euklidesi tér. Azaz x és y valószínűségi változók (valamilyen közös valószínűségi mező fölött). Legyen együttes sűrűségfüggvényük (ill. diszkrét esetben valószínűségük) $f(x, y)$. Nyilván x sűrűségfüggvénye $g(x) = \int\limits_Y f(x, y)dy$, y-é $h(y) = \int\limits_X f(x, y)dx$. (Diszkrét esetben az integrálok helyett összeg szerepel!) Hax a következő feltételes sűrűségfüggvényt (ill. -valószínűséget) használja: $f(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{h(y)}$. (Ha $h(y) = 0$, akkor $f(x|y)$ is legyen 0 — ennek úgyis nulla a valószínűsége.)

Könnyen megvilágíthatjuk a két definíció kapcsolatát: Tekintsük azon elemi események halmazát, melyek y-feltételes valószínűsége (az általános változatban) pozitív. Képletben: $\mathbf{X}_y = \{x;\ f(x|y) > 0\}$. Diszkrét esetben az a feltétel, hogy $y_1 \neq y_2$-ből következik $\mathbf{X}_{y1} \cap \mathbf{X}_{y2} = \emptyset$ ekvivalens az információs struktúra II./2.-beli definíciójával.

Mivel a döntésthozó nem az eseményt, hanem annak információs képét ismeri, gyakran át kell ill. át lehet térni a nyereségfüggvény *feltételes várható értékére:* $U(y, a) = \int\limits_X W(x, a)f(x, y)dx = M\{W(x, a)|y\}$. (Ha különböző struktúrákat hasonlítunk össze, akkor nem célszerű ez a transzformálás!)

A nyereség feltételes várható értéke nagyon fontos függvény, mert egy döntésfüggvény akkor és csak akkor optimális, ha (majdnem) minden elemi információnál maximalizálja e függvényt: $U(y, a) \leq U[y, \hat{\alpha}(y)]$, $y \in Y$, $a \in A$.

„A majdnem minden y-ra" azt jelenti, hogy csak 0-összvalószínűségű y-okra nem.

Hasznos fogalom az információ struktúrák *finomság szerinti* (részben) *rendezése.* Magyarul: Két struktúra közül melyik struktúra tagoltabb, melyik mond többet? Diszkrét esetben a finomabb struktúra az eseménytér finomabb felosztást jelent. Általánosan azt mondhatjuk, hogy a durvább információsfüggvény a finomabb információs-függvény függvénye — összetett függvény. Nyilván nem minden struktúra hasonlítható össze; viszont a rutin a legdurvább, a teljes információ a legfinomabb struktúra.

Mivel minden $Y \to A$ függvény megengedett döntésfüggvény, finomabb információs struktúrához tágabb döntésfüggvény-osztály tartozik, tehát finomabb struktúra nagyobb (esetleg egyenlő) hozamú. Természetesen a költsége is nagyobb.

Célszerű kiegészítést tesznek ezen a helyen a „Team-Elmélet" szerzői: Mivel a rutin nem igényel információt, az információ struktúra *értékénél* hozamából kivonjuk a rutin hozamát: $\hat{V}(\eta) = V(\eta) - V(\emptyset)$. (Pl. a rutin információ értéke nulla: $\hat{V}(\emptyset) = 0$.)

III. A team információs és döntési struktúrája

1. A team-probléma legfőbb sajátosságáról

Eddig egytagú „szervezet"-et vizsgáltunk, ami tulajdonképpen nem is szervezet. Most rátérünk az igazi (= többtagú) szervezet vizsgálatára. A formális általánosításon túl a következő tartalmi változással kell szembenézni:

Bármely tag számára nemcsak a Külvilág sztochasztikus, hanem a többi tag döntése is; de nem mondhatjuk, hogy ezek a tag környezetéhez tartoznak, mert a döntések *kölcsönösen* összefüggnek az egyén döntésével.

E dolgozat a legegyszerűbb team-modellel foglalkozik: Feltesszük, hogy *minden tag azonos időpontban dönt.* Ezzel kizártuk, hogy egyik tag döntése a másik tag számára információ legyen. Kiemelendő, hogy feltevésünk a jelenlegi team-elmélet egyik legszigorúbb feltevése, s nagyon leszűkíti a modell alkalmazhatósági körét. (Statikus modell, keresztmetszeti modell.)

2. A team struktúrája

A team információs- és döntési struktúrája a tagok információs- és döntési struktúráinak együttes rendszere. Az *i.* tag — $1 \leq i \leq n$ — struktúrájára ugyanaz vonatkozik, mint az előző rész egyéni struktúrájára. Csak a jelölés módosul — *i* indexszel. Index nélküli jel az egész team-re vonatkozó megfelelő fogalmat jelenti.

Tehát a *team* információtere $Y = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} Y$ ($\times$ itt szorzójel! Descartes szorzatról van szó), elemi információja $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$, információs struktúrája $\mathcal{Y} = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \mathcal{Y}_i$, információs függvénye $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_i(x), \ldots, \eta_n(x))$.

Hasonlóan a *team* döntése $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$, döntésfüggvénye $\alpha(y) = (\alpha_1(y_1), \ldots, \alpha_i(y_i), \ldots, \alpha_n(y_n))$, és a megengedett halmazok $A \subseteq \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ ill. $\mathcal{A}_\eta \subseteq \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \mathcal{A}_{\eta i}$. Jegyezzük meg, hogy a lehetséges döntési halmazok értelmezés éné arról az egyszerű dologról van szó, hogy lehetnek olyan team-tagdöntések, melyekből alkotott formális team-döntés nem megengedett: $A \neq \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$.

Ettől a megszorítástól a következőképp szabadulhatunk meg: Gondoljuk azt, hogy a nyereségfüggvény értéke bármely nem megengedett team-döntésen annyira negatív, hogy nem jöhet szóba mint optimális döntés! Ez gyakorlati és elméleti szempontból is gyakran kielégítő. (Gondoljunk a bírságoló függvényekre, pl. a Lagrange-szorzók módszerére.) Tehát $A = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ és $Q_{\eta i} = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} a_{\eta i}$. Itt azt is felhasználtuk, hogy a tagok döntései formálisan függetlenek egymástól — egyidejűek.

