Szabó István—Szolnoky Antal

Az ERALL-2 hálótechnikai algoritmus

1. Bevezetés

A hálótechnikai módszerek alkalmazása rohamosan terjedt el az egész világon, elsősorban nagy vállalkozások szervezésénél és egyedi termékek, így építőipari termékek gyártásának programozásánál. Már kezdetben nyilvánvalóvá vált, hogy a hálótechnikai módszerek a naptári ütemtervek készítésénél, a koordinációs kapcsolatok felderítésénél a műszaki és gazdasági vezetésnek könnyen elsajátítható és hatékony eszközei.

A kezdeti alkalmazásoknál ugyanakkor kiderült, hogy nem elegendő a hagyományos CPM, illetőleg PERT matematikai apparátus használata. A *műszaki* kritikus út mellé belépett a *gazdasági* kritikus út fogalma. Egyáltalában nem bizonyos, hogy figyelmünket a műszaki kritikus útra kell fordítani, azaz arra az útra, amelyen a feladat megkezdésétől a feladat befejezéséig összességükben a leghosszabb időigényű tevékenységek feküsznek. Amennyiben feladatunkat korlátos erőforrásokkal kell megvalósítanunk — és a gyakorlatban mindig ez a helyzet —, nagyon gyakori, hogy a műszakilag párhuzamosan végezhető tevékenységeknek csak egy részét tudjuk egyidejűleg — vagy a kívánt intenzitással — erőforrásokkal kielégíteni és figyelmünket a műszaki kritikus útról a domináló gazdasági kritikus útra kell fordítani. A gazdasági kritikus út a műszakitól időről időre eltérhet, hol az egyik erőforrás, hol a másik válik szűkössé.

Akár arra keresünk választ, hogy szűkös erőforrásainkkal mikorra tudjuk feladatunkat teljesíteni, akár arra, hogy mikor és milyen erőforrásokat kell kibővítenünk a befejezés előrehozatalához, az erőforrások korlátossága erősebben hathat ki tervünkre, mint a műszaki kritikus út.

Különösen fontos tehát az erőforrások matematikai kezelése munkaerőhiánnyal küzdő társadalmunkban. De világszerte egyre nagyobb figyelmet fordítanak erre a kérdésre, és ez vezetett az erőforrásokat allokáló módszerek kidolgozásához. Az eddig kidolgozott módszerek mind hálótechnikára támaszkodó heurisztikus eljárások és még nem ismerünk olyan matematikai módszert, amely e kérdést a gyakorlatban egzaktul megoldaná.

Mi ennek az oka? A probléma elméletileg egzakt algoritmussal is megoldható, algebrai struktúrákként felírható. Miért alakultak ki mégis az egzakt matematikai módszerek helyett heurisztikus, illetőleg szimulációs eljárások? Két okot említhetünk:

1. A feladat típusát tekintve nem ismerünk olyan egzakt módszert, mely közös feltételekkel összekötött, de gazdasági célkitűzéseiben eltérő optimálási feladatokat old meg egyidejűleg. Pl. egy építőipari vállalat termelésének átfogó programozásánál közös feltételrendszert képeznek az erőforrások. Ugyanakkor a vállalat több száz terméknél más-más gazdasági célt tűzhet ki, mint például

— egyes objektumok rohamütemben készüljenek,
— egyes objektumok az előírt befejezési határidőre készüljenek el,
— egyes objektumok minimális költséggel létesüljenek,
— egyes objektumok egyenletesen vegyék igénybe az erőforrásokat.

2. A másik ok, ami miatt heurisztikus eljárásokat dolgoztak ki, gazdasági természetű. Többek között:

a) A memóriaigény kérdése.

Heurisztikus algoritmus esetén kevés információból eldönthető, hogy a lebegéssel bíró tevékenységek elhelyezhetők-e és ezért kicsi a memóriaigény.

Egzakt eljárás esetén az összes lehetséges elhelyezési variánst, illetőleg azok képzési szabályait inputként kellene kezelni. Ennek amúgy is nagy memóriaigénye még többszöröződik a megvalósítási intenzitások variánsaival is.

b) A számítási idő kérdése.

Heurisztikus eljárásoknál az iterációk száma előre jól meghatározható, és általában egyenlő a programozási időegységek számával.

Egzakt eljárásoknál az iterációk száma nehezen becsülhető, de az bizonyos, hogy sok nagyságrenddel nagyobb.

Bár összehasonlításra a gépidő-szükséglet szempontjából — tudomásunk szerint — még nem került sor, nyilvánvaló, hogy ha rendelkeznénk is egzakt eljárással, alkalmazása nem lenne gazdaságos.

Ilyen heurisztikus módszer az ERALL-2 nevű eljárás, melyet elsősorban az építőipar számára dolgoztunk ki. Ez matematikailag egy szélsőértékszámítási feladat, melyben a tevékenységek olyan ütemezését (az erőforrások időbeli elosztását) keressük, amelyik minimálissá teszi a teljes átfutási időt és egyben figyelembe veszi az adott szervezet erőforrásainak korlátozottságát. Az eljárást a gyakorlatban már hosszabb ideje alkalmazzák, de eddig csak a speciális gépi program korlátainak figyelembevételével publikáltuk [3].

Felmerült az igény az eljárás olyan leírására, mely a feladat matematikai modelljét és megoldó algoritmusát a gépi megoldástól függetlenül ismerteti. Ezzel foglalkozunk cikkünk további részében.

2. Hálótechnikai bevezető

A háló fogalma az algebra elemeiből jól ismert. Az ERALL-eljárás a hálók egy speciális osztályára épül, ezért legelőször ennek ismertetésével foglalkozunk.

