Kovács Álmos—Stahl János

Dekompoziciós eljárás a szén termelésének és elosztásának optimalizálására*

1. Bevezetés

A széntermelés és elosztás optimalizálásának modellje a következő feltételekkel fogalmazható meg [2]:

(1) $x_{ij} \geqq 0\,; \quad y_k \geqq 0$

(2) $\sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_{ij} = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$

(3) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + r_j \leqq y_k a_j \qquad (k = 1, \ldots, t) \quad (j = j^{(k-1)}, \ldots, j^{(k)} - 1)$

(4) $y_k \geqq s_k$

(5) $y_k \leqq 1 \qquad (k = 1, \ldots, t)$

(6) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k=1}^{t} y_k d_k \rightarrow \min.$

ahol x_{ij} jelöli az i felhasználóhoz juttatott j szénfajta mennyiségét (szénfajtáknak a minőség és előfordulási hely tekintetében különböző szeneket nevezzük), h_{ij} e viszonylatban egységnyi szén felhasználásával járó igénykielégítés mértékét (hatásfok), c_{ij} pedig a megfelelő szállítási költséget. b_i-vel i fogyasztó igényét, a_j-vel a j szénfajtából maximálisan termelhető mennyiséget, r_j-vel pedig e szénfajtából minimálisan termelendő (az „invariábilis", rögzített szénfajtákat használó fogyasztóknak jutó) mennyiséget jelöltük. E fogyasztók igényei nem szerepelnek a modellben, a szén hozzájuk való szállításával kapcsolatos költség nyilvánvalóan konstans. A bányákban termelt szenet az osztályozókban választják szét a kereskedelmi forgalomban levő mennyiségeknek megfelelő csoportokra, az azonos osztályozókban „termelt" szénfajták mennyiségei közötti arányok rögzítettek. y_k jelöli k osztályozó termelési szintjét (azaz, hogy teljes kapacitásának hány százalékáig dolgozik), $j^{(0)} = 1$, $j^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} l_i + 1$, ahol l_k a k osztályozóban termelt szénfajták száma, d_k pedig a k osztályozó teljes kapacitással való termelése esetén felmerülő, a

* Az OEGH megbízta az INFELOR Rendszertechnikai Vállalatot a széntermelést és elosztást optimalizáló modellek kialakításával és a modellek alapján való számítások elvégzésével. Az OEGH részéről Erdősi Pál, Füredi Tamás és Ligeti Pál vett részt a kutatásban. A cikk e kutatások eredményei alapján készült. A számításokat az INFELOR MINSZK-2 típusú számítógépén végezték.

termelés mértékével arányos (változó) termelési költség, s_k az osztályozó termelési szintjének alsó korlátja, amelynek értékét (3) feltétel határozza meg. A felesleges (4) feltételt a további tárgyalás egyszerűsítése érdekében szerepeltetjük.

Világos, hogy az azonos osztályozóban termelt szénfajtákhoz azonos y tartozik, a modell azonban nem írja elő a megtermelt szén felhasználását is, tehát előfordulhat, hogy valamely szénfajta kitermelése esetén nem kerül felhasználásra (ha a vele együtt termelt szénfajták kedvező tulajdonságai miatt ez a gazdaságos megoldás). Ugyanakkor a modell a termelési költséget az osztályozó működéséhez kapcsolja, így nincs szükség annak szénfajták közötti — csak önkényesen megvalósítható — felosztására.

Az (1)—(6) feltételekkel megadott feladat duálisa:

(7) $$p_j \geq 0; \quad w_k \geq 0; \quad z_k \geq 0$$

(8) $$u_i \leq \frac{c_{ij} + p_j}{h_{ij}} \qquad (i = 1, \ldots, m) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

(9) $$\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j p_j - w_k + z_k = d_k \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

(10) $$\sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \sum_{j=1}^{n} r_j p_j - \sum_{k=1}^{t} w_k + \sum_{k=1}^{t} s_k z_k \rightarrow \max$$

Mint ismeretes, ennek optimális megoldásában szereplő u_i a fogyasztók egységnyi energiaigénye kielégítése minimális költségét adja, p_j a szénfajta egyensúlyi ára, w_k a k osztályozó pozitív, z_k pedig negatív járadékát jelöli. ($w_k \cdot z_k = 0$). A (8) feltétel jobb oldalai ekkor a fogyasztó egységnyi energiaigénye kielégítésének költségeit (a különböző szénfajták esetén) mérik, a (9) feltétel pedig azt biztosítja, hogy az egyes osztályozókhoz tartozó szénfajták árai fedezzék a termelési költség és a járadék összegét. A járadék a kötelező termelési feladat (invariábilis fogyasztók) miatt negatív is lehet.