Formálisan azt mondhatjuk, hogy *a team nyereségfüggvényét minden tag elfogadja és döntésével maximalizálni akarja a team (várható) nyereségét*. Nemsokára láthatjuk, hogy ez csak formálisan igaz, valójában a *team tagjai egyszerű végrehajtók*. A modell egy teljesen bürokratikus szervezetet ír le, a tagok önállósága mindössze az, hogy a konkrét információs állapotnak megfelelően „maguk döntenek" — a Központ által teljesen meghatározott módon. Ezért általában szükséges, hogy létezzék egy optimalizáló, koordináló *Központ*.

A közönséges team-tagokkal ellentétben, a Központ nem hoz olyan „döntéseket", amelyek közvetlenül tükröződnek a nyereségfüggvényben. A termék eladása az ügynökök dolga, nem a cégé. (Bevezető példa I. 3.)

Vegyük észre, hogy a Központ szerepeltetése implicite megszünteti modellünk explicite keresztmetszeti jellegét. Most már elképzelhető, hogy egyik tag döntése egy másik tag számára információ, mert a mindenttudó Központ még az „egyik" tag döntése előtt közölheti e döntést a „másik" taggal, aki szintén döntés előtt van még.

Az egyéni struktúra értékeléséről mondottak (II.3.) változtatás nélkül átvihetők a team-struktúrára, még a jelölések is azonosak.

3. *Elfajult teamek*

Tanulságos külön megismerkedni a legegyszerűbb team-ekkel.

Elfajult team olyan team, amely közvetlenül visszavezethető egy vagy több egyéni struktúrára. Érdemes a következő két elfajult esetet megnézni:

1. Az egyéni döntések közötti összefüggéseket a módosított nyereségfüggvénybe építettük be. (Lagrange-szorzók!) Ezért a team nyereségfüggvényének elfajultságához kapcsolódik a legegyszerűbb elfajult team:

Ha $W(x, a) = \sum_{i=1}^{n} W_i(x, a_i)$, akkor az egyes tagok döntései közt nincs kapcsolat, mert a nyereségfüggvény nem tükröz ilyen kapcsolatot. Nyilván n független egyéni problémát kell megoldani.

2. *Teljes kommunikáción* olyan team-információs struktúrát ért a „Team-Elmélet", amelynél a „teljes" kommunikáció révén a team minden tagja azonos információs-struktúrával rendelkezik: $Y_i = Y_1$, $\eta_i = \eta_1$, $(2 \leq i \leq n)$. (Kissé paradox, de idetartozik a teljes informálatlanság, a rutin esete is.) Teljes kommunikáció esetén azt mondhatjuk, hogy a szervező az egyéni döntésfüggvényeket mint *egy* döntésfüggvény komponenseit határozza meg, szemben az általános esettel, ahol az egyes tagok döntésfüggvényének független változója is különböző!

Vagyis a team-elmélet (egyik) legfontosabb sajátossága a tagok információs struktúrájának különbözőségében van.

A továbbiakban ezek az elfajult struktúrák csak szélsőséges példaként vagy határesetként kerülnek elő.

4. *Néhány alapvető információs struktúráról*

Eddig csak a legdurvább és a legfinomabb információs struktúráról ill. közös általánosításukról beszéltünk explicite: a rutin, a teljes információ és a teljes kommunikáció esetéről.

Új információs struktúrák vizsgálatát teszi lehetővé a következő speciális alakú nyereségfüggvény:

$W(x, a) = \mu(x)a - S(a)$. Itt $\mu(x)$ n-dimenziós valószínűségi változó, a n-dimenziós vektor; $S(a)$ valós értékű függvény. Első közelítésben azt mondhatjuk, hogy a kisebbítendő a team bruttó bevétele (l. a bevezető példát — I.2.), a kivonandó a team kiadása.

Célszerű a modellt a következőképpen elképzelni: Az i. tag megfigyeli μ_i tényleges értékét: m_i-t. Itt nincs szükség a Külvilág x állapotának ismeretére ($\mu_i(x)$ elégséges statisztika). Sőt, általánosabban: az i. tag nem magát a valószínűségi változót, hanem annak valamilyen függvényét figyeli meg. (Pl. nem a véletlen árat figyeli meg, hanem valamilyen átlagárhoz viszonyított nagyságrendjét: magas ár, alacsony ár.) S ez alapján dönt: $\eta_i(x) = \zeta_i[\mu_i(x)]$. — Ez a *teljes decentralizáció*. (A pontosság kedvéért megjegyzem, hogy a rutin ebbe a kategóriába is beletartozik.)

A teljes kommunikáció viszont a *teljes centralizációnak* felel meg. A két véglet között több alapvető információs struktúrát találunk:

— Az „*alközpontok rendszere*": Soroljuk be a team tagjait csoportokba. Két különböző csoportnak nincs azonos tagja. Egy csoporton belül teljes kommunikáció van, a csoportok team-je viszont teljesen decentralizált struktúrával működnek — az alközpontok egymástól „függetlenül" dolgoznak.

— Közelebb áll a hosszanti struktúra (vö. III.2.) modellezéséhez az „*információ terjesztő*" modell. Ez a struktúra a következőképp modellezi az információáramlást: Az i. tag $z_i = \zeta_i(x)$ megfigyelés alapján $t_i = \tau_i(z_i)$ jelentést küldi a Központnak. A Központ e jelentések alapján új jelentéseket küld az egyes tagoknak: $t'_i = t'_i(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n)$. Azaz az i. tag eredő információja: $y_i = (z_i, t_i)$.

Ha a Központból mindenki ugyanazt a jelentést kapja: $\tau'_i = \tau'_1$ $(2 \leq i \leq n)$, akkor jól látható, hogy ez a struktúra a teljes kommunikáció (τ') és a teljes decentralizáció (ζ) keveréke.

— Sok szempontból nagyon előnyös a „*kivételek közlésé*"-n — alapuló rendszer: Különböztessük meg μ_i *szokásos* és *rendkívüli* értékeit! Ha az i. egység szokásos értéket észlel, akkor csak a saját megfigyelésére alapozza döntését. Ha viszont rendkívüli értéket észlel, akkor jelenti a megfigyelt értéket a Központnak. A Központ minden rendkívüli helyzetben levőnek jelenti a többbi rendkívüli értéket, s ezek alapján dönthetnek a „rendkívüliek".