2.1. Legyen P' egy $(n+1)$-elemű részben rendezett halmaz, s jelöljük ennek elemeit a $0, 1, \ldots, n$ számmal, azaz $P' = \{0, 1, \ldots, n\}$. A részleges rendezést megszabó relációt nevezzük „közvetlen megelőzési reláció"-nak; legyen a jele: $\lessdot$. E közvetlen megelőzési reláció a következő három tulajdonságnak tegyen eleget:

2.1.1. Semelyik $w \in P'$ elemre nem igaz a következő két állítás egyike sem: $w \lessdot 0$, $n \lessdot w$.

2.1.2. Bármely $w \neq 0$ $(w \in P')$ elemre igaz, hogy
vagy $0 \lessdot w$,
vagy létezik egy vagy több w_i elem $(w_i \in P')$, hogy $0 \lessdot \ldots \lessdot w_i \lessdot \ldots \lessdot w$, és hasonlóan bármely $w \neq n$ $(w \in P')$ elemre igaz, hogy vagy $w \lessdot n$, vagy létezik egy vagy több w_j elem $(w_j \in P')$, hogy $w \lessdot \ldots \lessdot w_j \lessdot \ldots \lessdot n$.

2.1.3. Egyetlen $w \in P'$ elemhez sem találunk olyan w_k ($w_k \in P'$) elemeket, hogy $w \leqslant \ldots \leqslant w_k \leqslant \ldots \leqslant w$ fennálljon.

2.2. A 2.1.1.–2.1.3. feltételeket kielégítő P' halmazt „*kaszkádszerű háló*"-nak, elemeit *esemény*eknek nevezzük.

Válasszuk meg i-t és j-t ($i \in P', j \in P'$) úgy, hogy $i \leqslant j$ esetén $i < j$ legyen. Könnyen belátható, hogy a 2.1.1.–2.1.3. teljesülése esetén ez (nem feltétlenül egyértelműen) mindig megvalósítható. Az ily módon két különböző számhoz tartozó $<$ reláció tranzitív és így a hálóaxiómák teljesülnek.

Legyen $i \in P'$, $j \in P'$, továbbá $i \leqslant j$. Tekintsük az (i, j) alakú elempárok halmazát; legyen ez P. (P-re tehát áll: $P \subset P' \times P'$.) P elemeit tevékenységeknek nevezzük. Az (i, j) és (j, k) tevékenységekhez az $i \leqslant j$, $j \leqslant k$ relációk összekapcsolása egy $(i, j) \leqslant (j, k)$ részben rendezési relációt definiál. A

$$P^* = P' \cup P$$

halmazt „hálóterv"-nek nevezzük. Egy hálótervet tehát az események és tevékenységek olyan halmaza képez, melyben minden tevékenységet egyértelműen meghatároz két esemény és fordítva, minden esemény egyértelműen megadható két vagy több tevékenység segítségével.

2.3. A 3.-ban leírt ütemezés lényegét nem érinti, de egy további fontos kapcsolat is fennállhat az egyes tevékenységpárok között. A (h, i) és (i, j) között ugyanis olyan kapcsolat is lehetséges, hogy az (i, j) tevékenység gyakorlati megvalósításának nem előfeltétele a (h, i) tevékenység *teljes* megvalósítása, vagyis a $(h, i) \leqslant (i, j)$ kapcsolat nem áll fenn szükségszerűen. Viszont a (h, i) tevékenységet egy *fiktív* h^* esemény segítségével felbonthatjuk egy (h, h^*) és (h^*, i) tevékenységpárra úgy, hogy

$$(h, h^*) \leqslant (h^*, i) ,$$

és

$$(h, h^*) \leqslant (i, j) ,$$

e lehetőséget azonban az ütemezés során nem kötelező kihasználni (míg a közvetlen rákövetkezés relációját minden esetben érvényesíteni kell!). E kapcsolatot *átlapolás*nak nevezzük, és a $-\!\!\leqslant$ jellel jelöljük.

A $(h, i) -\!\!\leqslant (i, j)$ reláció is részleges rendezést valósít meg, egyes elemek összehasonlíthatók, mások nem.

Az átlapolás a továbbiakban csak a CPM időszámítás lépéseit módosítja, ennek részletes taglalásával a [2]-ben találkozhatunk.

3. A modell változói és paraméterei, a feladat megfogalmazása

3.1. A 2.-ben bevezettük azt a P^* halmazt, melyen értelmezzük a feladatot. P^* a gyakorlatban egy tényleges szervezet (pl. építésvezetőség) munkavégzéseit jelenti: a tevékenységek az egyes munkák (pl. falazás), az események pedig a munkák bizonyos mennyiségének befejezése utáni állapotot (pl. pincefödém elkészülte) jelentik. Most a P^* elemeihez hozzárendelünk néhány, a további tárgyaláshoz szükséges paramétert és változót. Először is legyen a feladat független változója az idő: t, ahol is

$$t = 0, 1, 2, \ldots$$

Legyen értelmezve a feladatban egy véges A halmaz, melynek $a \in A$ elemeit *erőforrás*oknak nevezzük.

Minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez hozzárendeljük a következő konstansokat:

3.1.1. $$K(i, j);\quad a_k;\quad M_{ij}^k \qquad (k = 1, \dots, K(i, j)),$$

ahol $K(i, j)$ megmutatja, hogy az (i, j) tevékenységhez ténylegesen hány elemet rendeltünk az A halmazból. (Egy elemet esetleg többször is hozzárendelhetünk); a_k a k-ik hozzárendelt erőforrás $(a_k \in A)$.

Minden M_{ij}^k-ra

$$M_{ij}^k \geq 0,$$

M_{ij}^k neve: *munkamennyiség*. Jelentése: általában az egységnyi erőforrás (1 fő, 1 gép) által a tevékenység elvégzéséhez szükséges idő (munkaóra/fő stb. jellegű mennyiség).

3.1.2. $$\underline{c}_{ij}^k, \text{ ill. } \bar{c}_{ij}^k$$

ezen értékeket *alsó*, illetve *felső lokális erőforráskorlátoknak* nevezzük, és fennáll, hogy

$$0 < \underline{c}_{ij}^k \leq \bar{c}_{ij}^k$$

Ezek jelentése: az (i, j) tevékenységhez egy-egy időegységben a k-iknak hozzárendelt a_k erőforrásból allokálható minimális, ill. maximális mennyiség.

3.2. A 3.1.1.—3.1.2.-ben bevezetett mennyiségekről feltesszük, hogy egész számok. Legyen továbbá értelmezve minden $a \in A$ elemhez egy

$$C^a(t)$$

változó, amelyre érvényes, hogy

$$C^a(t) \geq \max \bar{c}_{ij}^a,$$

(ahol a az erőforrás fajtájára utal), e mennyiség is egészszámú változó, neve: *globális erőforráskorlát*.

3.3. A 3.1.1.-ben bevezetett M_{ij}^k értékek szerint az (i, j) tevékenységeket 2 csoportra osztjuk:

3.3.1. $$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^k > 0\,;$$

3.3.2. $$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^k = 0.$$

Ez utóbbi esetben vegyünk $K(i, j) = 1$-et és az $(i, j) \in P$ tevékenységhez hozzárendelünk még egy konstans egészértékű $t_{ij}^* \geq 0$ mennyiséget (ez a tevékenység elvégzéséhez szükséges idő mennyiségét jelenti), s ezzel a 3.3.2-ben felsorolt tevékenységek ismét 2 csoportba oszthatók:

3.3.2.1. $t_{ij}^* = 0$; ez esetben az $(i, j) \in P$ tevékenységeket *látszattevékenység*eknek nevezzük; jelöljük ezek halmazát R_L-lel.

3.3.2.2. $t_{ij}^* > 0$; — az ilyen tevékenységeket *időtevékenység*eknek (time-activity) nevezzük; jelöljük ezek halmazát R_T-vel. Érvényes, hogy

$$R_L \cap R_T = 0.$$

3.4. *A tevékenységek adatainak átalakítása*

Az egységes kezelés végett minden tevékenységhez vezessük be az N_{ij}^k értéket a következőképpen:

$$N_{ij}^k = \begin{cases} M_{ij}^k, & \text{ha } (i,j) \in P - (R_T \cup R_L) \\ 0, & \text{ha } (i,j) \in R_L \\ t_{ij}^*, & \text{ha } (i,j) \in R_T \end{cases}$$

Az értelmezésből következik, hogy N_{ij}^k értéke is egész szám; neve: „*módosított munkamennyiség*". Ennek segítségével elértük, hogy az R_L és R_T halmazok nem mutatnak különleges sajátságot a továbbiakban. Tegyük még meg, hogy ha

$$(i, j) \in R_L \cup R_T ,$$

akkor $\underline{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} = 1$ értéket veszünk. ($K(i, j) = 1$ miatt a felső indexre nincs szükség.) A 3.8-ban használt képlet szerint ekkor ugyanis a tevékenység tartama éppen egyenlő lesz a 3.3.2.2-ben hozzárendelt tartammal, és ezzel e képlet e tevékenységekre is közvetlenül érvényes lesz.

3.5. Legyen a feladat változója (akcióparamétere)

$$X_{ij}^k(t) \qquad (i, j) \in P;\ k = 1, \ldots, K(i, j)$$

egészértékű függvény; képezzük ennek segítségével az $M_{ij}^k(t)$ ún. „*aktuális munkamennyiség*"-et a következőképpen:

$$M_{ij}^k(t) = N_{ij}^k - \sum_{t'=0}^{t-1} X_{ij}^k(t')$$

3.6. Az eddig elmondottak segítségével a P halmazt felosztjuk az alábbi, időegységenként páronként diszjunkt részhalmazokra:

3.6.1. $R_0(t)$; e halmaz elemeinek neve: *normál* tevékenységek. Ezek ütemezésekor a hozzátartozó erőforrások *egymástól függetlenül* kerülnek ütemezésre. Érvényes, hogy

$$(R_L \cup R_T) \subset R_0(0);$$

valamint, ha $t > 0$, akkor

$$R_0(t) \supseteq R_0(0) .$$

(Megjegyzés: ha $(i, j) \in R_0$ és $K(i, j) > 1$, akkor (i, j)-t *párhuzamos tevékenység*nek is nevezzük.)

3.6.2. R_1 (konstans), a halmaz elemeinek neve: *koherens* tevékenységek. Ha $(i, j) \in R_1$, akkor fenn kell állania, hogy

$$\frac{N_{ij}^k}{\underline{c}_{ij}^{a_k}} \quad \text{minden } k\text{-ra } [k = 1, \ldots, K(i, j)]$$

azonos érték; azon kívül e halmaz elemeire jellemző, hogy ha valamely t' időpontban egy k-ra $X_{ij}^k(t') > 0$, akkor az fennáll minden k-ra is. ($k = 1, \ldots, K(i, j)$), azaz a koherens tevékenységeknél az összes hozzárendelt erőforrás *együttesen* kerül ütemezésre.

3.6.3. R_2 (konstans); e halmaz elemei az ún. *soros* tevékenységek. Jellemzőjük, hogy ha valamely k-ra $X^k_{ij}(t') > 0$, ahol $k \in \{1, \ldots, K(i, j)\}$; akkor ugyanezen t' időszakban

$$X^{k'}_{ij}(t') = 0$$

$$k' \neq k$$

$$k' \in \{1, \ldots, K(i, j)\}$$

azaz: a soros tevékenységeknél a megadott sorrend szerint minden időszakban csak 1 erőforrás kerül ütemezésre (a soros tevékenység tehát tulajdonképpen egy tevékenységbe összefogott lánc).

3.6.4. $R_3(t)$; e halmaz elemei az ún. *alternatív* tevékenységek. Ha $(i, j) \in R_3(t')$ úgy, hogy

$$M^k_{ij}(t') = M^k_{ij}(0),$$

de

$$M^k_{ij}(t' + 1) < M^k_{ij}(t'),$$

akkor minden $t'' > t'$-re

$$(i, j) \notin R_3(t''),$$

és

$$(i, j) \in R_0(t'').$$

E tevékenységek ütemezése tehát a hozzárendelt erőforrások *valamelyik*ével történik, s ha egyszer az ütemezés elkezdődött valamelyik $a \in A$ erőforrással, akkor végig ezzel ütemezünk, mint a normál tevékenységeknél.