Külön érdekessége e struktúrának, hogy sztochasztikusan változik, — a szükségletekkel összhangban. A Külvilág adott állapotában e struktúra az előző két struktúra szintézise; megtalálható e rendszerben a „*csoportosítás*" is és a „*jelentés*" is. (Ez megfelel annak az elvnek, hogy az alacsonyabbrendű tevékenységek inkább decentralizálhatók, mint a magasabbrendűek.)

Az itt felsorolt struktúra-típusok is részlegesen fedik egymást. Természetesen sokféleképp tovább kombinálhatók egymással.

5. A team kiadásai

Ha jobban utánagondolunk, nem teljesen jogos, hogy a $W(x, a)$ függvényt a team nyereségfüggvényének nevezzük. Még akkor sem, ha eltekintünk attól a körülménytől, hogy nem mindig lehet a nyereségfüggvényt bevétel- és kiadásfüggvény különbségére bontani. Ugyanis a következő lényeges különbség van a team bevételi és kiadási függvénye között: Míg a bevétel jó közelítésben csak a Külvilág állapotától és a döntéstől függ, a kiadás a döntésfüggvénytől is függ, és méginkább függ az információs struktúrától. Tehát helyesebb volna $W(x, a, \eta, \alpha)$ függvényt vizsgálni! Sajnos, jelenleg ez az általánosítás csupán formális, csak elvétve találunk ez irányú tartalmi észrevételeket.

Néhány ilyen kivételt említek:

— T. A. Marschak [13] dolgozatában az „alkalmazkodó team" minél több javítás után hozza meg végső döntését, annál tovább marad érvényben a kedvezőtlenebb ideiglenes döntés.

— A „Team-Elmélet" különböző struktúrák hozamának összevetésénél bizonyos normálásokat alkalmaz: pl. az előbb említett többféle blokk-rendszerű struktúráknál az átlagos csoportnagyságot rögzíti — feltételezve, hogy az átlagos csoportnagyságtól függ a kommunikáció és a döntés költsége. (L. e dolgozat V.2. pontját!)

Itt jegyezzük meg, hogy Wald „A statisztikus döntésfüggvények elméleté"-ben [21] hasonló problémákat old meg — általánosan. Statisztikában az információnk mintavételből származik, s Wald figyelembe veszi a *mintavétel költségeit* — a nyereségfüggvény ellentételeként. Ez a komplex szemlélet sugallja az ún. *szekvenciális döntés* bevezetését, amelynél a statisztikus minden újabb mintavétel után megvizsgálja, érdemes-e új mintát venni, vagy sem. Mi nagyobb: az új minta költsége vagy az új információnak köszönhető többletnyereség?

IV. Optimális döntésfüggvények

Ebben a részben optimális döntésfüggvények meghatározásával és jellemzésével foglalkozunk — rögzített információs struktúra mellett.

1. Az optimalitás szükséges feltétele

A döntésfüggvény optimalitására olyan szükséges feltételt keresünk, amely bizonyos további feltevések mellett elégséges feltétel.

„Egytagú" team esetén már ismertettük *a* feltételt: Egy döntésfüggvény akkor és csak akkor optimális, ha (majdnem) minden elemi információra maximalizálja a nyereség feltételes várható értékét. Ennek általánosítását keressük $n \geq 1$-re.

Szükségünk lesz a *Nash-maximum* fogalmára: Valamilyen n-változós, valós értékű függvény Nash-maximuma olyan vektor, melyre a függvény értéke legalább akkora, mint bármilyen olyan pontban, amely csak egy koordinátában különbözik a tekintett ponttól. (Természetesen nem mindig létezik Nash-maximum, de létezhet több is.)

Képletben: $W(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ függvény Nash-maximuma $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_i, \ldots, \tilde{a}_n)$, ha minden i-re és minden $a_i \in A_i$-re

$W(\tilde{a}_1, \ldots, a_i, \ldots, \tilde{a}_n) \leq W(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_i, \ldots, \tilde{a}_n)$. Nyilván minden abszolút maximum-hely Nash-optimum, de fordítva nem. — Először $V[\eta, \alpha]$ α szerinti *Nash*-optimumait vizsgáljuk. II.4.-beli egydimenziós eset általánosításaként vezessük be a következő függvény n-est:

$$U_i(y_i, \alpha_1, \ldots, a_i, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= \int_{\substack{\times Y_j \\ j \neq i}} U[y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n, \alpha_1(y_1), \ldots, a_i, \ldots, \alpha_n(y_n)] \cdot h(y) \prod_{j \neq i} dy_j =$$

$$= M(W\{x, \alpha_1[(\eta_1(x)], \ldots, a_i, \ldots, \alpha_n[\eta_n(x)]\} \mid y_i) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Elég egy tetszőleges, de rögzített komponenst vizsgálni. Ez a függvény azt fejezi ki, hogy mennyi a team nyereségének feltételes várható értéke, ha az i. tag a_i döntést hoz y_i információ esetén, míg a többiek α_j $(j \neq i)$ döntésfüggvény szerint cselekednek. Az elmondottakból könnyen adódik a következő

Tétel: $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}_\eta$ akkor és csak akkor Nash-optimális, ha majdnem minden $y_i \in Y_i$ és minden $a_i \in A_i$ esetén

$$U_i(y_i, \hat{\alpha}_1, \ldots, a_i, \ldots, \hat{\alpha}_n) \leq U_i[y_i, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_i(y_i), \ldots, \hat{\alpha}_n] \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Ismét kiemeljük, hogy a probléma érdekességét az adja, hogy a különböző tagok döntésfüggvényének különböző a független változója, mert különböző információkkal rendelkeznek.

2. *Egy algoritmus*

Persze, e tételben megadott feltétel elég bonyolult. Ezért egy olyan algoritmust ismertetek, amely tetszőleges döntésfüggvényből lépésenként *egyre jobb* döntésfüggvényeket hoz létre, s minden lépés „*egytagú*" team-optimalizálás.

Először az algoritmus *általános lépését* ismertetem: α^m döntésfüggvényből kell α^{m+1}-et előállítani. Jelölje m n-nel való osztásának „maradékát" i, $1 \leq i \leq n$. Tekintsük azt az „egytagú" team-problémát, ahol a többi egység döntésfüggvénye változatlanul az előző döntésfüggvény megfelelő komponense, s az i. tag erre vonatkozóan optimalizál: Feltesszük, hogy az optimalizálás végrehajtható.

Képletben: Minden $y_i \in Y_i$-re van olyan $\alpha_i^{m+1}(y_i) \in A_i$, hogy $U_i(y_i, \alpha_1^m, \ldots, a_i, \ldots \alpha_n^m) \leq U_i[y_i, \alpha_1^m, \ldots, \alpha_i^{m+1}(y_i), \ldots, \alpha_n^m]$, $a_i \in A_i$ és $\alpha_j^{m+1} = \alpha_j^m$ $(j \neq i)$; $m - i$ osztható n-nel.

Induljunk ki valamilyen α_1 döntésfüggvényből, s algoritmusunk egy döntésfüggvény sorozatot állít elő: $\{\alpha^m\}_{m=1}^{\infty}$. Nyilván a sorozat tagjai növekvő (pontosabban: nem csökkenő) hozamúak: $V[\eta, \alpha^m] \leq V[\eta, \alpha^{m+1}]$. Az m. egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\alpha_i^m = \alpha_i^{m+1}$, azaz $\alpha^m = \alpha^{m+1}$. Ezért ha n egymásutáni döntésfüggvény hozama egyező, akkor a döntésfüggvények is egyezők. Így a következő tagok se változnak — az algoritmus véges lépésben elért egy Nash-optimumot.

A továbbiakban feltesszük, hogy minden team-tag döntése tetszőleges *valós* szám. A konvergencia kérdése több Nash-optimum létezése esetén nagyon bonyolult volna, ezért feltesszük, hogy $W(x, a)$ minden rögzített x-re mint a függvénye *szigorúan konkáv*. Ebből már következik, hogy $U(y, a)$ és $V[\eta, \alpha]$ is szigorúan konkáv a-ban ill. α-ban. Ezért *legfeljebb egy* Nash-optimum létezhet s ha létezik, akkor abszolút optimum is.

Az algoritmus konvergenciáját és az optimális döntésfüggvény létezését együtt bizonyítom — a következő speciális esetben.

Tegyük fel, hogy $V(\eta)$ véges.

Tétel: Legyen $W(x, a)$ szigorúan konkáv a-ban és felülről korlátos, s legyen az *információtér véges elemszámú*. Ekkor létezik pontosan egy optimális döntésfüggvény és algoritmusunk konvergál az optimumhoz.

Megjegyzés: A rutin triviális esetének módosításáról van szó!

Bizonyítás: $W(x, a)$-re tett feltevéseink átmennek $U(y, a)$-ra. Könnyen belátható, hogy ekkor $U(\cdot, a)$ „határértéke létezik a végtelenben" és e határérték $-\infty$. Pontosabban: Legyen $|a|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_2|^2$. Tetszőleges (kicsiny) v számhoz van olyan r_v pozitív szám, hogy $|a| > r_v$-ből következik $U(y, a) < v$.

— Először belátjuk, hogy létezik optimális döntésfüggvény. Használjuk fel, hogy információs terünk véges elemszámú, vagyis egy tag döntésfüggvénye véges (sok) döntésből áll, s e döntésekből alkotott vektornak tekinthető. A továbbiakban a vektor-sorozat konvergenciája mindig elemenkénti konvergenciát jelent. $V(\eta)$ véges értékű supremum, tehát van olyan

$$\left\{\left(\alpha^k_i(y_i)\right)_{i=1}^{n}\right\}_{k=1}^{\infty} \leftrightarrow \left\{\left(\alpha_i^k(y_i)\right)_{y_i \in Y_i,\, 1 \le i \le n}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

sorozat, melyre $V(\eta) = \lim\limits_{k\to\infty} V[\eta, \alpha^k]$. Mivel az információtér véges, $V[\eta, \alpha] =$

$\sum\limits_{y \in Y} P(y) U[y, \alpha(y)]$ összefüggésből következően $\left\{U[y, \alpha^k(y)]\right\}_{k=1}^{\infty}$ is korlátos minden $y \in Y$-ra.

Előző észrevételünk szerint tehát $\left\{\left(\alpha_i^k(y_i)\right)_{y_i \in Y_i, 1 \le i \le n}\right\}_{k=1}^{\infty}$ is korlátos, így Weierstrass tétele szerint kiválasztható belőle egy konvergens részsorozat. Ennek határértéke az optimális döntés (-függvény).

— Jegyezzük meg, hogy az optimális függvény(ek) létezéséhez felesleges a konkavitási feltétel, (elegendő, ha létezik $V(\eta)$-nál kisebb v, amelyre $|a| > r_v$ implikálja, hogy $U(y, a) < v$); a továbbiakban viszont már nem.

— Bármilyen α_1 (végeshozamú) döntésfüggvényből indulunk ki, algoritmusunk korlátos döntéssorozatot származtat. Elegendő tehát belátni, hogy $\{\alpha^m\}_{m=1}^{\infty}$ bármilyen konvergens részsorozata $\hat{\alpha}$-hoz tart. ($U(\cdot, y)$ szigorú konkavitása miatt $\hat{\alpha}$ egyértelmű!)

Tekintsünk egy $\{\alpha^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergens részsorozatot, s jelöljük határértékét $\bar{\alpha}^1$-gyel. Szükségünk lesz arra az egyszerű észrevételre, hogy legalább egy i-re $(1 \le i \le n)$ m_k-t n-nel osztva végtelen sokszor i-t kapjuk „maradékul". Hagyjuk el a részsorozat többi tagját, s válasszunk olyan indexelést, melyre $i = 1$.

— Alkalmazzuk algoritmusunkat $\bar{\alpha}^1$-re, s kezdjük a ciklust az első változónál, s fejezzük be az utolsónál: $\bar{\alpha}^1 \to \bar{\alpha}^2 \to \ldots \to \bar{\alpha}^i \to \ldots \to \bar{\alpha}^n$. Ha belátjuk, hogy mind az n döntésfüggvény azonos, akkor az előzőkből tudjuk, hogy $\bar{\alpha}^1$ Nash-optimum, azaz abszolút optimum.