3.6.5. R_4 (konstans); e halmaz elemei az ún. *helyszínentartó* tevékenységek. Ha

$$(i, j) \in R_4,$$

akkor

$$M^k_{ij}(t) = \underline{c}^k_{ij} = \bar{c}^k_{ij}(= c^k_{ij})$$

$$k = 1, \ldots, K(i, j)$$

E tevékenységek ütemezése a megadott c^k_{ij} értékkel történik az első i-ből kiinduló tevékenység ütemezésének megkezdésétől a j esemény bekövetkezéséig.

3.6.6. Megkívánjuk, hogy e halmazokra nézve bármely időszakban a következő legyen érvényes:

$$\bigcup_{s=0}^{4} R_s(t) = P,$$

azaz minden tevékenység ezen halmazok valamelyikébe beletartozzék (de csak egyikbe).

3.7. *Különleges kikötések alkalmazása*

Bármely $(i, j) \in P$ tevékenységre különleges kikötések tehetők, a lehetséges eseteket az alábbi halmazokkal határozzuk meg:

3.7.1. $R_5(t)$: az ún. *megszakíthatatlan* tevékenységek halmaza.
$R_6(t)$: az *azonnal folytatandó* tevékenységek halmaza.
Ha valamely t' időpontban

$$X_{ij}^k(t') > 0, \quad \text{és} \quad M_{ij}^k(t') > X_{ij}^k(t')$$
$$(i, j) \in R_5(t'),$$

akkor ugyanezen (i, j) tevékenységre

$$X_{ij}^k(t'+1) > 0,$$

és

$$(i, j) \in R_6(t'+1).$$

Ha pedig

$$\sum_{\substack{(h,i)\in P \\ (h,i) \ll (i,j)}} M_{hi}^k(t') = 0,$$

$$k = 1, \dots, K(h, i),$$

de

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^k(t') > 0 \qquad (i, j) \in R_6(t'),$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^k(t') > 0.$$

Azaz: a megszakíthatatlan tevékenységek ütemezésük megindulása után minden következő időperiódusban is ütemezésre kerülnek, míg munkamennyiségük el nem fogy, de az ütemezés kezdetével várhatunk; míg az azonnal folytatandó tevékenységek ütemezését azonnal el kell kezdeni, mihelyt az előfeltételek teljesültek (az i esemény bekövetkezett).

Érvényes még, hogy $R_4 \subset R_5(t)$, vagyis a helyszínentartó tevékenység mindig megszakíthatatlan.

3.7.2. $R_7(t_1, t_2)$: *a tevékenység bizonyos időintervallumban nem ütemezhető*, azaz $(i, j) \in R_7(t_1, t_2)$ esetén

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^k(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

3.7.3. $R_8(t_1, t_2)$: *az időszakosan csökkentett intenzitású tevékenységek* halmaza; e halmazok minden elemére $K(i, j) = 2$; és ha

$$t < t_1 \text{ vagy } t_2 < t,$$

akkor

$$X_{ij}^2(t) = 0, \qquad (i, j) \in R_8(t_1, t_2),$$

ha pedig $t_1 \leq t \leq t_2$, akkor

$$X_{ij}^1(t) = 0 \qquad (i, j) \in R_8(t_1, t_2).$$

$R_8(t_1, t_2)$-re mindig érvényes:

$$R_8(t_1, t_2) \subset R_0(0),$$

azaz ilyen kikötést csak a normál tevékenységekre tehetünk.

Értelemszerűen érvényes továbbá a következő két összefüggés:

$$R_7(t_1, t_2) \cap R_8(t_1, t_2) = 0,$$

és

$$[R_7(t_1\, t_2) \cup R_8(t_1, t_2)] \cap R_4 = 0;$$

mivel az időszakos tilalom ellentmond annak, hogy a tilalmi időben ütemezni lehessen, s mindkettő ellentmondásban van a helyszínentartással (adott események közt a helyszínentartás nem szünetelhet).

3.8. Ezután minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez hozzárendelünk egy $d_{ij} \geq 0$ ún. ,,rohamtartam''-ot (crash duration) a következőképpen:
legyen

$$d_{ij}^* = \begin{cases} \max\limits_k \dfrac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}, & \text{ha} \quad (i, j) \in R_0(0) \cup R_1 \\ \sum\limits_{k=1}^{K(i,j)} \dfrac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}, & \text{ha} \quad (i, j) \in R_2 \\ \min\limits_k \dfrac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}, & \text{ha} \quad (i, j) \in R_3(0)\,. \\ 0\,, & \text{ha} \quad (i, j) \in R_4 \end{cases}$$

és ebből

$$d_{ij} = -[-d_{ij}^*]\,,$$

ahol [ ] az entier függvény jele (azaz minden d_{ij} értékét egészekre felkerekítjük).

A nemnegativitás ténye az N_{ij}^k és $\bar{c}_{ij}^k$-ra adott feltételekből adódik (3.1.1. és 3.1.2.). A 3.6. értelmében így minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez egyetlen nemnegatív egész d_{ij} érték tartozik.

3.9. A 3.8-ban meghatározott d_{ij} tartamok segítségével végezzük el a CPM/TIME számítást, s határozzuk meg minden $i \in P'$ eseményhez a $t_i^{(0)}$, ill. $t_i^{(1)}$ legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezési értékeket (lásd [1] és [2]).

Képezzük ezután minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez a következő értéket:

$$E_{ij} = t_j^{(1)} - d_{ij}\,.$$

3.10. Tegyük 3.8-ban mindenütt N_{ij}^k helyébe $M_{ij}^k(t)$, $R_0(0)$ és $R_3(0)$ helyébe $R_0(t)$ és $R_3(t)$ értéket, s nevezzük az így kapott $d_{ij}(t)$ értéket ,,aktuális rohamtartam''-nak. Ennek segítségével a 3.9-hez hasonló módon értelmezzük $E_{ij}(t)$ értékét a következőképpen:

$$E_{ij}(t) = t_j^{(1)} - d_{ij}(t)\,.$$

3.11. Végül jelöljük T_i-vel azt a *legkisebb* (legkorábbi) t időpontot, amelyre érvényes:

$$\sum_{(h,i)\in(P-R_4)} \sum_{k=1}^{K(h,i)} \sum_{t'\leq t} X_{hi}^k(t') = \sum_{(h,i)\in(P-R_4)} \sum_{k=1}^{K(h,i)} N_{hi}^k\,,$$

de

$$\sum_{\substack{(i,j)\in P\\(h,i)\gg(i,j)}} \sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^k(t) = 0,$$

azaz: az (i, j)-t közvetlen megelőző tevékenységeket már ütemeztük (átlapolás esetén annak megfelelő mértéke szerint), de az (i, j) ütemezését még nem kezdtük el.

Nevezzük ezen T_i-t az $i \in P'$ esemény „*tényleges bekövetkezési időpontjá*"-nak.

3.12. Ezek után az ütemezési feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

adva a 2.2-ben definiált P halmaz a tevékenységekre meghatározott $\leqslant$, ill. $-\!\leqslant$ relációval.

Feladat a P halmaz (i, j) elemeinek időbeli elrendezése (ütemezése), azaz annak megállapítása, hogy valamely t időpontban az egyes (i, j) tevékenységekhez mekkora $X_{ij}^{a}(t)$ értékeket rendeljünk. Ezt az ütemezést úgy végezzük, hogy $T_n \to \min$! legyen, betartva a relációkat, az egyes tevékenységekre fennálló különleges kikötéseket, és hogy minden (rögzített) t időpontra teljesüljön:

$$\sum_{(i,j)\in P} X_{ij}(t) \leq C^a(t)\,. \qquad (*)$$

4. Az ütemezési feladat megoldása

(ERALL-2 algoritmus)

4.1. *1. lépés:* a t időperiódusban ütemezhető tevékenységek kiválasztása:

Egy $(i, j) \in P$ tevékenységet akkor nevezünk a t időperiódusban *ütemezhetőnek*, ha

$$\sum_{(h,i)\in(P-R_4)} \sum_{k=1}^{K(h,i)} M_{hi}^{k}(t) = 0\,,$$

de

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^{k}(t) > 0$$

$$(h, i) \leqslant (i, j) \in P,$$

[$(h, i) -\!\leqslant (i, j)$ esetén a 2.3-ban ismertetett h^* segítségével hasonlóképpen értelmezhető az ütemezhetőség fogalma.]

Azaz egy tevékenység ütemezhető, ha a megelőző tevékenységeket már ütemeztük (munkamennyiségük „elfogyott"), de az illető tevékenységen még van ütemezhető erőforrás (melynek munkamennyisége pozitív szám).

Jelöljük a t időperiódusban ütemezhető tevékenységek halmazát $Q(t)$-vel.

Jelöljük továbbá az ütemezés során a t periódusban már beütemezett tevékenységek halmazát $Q'(t)$-vel, azaz

$$(i, j) \in Q'(t)\,,$$

ha

$$(i, j) \in Q(t) \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^{k}(t) > 0\,.$$

Mármost egy adott t időperiódusban az ütemezhető tevékenységek kiválasztása — $Q(t)$ megalkotása — után a tevékenységeket az alábbiak szerint vonjuk be sorban $Q'(t)$-be:

először az $R_6(t)$ összes (i, j) elemét, és ha a t időperiódus ütemezésének befejezésekor

$$Q'(t) \subset Q(t) ,$$

vagyis még van ütemezhető, de be nem ütemezett tevékenység, akkor min $E_{ij}(t)$, majd az i, ill. ezen belül j értékek növekvő sorrendjében járunk el.

4.2. *2. lépés:* a tényleges ütemezés:

$$X_{ij}^k(t)$$

megállapítása az eddig előrebocsátottak segítségével a következőképpen történik (a továbbiakban feltétel, hogy $(i, j) \in Q(t)$ legyen, amit értelemszerűen nem írunk ki):

4.2.1. Legyen először is $(i, j) \in R_6(t)$. Ekkor a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy

$$\sum_{(i,j)\in R_6(t)} \underline{c}_{ij}^a \leq C^a(t) \qquad (a \in A)$$

és

$$R_6(t) \cap R_7(t_1, t_2) = 0 \qquad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

legyen. Vagyis: a globális erőforráskorlát ne legyen kisebb, mint az azonnal indítandó tevékenységek alsó lokális erőforráskorlátainak összege, és ne álljon fenn az időszakosan nem ütemezhetőség követelménye.

Ezek nem teljesülése esetén a megoldás nem elégítheti ki a 3.12. (*) feltételt, az ütemezést azonban mégis elvégezzük [az $(i, j) \in R_6(t)$ előírás tehát „erősebb”, mint bármelyik másik!], éspedig az 1. táblázattal megadott módon (tehát a (*) feltételtől függetlenül!):

1. táblázat

$X_{ij}^k(t)$	(i, j)	k'	Egyéb feltétel
$\min [\underline{c}_{ij}^k, M_{ij}^k(t)]$	$R_0(t) \cup R_1$	—	—
$\min [\underline{c}_{ij}^{k'}, M_{ij}^{k'}(t)]$	R_2	$\min k: \left[\underset{k^* < k}{M_{ij}^{k^*}}(t) = 0,\ M_{ij}^k(t) > 0 \right]$	—
$\underline{c}_{ij}^{k'}$	$R_3(t)$	$\min k: \left[\dfrac{M_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k} \to \min, \quad C^{a_k} - \sum_{(i,j) \in Q'(t)} \underline{c}_{ij}^k - \underline{c}_{ij}^k{}_{(i,j) \in Q(t) - Q'(t)} > 0 \right]$	—
$\underline{c}_{ij}^1$	$R_3(t)$	—	$C^{a_k} - \underline{c}_{ij}^k < 0$ minden k-ra $(i, j) \in Q'(t)$
c_{ij}	R_4	—	$t \leq T_j$
0	R_4	—	$t > T_j$

Megjegyzés: C^{a_k} **arra utal, hogy** azon $a_k \in A$ erőforrásról van szó, **amely** (i, j) **tevékenységen** éppen k-iknak van hozzárendelve; más tevékenységnél ez nem éppen a k-ik, sőt lehet, hogy más tevékenységhez nem is tartozik hozzá.