$U(\cdot, a)$ folytonosságából és Y végességéből következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha^{m_k} = \bar{\alpha}^1$ ekvivalens m$\alpha^{m_k+1} = \bar{\alpha}^2$-vel. A folytonosság miatt $\lim\limits_{k\to\infty} V[\eta, \alpha^{m_k}] = V[\eta, \bar{\alpha}^1]$ ill. $\lim\limits_{k\to\infty} V[\eta, \alpha^{m_k+1}] =$ $= V[\eta, \bar{\alpha}^2]$. Másrészt $\left\{V[\eta, \alpha^m]\right\}_{m=1}^{\infty}$ monoton korlátos sorozat, tehát két részsorozatának határértéke azonos: $\lim\limits_{k=\infty} V[\eta, \alpha^{m_k}] = \lim\limits_{k=\infty} V[\eta, \alpha^{m_k+1}]$ Az előző összefüggések szerint $V[\eta, \bar{\alpha}^1] = V[\eta, \bar{\alpha}^2]$

Értelemszerűen teljesülnek a következő egyenlőségek is: $V[\eta, \bar{\alpha}^i] = V[\eta, \bar{\alpha}^{i+1}]$, $1 \le i \le$ $\le n - 1$, azaz $\bar{\alpha}^1 \bar{\alpha}^2, \ldots, \bar{\alpha}^i, \ldots, \bar{\alpha}^n$ hozama azonos, vagyis azonosak a döntésfüggvények. Ezzel befejeztük a bizonyítást.

3. *Radner optimalitási feltétele*

Visszatérünk az optimalitási feltétel kérdéséhez. R. Radner [17] alapvető tételét ismertetem ebben a pontban.

Tétel: Tegyük fel, hogy $V(\eta)$ véges, $W(x, a)$ konkáv függvénye a-nak. Legyen $\tilde{\alpha}$ olyan döntésfüggvény, melyre $V[\eta, \tilde{\alpha}]$ véges; továbbá ha $V[\eta, \alpha + \delta]$ véges, akkor legyen olyan χ_δ pozitív szám, hogy $|h| < \chi_\delta$ esetén $V[\eta, \alpha + \langle h\rangle\delta]$ is véges. ($\langle h\rangle = \langle h_i\rangle_{i=1}$ diagonális mátrix.)

$$\text{Ekkor } \frac{\partial}{\partial a_i} M\left(W\{x, \tilde{\alpha}_1[\eta_1(x)], \ldots, a_i, \ldots, \tilde{\alpha}_n[\eta_n(x)]\} \mid y_i\right)\Big|_{a_i=\tilde{\alpha}_i(y_i)} \qquad (1 \le i \le n)$$

létezik és 1 valószínűséggel pontosan akkor nulla, ha $\tilde{\alpha}$ optimális. (Stacionaritási feltétel.)

Megjegyzések:

— Ez a tétel szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy döntésfüggvény mikor optimális. Viszont nem biztosítja — mert nem is biztosíthatja — az optimum létezését ill. egyértelműségét.

— A feltételben szereplő bonyolult végességi feltétel nélkül a tétel nem igaz, mint azt Radner ellenpéldája bizonyítja.

— A tétel ún. *stacionaritási feltétele* általában egy bonyolult (ún. integrál-) egyenletrendszert jelent az optimális döntésfüggvényre. Ha további feltevéseket teszünk pl. a nyereségfüggvény alakjára (ti. a döntéstől lineárisan vagy kvadratikusan függjön), akkor a stacionaritási feltételből érdekes következtetéseket vonhatunk le. Tovább egyszerűsíthetjük a problémát, ha a szereplő valószínűségi változóról kötünk ki valamit: pl. azt, hogy véges állapotú vagy normális eloszlású (l! a következő részben).

— Ismét látható, hogy az optimális döntésfüggvényt központilag határozzák meg — csak így határozható meg — s az i. tag $\hat{\alpha}_i$ szerint köteles „dönteni".

— Az összehasonlítás kedvéért említsük meg, hogy az általános információ fogalomnak megfelelő stacionaritási feltétel a következő:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} U_i(y_i, \tilde{\alpha}_1, \ldots, a_i, \ldots, \tilde{\alpha}_n) =$$

$$= \int\limits_{\times_{j\neq i} Y_j} \frac{\partial}{\partial a_i} U[y, \tilde{\alpha}_1(y_1), \ldots, a_i, \tilde{\alpha}_n(y_n)]\, h(y) \prod_{j\neq i} dy_j = 0$$

E tétel az 1. pont alaptételének „erős" változata.

Bizonyítás: A teljes bizonyítás hosszú és bonyolult, itt csak a gondolatmenetet vázoljuk. A tétel bonyolult, de természetes végességi feltételei a várható értékképzést, és a differenciálással történő felcserélhetőségét biztosítják. Véges eseménytér esetén ezek a problémák teljesen leegyszerűsödnek — eltűnnek. A szokásos variációs gondolatmenetet alkalmazzuk. Rögzítsük egyelőre δ-t, s vezessük be $\varphi(h) = MW\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)] + \langle h\rangle\delta[\eta(x)]\}$-t. A feltételek miatt φ h-ban konkáv és differenciálható, s a konkavitás miatt lokális optimum = globális optimum. Azaz $\left.\frac{\partial}{\partial h}\varphi(h)\right|_{h=0} = 0$. Egyszerű számolással

$$0 = \frac{\partial}{\partial h_i}\varphi(0) = M\frac{\partial}{\partial h_i}W\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)] + \langle h\rangle\,\delta[\eta(x)]\} =$$

$$= M\left\{\delta_i[\eta_i(x)\frac{\partial}{\partial a_i}W\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)]\}\right\}.$$

Legyen $\delta_i^0(y_i^0) = 1$, ahol y_i^0 *tetszőleges*, de fix, és $\delta_i^0(y_i) = 0$ ha $y_i \neq y_i^0$. Tehát δ_i^0 eltérést alkalmazva, $\frac{\partial}{\partial a_i}M(W\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)]\}\,|\,y_i^0) = 0$ összefüggést nyerjük. Az átalakítások ekvivalensek voltak, s a lánc két végén a tétel szerinti két ekvivalens állítás áll. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

V. A kvadratikus team

A lineáris összefüggések után a kvadratikus összefüggések a legegyszerűbbek, a legalapvetőbbek a matematikában. Ezért nem meglepő, hogy a teamelmélet is többnyire ezeket az eseteket tanulmányozta. A lineáris nyereségfüggvényű team problémái a lineáris programozásra vezethetők vissza. Ez a kapcsolat már a bevezető példából is sejthető; az általános problémával azonban nem foglalkozunk. Lásd: [3], [4], [8], [15].

A kvadratikus eset bonyolultabb, de megvan az az előnye, hogy a döntések korlátozása már beleérthető. (vö. III. 2.)