4.2.2. Ha valamely t időperiódusban $Q'(t) = R_6(t)$ és $Q(t) \supset Q'(t)$, akkor $Q'(t)$ további bővítését — amennyiben a feltételek lehetővé teszik —, a 4.1-ben megadott módon végezzük, hiszen az $R_6(t)$ halmazra vonatkozó (4.2.1-ben adott) feltétel már teljesült. A következőkben tehát feltételezzük, hogy az $(i, j) \in R_6(t)$ tevékenységek fenti módon való ütemezése megtörtént. A további ütemezés során mégsem élhetünk az $(i, j) \notin R_6(t)$ feltevéssel, hiszen a már beütemezett tevékenység a min $E_{ij}(t)$ kritérium szerint újból sorra kerülhet. A következőkben az ütemezést — a leírás egyszerűsítése végett — tevékenységtípusonként tárgyaljuk.

A könnyebb tárgyalásmód kedvéért azonban még bevezetünk egy újabb mennyiséget, $Z^a(t)$-t, nevezzük ezt „*erőforrásmaradék*"-nak:
legyen

$$Z^a(t) = C^a(t) - \sum_{(i,j)\in Q'(t)} X_{ij}^a(t) \quad [a \in A].$$

A továbbiakban Z^a és k együttes előfordulásakor mindig olyan k értéket értünk az (i, j) tevékenységhez, amely az a erőforrásra utal.

4.2.3. Legyen $(i, j) \in [R_5(t) \cap R_7(t_1, t_2)]$.
Ha mármost $t_1 \leq t \leq t_2$, akkor nyilván

$$X_{ij}^k(t) = 0\,.$$

Ha $t > t_2$, akkor az ütemezést ugyanúgy végezzük, mint

$$(i, j) \in \{R_5(t) \cap [P - R_7(t_1, t_2)]\}$$

esetében, amelyet a továbbiakban megadunk. Végül, ha $t < t_1$, akkor az ütemezést a 2. táblázat mutatja.

2. táblázat

$X_{ij}^k(t)$	(i, j)	Egyéb feltételek
$\min[\bar{c}_{ij}^k, Z^a(t), M_{ij}^k(t)]$	$P - R_2$	$\frac{M_{ij}^k(t)}{\underline{c}_{ij}^k}\cdot(t_1 - t) \geq N_{ij}^k$; $Z^a(t) \geq \underline{c}_{ij}^k$
$\min[M_{ij}^k(t), \bar{c}_{ij}^k]$	$P - R_2$	$\frac{M_{ij}^k(t)}{\underline{c}_{ij}^k} > \frac{N_{ij}^k}{\overset{*}{c}{}_{ij}^k}$; $\bar{c}_{ij}^k \leq Z^a(t)$; $\frac{M_{ij}^k(t)}{\underline{c}_{it}^k}\cdot(t_1 - t) < N_{ij}^k$; $\frac{M_{ij}^k(t)}{\overset{*}{c}{}_{ij}^k}(t_1 - t) \geq N_{ij}^k$; $\underline{c}_{ij}^k < \overset{*}{c}{}_{ij}^k \leq \bar{c}_{ij}^k$
0	$P - R_2$	$Z^a(t) < \underline{c}_{ij}^k$ vagy $\frac{M_{ij}^k(t)}{\bar{c}_{ij}^k}\cdot(t_1 - t) < N_{ij}^k$

3. *táblázat*

$X^k_{ij}(t)$	(i, j)	Egyéb feltétel
$\min\,[M^k_{ij}(t), \bar{c}^k_{ij}, Z^a(t)]$	$P - [R_6(t) \cup R_8(t_1, t_2)]$ vagy $R_7(t_1, t_2) \cap \left[P - \bigcup_{s=5}^{6} R_s(t)\right]$	$Z^a(t) > \underline{c}^k_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t > t_2$
$\min\,[M^1_{ij}(t), \bar{c}^1_{ij}, Z^a(t)]$	$R_8(t_1, t_2)$	$Z^a(t) \geq \underline{c}^1_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$\min\,[M^2_{ij}(t), \bar{c}^2_{ij}, Z^a(t)]$	$R_8(t_1, t_2)$	$Z^a(t) \geq \underline{c}^2_{ij}$; $t_1 \leq t \leq t_2$
$M^k_{ij}(t)$	$\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \bigcup_{s=7}^{8} R_s(t_1, t_2)$	$M^k_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}^k_{ij}$
	$\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \cup R_7(t_1, t_2) \cup [P - R_8(t_1, t_2)]$	$M^k_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}^k_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$M^1_{ij}(t)$	$\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \cup R_7(t_1, t_2) \cup [P - R_8(t_1, t_2)]$	$M^1_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}^1_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$M^2_{ij}(t)$	$\left\{P - \left[\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \cup R_7(t_1, t_1)\right]\right\} \cap R_8(t_1, t_2)$	$M^2_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}^2_{ij}$; $t_1 \leq t \leq t_2$
$\min\,[\bar{c}^k_{ij} - \underline{c}^k_{ij};\, M^k_{ij}(t) - \underline{c}^k_{ij};\, Z^a(t) - \underline{c}^k_{ij}]$	$R_6(t) \cap \left[P - \bigcup_{s=7}^{8} R_s(t_1, t_2)\right]$	$\underline{c}^k_{ij} < \min\,[\bar{c}^k_{ij}, M^k_{ij}(t), Z^a(t)]$
	$R_6(t) \cap R_7(t_1, t_2)$	$t < t_1$ vagy $t_2 < t$
	$R_6(t) \cap R_8(t_1, t_2)$	$t < t_1$ vagy $t_2 < t$ és $k = 1$ vagy $t_1 \leq t \leq t_2$ és $k = 2$
0	—	egyéb esetekben

4. táblázat

$X_{ij}^k(t)$	(i, j)	m	Egyéb feltétel
$\min\limits_k \{\min [M_{ij}^k(t),\ m \cdot \underline{c}_{ij}^k,\ Z^a(t)]\}$	$P - [R_6(t) \cup R_7(t_1, t_2)]$	$m \cdot \underline{c}_{ij}^k \leq \bar{c}_{ij}^k$; $(m+1) \cdot \underline{c}_{ij}^k > \bar{c}_{ij}^k$	$Z^a(t) \geq c_{ij}^k$
	$R_7(t_1, t_2) \cap [P - R_6(t)$	$m \cdot \underline{c}_{ij}^k \leq \bar{c}_{ij}^k$; $(m+1) \cdot \underline{c}_{ij}^k > \bar{c}_{ij}^k$	$t < t_1$ vagy $t_2 < t$; $Z^a(t) \geq \underline{c}_{ij}^k$
$M_{ij}^k(t)$	$P - [R_6(t) \cup R_7(t_1, t_2)]$	—	$M_{ij}^k(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}_{ij}^k$ $k = 1, \ldots, K(i, j)$ mindegyikére
	$R_7(t_1, t_2) \cap [P - R_6(t)]$	—	$M_{ij}^k(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}_{ij}$ $k = 1, \ldots, K(i, j)$ $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$\min\limits_k \{\min [M_{ij}^k(t) - \underline{c}_{ij}^k;\ (m-1) \cdot c_{ij}^k;\ Z^a(t) - \underline{c}_{ij}^k]\}$	$R_6(t)$	$m \cdot c_{ij}^k \leq \bar{c}_{ij}^k$; $(m+1) \cdot c_{ij}^k > \bar{c}_{ij}^k$	$c_{ij}^k < \min [M_{ij}^k(t), Z^a(t)]$
0	—	—	egyébként

Ha $(i, j) \in R_2$, akkor $\frac{M_{ij}^k(t)}{c_{ij}^k}$ helyett

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} \frac{M_{ij}^k(t)}{c_{ij}^k}$$

értékét vesszük (mindig a megfelelő c_{ij}^k-val — $\underline{c}$, c^*, $\bar{c}$ —), s az ütemezést ugyanígy végezzük.

4.2.4. Legyen most $(i, j) \in R_0(t)$ és a 4.2.3-ban tárgyalt esetek egyike se álljon fenn.

Ekkor az ütemezést a 3. táblázat mutatja.

4.2.5. Legyen $(i, j) \in R_1$ (és a 4.2.3-ban tárgyalt eset ne álljon fenn). Ekkor a 4. számú táblázat mutatja az ütemezést.

4.2.6. Legyen $(i, j) \in R_2$ (a 4.2.3-ban tárgyalt eset ne álljon fenn). Ekkor az ütemezést az 5. táblázat mutatja.

4.2.7. Legyen $(i, j) \in R_3(t)$. Ekkor ütemezés előtt a következő számítást végezzük el:

ha minden k-ra a hozzátartozó $Z^a(t) < \underline{c}_{ij}^k$, akkor

$$X_{ij}^k(t) = 0\,;$$

ellenkező esetben viszont határozzuk meg ezen k-kra

$$\min\left[\frac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}\right]$$

értékét, és a tevékenység tartalmát átalakítjuk az alábbi módon:

$$M_{ij}^k(t) = \begin{cases} N_{ij}^{k'}, \text{ ahol } k' = \min k\colon \{\max\limits_k [\min(N_{ij}^k, Z^a(t))]\}^1 \\ 0, \text{ ha } k \neq k' \end{cases}$$

és az ütemezés a 3.6.4. alapján azonos a 4.2.4-ben leírttal.

4.2.8. Legyen végül $(i, j) \in R_4$.

Ekkor

$$X_{ij}^k(t) = \begin{cases} c_{ij}^k, \text{ ha } T_i \leq t \leq T_j, \\ 0, \text{ egyébként.} \end{cases}$$

4.3. *3. lépés:* t helyébe $t^* = t + 1$ értéket helyettesítünk. Ekkor visszatérünk az 1. lépésre.

Fenti lépéseket mindaddig ismételjük, míg

$$\sum_{(i,n)\in P} \sum_k M_{in}^k(t) = 0$$

nem lesz.[2] Ezzel az ütemezés végetért.

[1] Ez azt jelenti, hogy kiválasztjuk a legalább $\underline{c}_{ij}^k$ mennyiséggel ütemezhető tevékenységek közül a legkisebb átfutási időt igénylő erőforrások mellett a legkevésbé szűk keresztmetszetűt, ill. több ilyen közül a sorrendben legelőbb hozzárendeltet, s azután már az 1 erőforrású normál tevékenységként kezeljük (és ütemezzük).

[2] Vagyis: míg az összes tevékenységet beütemeztük. (i, n) jelenti az n (záró) eseményben végződő tevékenységeket.