Kvadratikus nyereségfüggvényen $W(x, a) = \mu(x)\,a - \frac{1}{2}a\,Q(x)\,a$ alakú függvényt értünk. $W(x, a)$ szigorú konkavitása a-ban ekvivalens $Q(x)$ pozitív definitségével.

1. *Általános tételek*

Az előző részekben elmondottakat alkalmazzuk most néhány problémára. Bővebben [16] és [17] foglalkozik a következő három ponttal — ott találhatók a bizonyítások is.

Néhány alapvető tételt sorolok fel:

— Radner [17]-ben egyszerű és kezelhető végességi feltételt ad, amely szükséges és elégséges *az* optimális döntésfüggvény létezéséhez.

— Ugyanitt a stacionaritási feltétel végességi feltételeit egy erősebb, de használhatóbb feltétellel helyettesíti, amely állandó $Q(x) = Q$ esetén triviálisan teljesül.

— Stacionaritási feltételünk konkretizálható:

$$\hat{\alpha}_i[\eta_i(x)]\cdot M[q_{ii}(x)\,y_i] + \sum_{j\neq i} M\{\hat{\alpha}_j[\eta_j(x)]\,q_{ij}(x)\,|\,y_i\} = M\{\mu_i(x)\,|\,y_i\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Most már feltehetjük, hogy a stacionaritási feltételt *egy* döntésfüggvény elégíti ki — az optimális döntésfüggvény.

— A stacionaritási feltételből egyszerűen következik, hogy $M\mu\hat{\alpha} = M\hat{\alpha}Q\hat{\alpha}$, azaz $\hat{V}(\eta) = \frac{1}{2}M\,\mu\hat{\alpha}$.

— Ha μ normális és η lineáris függvénye μ-nek, akkor $\hat{\alpha}_\eta$ is lineáris függvénye η-nak: $\alpha_i(y_i) = b_i y_i$, ahol b_i a megfelelő állandó vektor.

2. *Néhány tétel az alapstruktúrákról*

A legegyszerűbb struktúrák optimális döntésfüggvényét és értékét elemezzük az előző pontra támaszkodva. (Ld.[16])

A teljes kommunikáció esetében $\hat{\alpha}(y) = M\{Q^{-1}(x)\mu(x)|y\}$
speciálisan a teljes információnál $\hat{\alpha}(x) = Q^{-1}(x)\mu(x)$
és a rutinnál $\hat{\alpha} = MQ^{-1}(x)\mu(x)$

Ha μ_i-k függetlenek, akkor bármely blokkstruktúra döntésfüggvénye „egyszerű" blokk-döntésfüggvényekből áll. Pontosabban: legyen I_k valamilyen blokk indexhalmaza. Legyen $\alpha_{I_k} = (\alpha_i)_{i \in I_k}$, $Q_{I_k}^{-1} = (q_{ij})_{ij \in I_k}^{-1}$ stb. Ekkor: $\hat{\alpha}_{I_k}(\mu_{I_k}) = Q_{I_k}^{-1}\mu_{I_k}$. A teljes decentralizálás esetében $I_k = \{k\}$, azaz $\hat{\alpha}_k(\mu_k) = q_{kk}^{-1}\mu_k \quad (1 \leq k \leq n)$.

Ezeknél a struktúráknál η lineárisan függ μ-től, és az optimális döntésfüggvény lineáris bármilyen eloszlású valószínűségi változó esetén.

A „kivételek közlésé"-nél is érvényes ez az összefüggés, azzal a kiegészítéssel, hogy az indexhalmazok is függnek a Külvilág véletlen állapotától.

Bonyolultabb a kép az „információ terjesztésé"-nél, de itt is érvényes a szuperpozíció elve: a döntésfüggvény első tagja a teljes kommunikáció optimális döntésfüggvénye, a második tag a teljes decentralizálás optimális döntésfüggvényéhez kapcsolódik.

A kombinált struktúrák értéke is az alapelemek értékének lineáris kombinációja.

Ha a struktúrák bruttó értékeit hasonlítjuk össze, nem jutunk túl messze: nyilván a finomabb struktúra értéke nagyobb. Nagyobb viszont az itt elhanyagolt struktúra-költség is (l! III. 5.). Ezért normáló feltevéseket teszünk az összehasonlításoknál.

Mennél kevesebb paramétert használunk, annál egyszerűbb az összehasonlítás. Tegyük fel, hogy Q ún. kereszthatás-mátrix diagonális elemeinek értéke 1, a többi elem értéke q. Hasonlóan μ pozitív szemidefinit covariancia-mátrixára: $M\mu_i = 0$, $D^2\mu_i = s > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ és $M\mu_i\mu_j = r$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$. Q pozitív definitsége $- 1 + (n-1)q$ és $1 - q$ sajátértékek pozitivitása miatt $-\dfrac{1}{n+1} < q < 1$ korlátozással ekvivalens. Nyilván $-\dfrac{1}{n-1} \leq \dfrac{r}{s} \leq 1$. Asszimptotikusan: $0 \leq q < 1$ és $0 \leq \dfrac{r}{s} \leq 1$.

Illusztrációképp a következő összefüéggseket említjük a struktúrák értékére vonatkozóan:

— teljes információnál $\hat{V}_n \sim \dfrac{n(s-r)}{2(1-q)}$

— teljes decentralizációnál

— ha μ normális eloszlású és $qr \neq 0$,

akkor $\hat{V}_n \sim \dfrac{1}{2qr}$

— ha $q = 0$ vagy μ_i-k függetlenek, akkor $V_n \sim \dfrac{ns}{2}$.

Célszerű olyan struktúrákat összehasonlítani, ahol a struktúra-költségeket is figyelembe vesszük. A „Team-Elmélet" különböző blokk-struktúrákat hasonlít össze, de úgy, hogy kiköti, hogy a tagszámon kívül az átlagos csoportnagyság is közös. Ezzel utal a költségek hozzávetőleges azonosságára. Három struktúrát hasonlít össze:

1. azonos nagyságú csoportok
2. (egy vagy) több egytagú csoport és egy többtagú csoport
3. a kivételek közlése

Kiemeljük, hogy a 3. struktúra csoportnagyságai függnek a Külvilág véletlen állapotától. Itt az átlagos csoportnagyság várható értékét rögzítjük. Az összehasonlítást az említett teljesen szimmetrikus esetben végezzük el. A számítások szerint a struktúrák fenti sorrendje értékük szerint növekedő sorrend. Ez nem meglepő, hiszen normáló feltevésünk látnivalóan kedvez a centralizációnak.