5. táblázat

$X^k_{ij}(t)$	i, j	k'	Egyéb feltétel
$\min\left[M^{k'}_{ij}(t), \bar{c}^k_{ij}, Z^a(t)\right]$	$P - [R_6(t) \cup R_7(t_1, t_2)]$	$k: \left[\sum_{t'=1}^{t-1} X^{k''}_{ij}(t') = N^{k''}_{ij}, \; (k'' < k) \quad \sum_{t'=1}^{t-1} X^k_{ij}(t') < N^k_{ij}\right]$	—
	$R_7(t_1, t_2) \cap [P - R_6(t)]$		$t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$M^{k'}_{ij}(t)$	—		$M^{k'}_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}^k_{ij}$
$\min\left[M^{k'}_{ij}(t) - \underline{c}^{k'}_{ij}; Z^a(t) - \underline{c}^{k'}_{ij}; \bar{c}^{k'}_{ij} - \underline{c}^{k'}_{ij}\right]$	$R_6(t) \cap Q'(t)$		$\underline{c}^{k'}_{ij} < \min\left[M^{k'}_{ij}, Z^a(t), \bar{c}^{k'}_{ij}\right]$
0	—	—	egyébként

Mivel minden tevékenység egyszer ütemezésre kerül (N_{ij}^k, $K(i, j)$ is véges), ezért ez véges számú lépésben bekövetkezik. A kapott megoldás jóságát az eddigi tapasztalatok is mutatják, erről az 5.-ben számolunk be röviden.

5. Gyakorlati tapasztalatok

Noha az ismertetett módszer a heurisztikus eljárások közé tartozik, a gyakorlatban igen jól bevált és rendszeresen alkalmazzák nemcsak az építőiparban, hanem más területeken is.

A módszer hatékonyságát az okozza, hogy a gyakorlati életből vett szervezetekre (építésvezetőség, kihelyezett munkahely, főépítésvezetőség, koordináló vállalatok, stb.) épül és a tevékenységtípusok, valamint az algoritmus heurisztikus lépései e szervezetek sajátosságait jól tükrözik. Különösen a tevékenységek megszakíthatósága, valamint a változtatható erőforrás intenzitás nagyban növeli hatékonyságát más hasonló eljárásokhoz képest.

Össze is hasonlították más módszerekkel: a KGST Építésügyi Állandó Bizottságában a csehszlovák delegáció kidolgozott egy közös számítási feladatot. Ezzel több tagország 5 hasonló programjának hatékonyságát hasonlították össze. Itt az ERALL-eljárás bizonyult leghatékonyabbnak, amennyiben átfutási ideje (T_n) 30 nappal rövidebb volt, mint a második legjobb programé.

A gyakorlati eredményekről már több ismertetés és cikk is jelent meg [4], [5], [6], [7].

(Beérkezett: 1969. november 10.)

IRODALOM

1. KELLEY, JAMES E. JR.: Critical Path Planning and Scheduling: mathematical basis. Operations Research. 1961. 9/3. pp. 296—320.
2. SZABÓ, I.: Átlapoló tevékenységtípusok kezelése a hálótechnikai ütemező eljárásokban. Információ—Elektronika, 1969. 4. sz. 307—312. o.
3. SZABÓ, I.: Az ERALL-2 eljárás matematikai leírása. Információ—Elektronika 1967. 2. sz. 98—102. o.
4. PVC gyáregység-bővítés beruházási tevékenységek ERALL-2 módszerrel számított koordinációs programja I—II—III. (Budapest—Kazincbarcika, 1967—68.) BVK—ÉM. SZÁMGÉP.
5. „Hálótervezési módszerek". (4., 5., 6. fejezet: Erőforrás allokációs módszerek. Az ERALL-módszer. Gyakorlati tapasztalatok. 158—232.) Budapest, 1968. Országos Ügyvitelgépesítési Felügyelet.
6. SZABÓ, I.—SZOLNOKY, A.: Az építőipari termelésszervezés hálótechnikán alapuló módszereinek 1966. évi tapasztalatai. Budapest, 1967. ÉM. SZÁMGÉP.
7. SZABÓ, I.—SZOLNOKY, A.: Hálótechnikai módszerek a gyakorlatban. Magyar Építőipar, 1967. 7. sz. 429—433. o.

THE ERALL-2 NETWORK ALGORITHM

The introductory portion of the article provides references and justification of why the heuristical algorithms, one of which is the ERALL-2, are generally applied in modern network procedures which deal with the allocation of resources. Following this, it contains a short description of the mathematical foundation of the network technique, introduces the concept of overlapping, and then the mathematical model of the problem is constructed, and the task itself defined. Here the article discusses certain special activities handled by the model (normal, coherent, series, alternative, keeping on-the-spot),

constraints and variables of the problem, its parametres, and certain special stipulations (uninterruptable or immediate activities, assumptions dependent on time), and here it gives the method for calculating the time data also needed for the classic CPM technique (based on the values already given).

In solving the problem, the detailed mathematical description of the ERALL-2 algorithm is given in the next chapter, where we can find the method of allocation and scheduling.

The conclusion contains a brief review on the study of the effectivity of the procedure, and on the experiences gained with it so far. The reference list contains previous reports on the procedure and on pratical results already published.

АЛГОРИТМ СЕТЕВОЙ ТЕХНИКИ: ЭРАЛЛ-2

Вводная часть статьи показывает и обясняет тот, что в современных методах сетевой техники, которые занимаются распределением, тактированием источников, соответствующих действиям, почему применяются обычно геуристические алгоритмы, к которым относится и ЭРАЛЛ-2. Дальше работа даёт краткое описание математических основ сетевой техники, вводит понятие перекрытия и после этого составляется математическая модель задачи и оформляется задача. Здесь занимается статья некоторыми особенными типами деятельностей, которые включаются в модель, ограничениями, переменными задачи, параметрами и также некоторыми особенными ограничениями (деятельности, которые нельзя перерывать или немедленно надо продолжать, ограничения, зависящиеся от времени), и здесь даёт метод вычисления нужных данных времени, которые нужны и к классической технике критической пути (по заранее заданным величинам).

При решением задачи, подробное математическое описание алгоритма ЭРАЛЛ-2 даётся в следующей главе, где мы находим метод выполнения распределения и тактирования во времени, группированно по отдельными типами деятельностей.

Формулы чаще всего сопровождаются коротким объяснением, особенно относительно некоторым новым понятиям.

В заключение коротко описывается испытание эффективности метода и имеющийся опыт испытания, а в списке литературы находятся с одной стороны уже имеющнеся описания метода, а с другой стороны список литературы опубликованных результатов практики.