3. *A hibák szerepe*

Mind elméletben, mind gyakorlatban fontos a hibák vizsgálata. Három esetet különböztetünk meg — aszerint, hogy hol történt a hiba:

1. a megfigyelésnél
2. az utasításnál
3. a végrehajtásnál

A hibavektor is sztochasztikus, komponensei függetlenek; a hibavektor független az által eltorzított valószínűségi vektor változótól. A hiba additív. A számíthatóság érdekében feltesszük, hogy a változók normális eloszlásúak. Az 1. és a 3. eset nem túl érdekes — egyszerű kiegészítések szükségesek csak. Érdekes viszont a 2. eset, amit célszerű úgy elképzelni, hogy a teljes információ esete áll eredetileg — a hiba nélkül —, és a Központ nem a Külvilág tényleges állapotát közli az egyes tagokkal, hanem a végrehajtandó optimális döntés megfelelő komponensét. Amíg a Központtól az utasítás az egyes tagokhoz ér, hiba adódik hozzá. Ezt ellensúlyozandó, a Központ nem az igazi optimális döntést közli, hanem olyan korrigált utasítást, amely a torzulás *után* a lehető „legközelebb" kerül az optimális döntéshez. Érdemes kiemelni, hogy még akkor is célszerű az *összes* utasítás-függvényt az optimális döntésfüggvénytől eltérően választani, ha *nem mindenkinél* fordulhat elő hiba!

Teljes specializálás után most is elvégezhetjük e három eset összehasonlítását. A „Team-Elmélet" az eredeti valószínűségi változó és a hiba szórásának hányadosát rögzítette. A számítások azt mutatják, hogy fentebb érték szerint csökkenő sorrendben írtuk le a struktúrákat. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy mennél távolabb van a hiba a végrehajtástól, annál jobban korrigálható. Ennek hangsúlyozására vontam be a vizsgálat körébe a 3. esetet, melyet a „Team-Elmélet" nem említ.

4. *Néhány további probléma*

Eddig Marschak és Radner könyvének első hat fejezetét ismertettük — bizonyos kérdésekre összpontosítva. Az egyes részek címei nagyjából megfelelnek a könyv egyes fejezet-címeinek. Mielőtt tovább mennénk, újra gondoljunk arra, hogy az előző három pont tételei, gondolatai kvadratikus és konkáv esetre szólnak, többségük nem is vihető át más esetre!

Most távirati stílusban még néhány sort a könyv további fejezeteiről.

A könyv VII. fejezete: *Team — dinamikus környezetben.* Eddigi tételeink is alkalmazhatók diszkrét idő esetén, mert egy valódi tag különböző idejű információit és döntéseit több formális tag „időtlen" információjának és döntésének tekinthetjük. Képletben: $n = NT$; $1 \leq i \leq N$; $1 \leq t \leq T$; $\eta_i = (\eta_{it})_{t=1}^{T}$; $\eta = (\eta_i)_{i=1}^{N}$. stb. Új eredményekhez azonban csak akkor jutunk, ha érvényesítjük az idő sajátosságait: pl. feltesszük, hogy $\{\mu_t\}$ *valószínűségi változó-sorozat valamilyen sztochasztikus folyamat.* A „Team-Elmélet" ún. Markov-lánccal ill. ún. autóregresszív folyamattal foglalkozik. (Az idevágó fogalmak magyarul megtalálhatók [1]-ben.) Pl. Modellünkben most már az információ-tárolás költsége is explicite megjelenik: (i, t_1) „tag" (i, t_2) „tag"-hoz irányított közlésének költsége mutatja, hogy az i. tagnak mennyibe kerül a t_1-ben rendelkezésre álló információ megőrzése t_2-ig: $(1 \leq t_1 < t_2 \leq T)$. A szerzők egyszerű nyereségfüggvényekre szorítkoznak, de így is érdekes összefüggéseket bizonyítanak az *információ-késés* hatásáról és az *információ-teljességgel* való kapcsolatáról. Gyakran teljesül, hogy mennél tovább dolgozzuk fel az információt, annál többet tudunk meg, viszont a késés miatt relatíve annál jobban elavul. A szerzők „aranyszabályt" adnak a komplex optimalizálásra.

A „*Hálózatok*"-kal foglalkozó VIII. fejezet általánosítja az eddig használt modellt. Keresztmetszeten kívül hosszmetszetet is vizsgál explicite is. Konkrét eredményt azonban csak egészen speciális esetben érnek el, de azt is hosszas számolással. (Pl. olyan hálózatot mutatnak be, ahol célszerűbb a rutin, mint a hibákat rejtő teljes információ használata.)

Az utolsó három fejezettel itt nem foglalkozom.

VI. A team-elmélet és a rokon elméletek viszonya

Dolgozatom utolsó részében a team-elmélet és a rokon elméletek viszonyáról szólnék egészen röviden.

1. A kérdés formális, matematikai vonatkozására Marschak és Radner azt válaszolja, hogy *a team-elmélet a játékelméletnél speciálisabb, a statisztikus döntésfüggvények elméleténél általánosabb.* Ugyanis a team-elméletben a team-tagok teljes egységben játszanak a Külvilág nevű „játékos" ellen, s a statisztikus döntésfüggvények elméletében a team egy tagból áll.

A pontosság kedvéért említem, hogy mind a statisztikának, mind a játékelméletnek többféle irányzata létezik jelenleg, melyek lényegesen különböznek. Mindenesetre Radner [17] alapvető dolgozatának team-modellje tényleg magábanfoglalja a statisztikát.

2. A team-elméletnek tartalmi vonatkozásban elég sok rokona van. De először egy általános problémát tisztázunk: „A team gazdasági elmélete" c. könyv szerzői a „gazdasági" jelzővel arra utalnak, hogy elméletükben a team *korlátozott lehetőségeket optimálisan használ ki.* Tehát alkalmazási köre bővebb a szokásos értelemben vett gazdasági életnél ill. a közgazdaságtannál — hasonlóan a statisztikus döntésfüggvények elméletéhez.

A team-elmélet *normatív* elmélet, nem deskriptív. A szerzők ezt annyiban tekintik előnyösnek, amennyiben elméletük segít létező szervezetek munkájának javításában ill. új szervezetek létrehozásában. Viszont létező szervezetek, team-ek munkájának *megértésénél* hátrányos az elmélet normatív felfogása és gyakran közelítésként sem engedhető meg.

Ismertetett team-modellünkhöz elég közel állnak egyes *rendszerelméleti* vállalat-modellek. (Johnson—Kast—Rosenzweig: „A rendszerelmélet és a vállalatvezetés" [5].) A komplex szemlélet, az információs és a döntési struktúra együttes optimalizálása emeli a team-elméleti modellt a régebbi üzemgazdasági modellek fölé. (Hax i. m.)

Mit nyújthat a közgazdaságtannak a team-elmélet? Homogén gazdasági szervezetek információs-döntési rendszerének közelítő matematikai vizsgálatát. Sőt, ha képesek lennénk annak tárgyalására, hogy az egyes tagok érdekei nem azonosak, akkor bármilyen gazdasági egységre kiterjeszthetnénk vizsgálatainkat.

Az információs-döntési rendszer gyakorlati fontosságát felesleges hangsúlyozni. Viszont rá kell mutatnunk az elmélet, s különösen a matematikai közgazdaságtan mulasztásaira. Kornai János „Anti-Equilibrium" c. könyvében [6] az általános egyensúlyelmélet bírálatánál — többek között — a következőket állapítja meg:

Az általános egyensúlyelmélet túlzottan leegyszerűsíti az anyagi folyamatok, a reál-szféra modelljét — többek között eltekint a gazdaság sztochasztikus természetétől. Ennek megfelelően a gazdasági szabályozó- (információs-, döntési- stb. = irányítási) szféra modellje fokozottan leegyszerűsödik — a valósággal gyökeresen szembefordulva. A team-elmélet viszont a valóság sztochasztikus jellegéből indul ki, s elsősorban az irányítási szférát vizsgálja. Tegyük hozzá mindjárt, hogy a team-elmélet jelenleg fejletlenebb az általános egyensúlyelméletnél; pl. a létező team-modellek túlnyomó többsége statikus, gazdaságilag rosszul interpretálható stb.

Mégis találunk olyan statikus modellt, amelyben a team-elmélet megszüntetve-megőrzi az általános egyensúlyelméletet — Radner „Versenyzői egyensúly bizonytalanság mellett" (1968.) [18] dolgozatára gondolhatunk, melyre Kornai bírálatában szintén hivatkozik. Radner először team-elméleti nyelven általánosítja a „versenyző egyensúly" Arrow—Debreu modelljét és alaptételét [2]. Aztán egy példán mutatja be, hogy a Külvilág sztochasztikus volta és a gazdasági egységek döntési képességének korlátozottsága (= az információs és döntési ráfordítások létezése) miatt bizonyos konkavitási feltételek érvényüket vesztik, s az egyes tagok döntési önállósága is megszűnik, a pénz explicite is megjelenik, azaz az általános egyensúlyelmélet lényeges részei ellentmondásba kerülnek egy reálisabb, általánosabb modellel.

3. A team-elmélet erős feltevései (közös cél, speciális függvények stb.) miatt is kevés alkalmazás ismeretes az irodalomban. Beckmann 1958-ban írt [2] dolgozata „A repülőgépjegy eladásánál fellépő döntési és team-problémákkal" foglalkozik; Mac Guire „Az eladási szervezetek néhány team-modelljét" vizsgálta 1961-ben [8]. Az alkalmazás fejletlenebb az elméletnél.

Érdekesnek és hasznosnak látszik hálózattal rendelkező gazdasági szervezetek team-elméleti vizsgálata: pl. a vasúti helyjegy-rendszer vagy a bankrendszer hálózat elemzése.

(Beérkezett: 1970. július 13.)

IRODALOM

[1] ARATÓ, M.: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. (soksz.) Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa. 1968.

[2] ARROW, K. J.—DEBREU, G.: Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica, 1954. 22. sz. 265—290. o.

[3] BECKMANN, M.: Decision and Team Problems in Airline Reservations. Econometrica, 1958. 28. sz. 134—145. o.

[4] Hax, H.: Döntések koordinálása. Adalék az üzemgazdasági szervezéstanhoz. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 309 p.
[5] Johnson, A. R.—Kast, F. E.—Rosenzweig, J. E.: A rendszerelmélet és a vállalatvezetés. Rendszerelmélet. Válogatott tanulmányok. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
[6] Kornai, J.: Anti-Equilibrium. Kézirat. 1969.
[7] Luce, R. D.—Raiffa, H.: Games and Decisions. New York—London, 1958.
[8] MacGuire, C. B.: Some Team Models of a Sales Organization. Management Science, 1961. 7. sz. 101—130. o.
[9] Marschak, J.: Towards an Economic Theory of Organization and Information. Trall, Coombs, and Davies — Decision Processes. New York, 1954. Wiley.
[10] Marschak, J.: Efficient and Viable Organizational Forms.
Haire, M.: Modern Organization Theory, New York, 1954. Wiley.
[11] Marschak, J.: The Pay-off-Relevant Description of States and Acts. Econometrica, 1963. 31. sz. 179—726. o.
[12] Marschak, J.—Radner, R.: The Economic Theory of Teams. Kézirat. 1968.
[13] Marschak, T. A.: Computation in Organizations: The Comparison of Price Mechanism and Other Adjustment Process. Working Paper No. 156. Center for Research in Management Sciences. University of California, Berkeley, 1966.
[14] von Neumann, J.—Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, 1944. Princeton University Press. 641 p.
[15] Radner, R.: The Linear Teams: An Example of Linear Programming under Uncertainty. Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, Washington, D. C. 381—396. o.
[16] Radner, R.: The Evaluation of Information in Organizations. Berkeley, 1961. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Probability and Statistics. University of California Press. Vol. 1. 491—530. o.
[17] Radner, R.: Team Decision Problems. Annales of Mathematical Statistics, 1952. 33. sz. 857—881. o.
[18] Radner, R.: Competitive equilibrium under uncertainty. Econometrica, 1968. 36. sz. 31—58. o.
[19] Rényi, A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó. 510 p.
[20] Savage, L. J.: The Foundations of statistics. New York, 1954. Wiley.
[21] Wald, A.: Statistical Decision Functions. New York, 1950. Wiley.

Helyreigazítás: A III. évfolyam 2. számban a szerzők felsorolásánál MARÓTI LÁSZLÓ munkahelyét tévesen közöltük. Helyesen: DATORG Külkereskedelmi Adatfeldolgozó és Szervező Rt.