A dualitási tételekből következik, hogy azokra az osztályozókra vonatkozóan, amelyeket az optimális program teljesen kihasznál, a járadék nemnegatív, az alsó és felső korlát között használt osztályozók járadéka pedig zérus. Mivel pedig a (8) egyenlőtlenség csak az optimális program viszonylataira vonatkozóan teljesül egyenlőség formájában, a p_j árakat valóban egyensúlyi árnak tekinthetjük, ugyanis ilyen árak mellett a fogyasztók választásai nem lesznek ellentétesek az optimális program döntéseivel. p_j értékeinek meghatározásakor tehát nem csak az egyes szénfajták különbözeti járadékát kapjuk meg, hanem a modell „elosztja" a termelési költségeit is az egyes szénfajták között. Ha azonban a termelési költség valamilyen szétosztásából indulunk ki — tehát meghatározunk olyan k_j értékeket, hogy

$$\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j k_j = d_k,$$

akkor a $v_j = p_j - k_j$ formulával különbözeti járadékhoz jutunk. Világos, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{k=1}^{t} (w_k + z_k).$$

Ha az osztályozók termelési szintje rögzített, akkor (1)—(6) feladat általánosított szállítási, illetve a $h_{ij} = t_j f_i$ feltevés esetén szállítási feladatként hatékony módszerekkel oldható meg ([2]). Mivel a szénbányászatban a termelési szerkezet nem változtatható meg máról holnapra, éves tervezés esetén az y értékeket rögzítettnek tekinthetjük, ekkor a modellnek csak elosztási kérdésekről kell döntenie. Hosszabb távon azonban — amikor a modell feladatának tekintjük az optimális termelési szerkezet meghatározását is — ezek az egyszerű modellek már nem használhatók, a modell méretei (mind a fogyasztók, mind a szénfajták száma többszáz, így a változók száma legalábbis több tízezer) pedig nem teszik lehetővé a lineáris programozás általános megoldási módszereinek használatát.

A következőkben egy speciális dekompozíciós eljárást ismertetünk (1)—(6) feladat megoldására, melynek alapgondolata lényegében a Benders-féle dekompozíciós elv [1], majd ennek az adott modellre történő alkalmazásával és a számítások eredményeivel foglalkozunk.

A leírás során ismertnek tételezzük fel a lineáris programozás elméletét, és a szállítási feladattal kapcsolatos, ma már elfogadottnak tekinthető terminológiát.

2. A dekompozíciós eljárás

Az (1)—(6) feltételekkel megfogalmazott feladat

(11) $$\mathbf{x},\ \mathbf{y} \geq 0$$

(12) $$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y} = \mathbf{a}$$

(13) $$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

(14) $$\mathbf{c}_1^* \mathbf{x} + \mathbf{c}_2^* \mathbf{y} \to \min$$

formában írható.

Feltesszük, hogy

(15) $$Y = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset \text{ és korlátos, és hogy}$$

(16) $$\text{minden } \mathbf{y} \in Y \text{ esetén létezik } \min \{\mathbf{c}_1^* \mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

(Feladatunk esetén ezek a feltételek teljesülnek.)

Legyenek a $P = \{\mathbf{p}^* \mid \mathbf{p}^* \mathbf{A}_1 \geq \mathbf{c}\}$ konvex poliéder extremális csúcsai $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_L$, extremális irányai $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_N$. Mint majd látható, ezek explicit előállítására a (11)—(14) feladat megoldása során általában nincs szükség.

Legyen $\mathbf{y} \in Y$ esetén $c_1(\mathbf{y}) = \min \{\mathbf{c}_1^*\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Minthogy (16) szerint a $\min \{\mathbf{c}_1^*\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ feladatnak minden $\mathbf{y} \in Y$ esetén van optimális megoldása, tehát $\mathbf{q}_n^*(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}) \geq 0$ tetszőleges n-re és $\mathbf{y} \in Y$-ra és így

$$c_1(\mathbf{y}) = \max_l \{\mathbf{p}_l(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y})\} = \min \{u \mid u \geq \mathbf{p}_l^*(\mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{y});\ l = 1, 2, \ldots, L\}.$$

A (11)—(14) feladat nyilván ekvivalens a

(17) $$\left.\begin{array}{r} \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad c_1(\mathbf{y}) + \mathbf{c}_2^*\mathbf{y} \to \min$$

feladattal, azaz a

$$(18)\qquad \left.\begin{aligned} u &\geq \mathbf{p}_l^*(\mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y}) \quad (l=1,\ldots,L)\\ \mathbf{B}\,\mathbf{y} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{O}\end{aligned}\right\}\ u+\mathbf{c}_2^*\mathbf{y}\to\min$$

feladattal.

Nyilvánvaló továbbá, hogy tetszőleges $\bar{\mathbf{p}}_1^*, \bar{\mathbf{p}}_2^*, \ldots$ esetén a (18) feladatot a

$$(19)\qquad u \geq \bar{\mathbf{p}}_i^*(\mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y}) \qquad (i=1,2,\ldots)$$

feltételekkel kiegészítve is az előzővel ekvivalens feladathoz jutunk.

Legyen $\mathbf{y}_1 \in Y$ és legyen $c(\mathbf{y}_1) = \mathbf{p}^{(1)*}(\mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y})$.

Ha már meghatároztuk $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$-t és $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \ldots, \mathbf{p}^{(k)}$-t, akkor oldjuk meg a

$$(20)\qquad \left.\begin{aligned} u &\geq \mathbf{p}^{(1)*}(\mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y})\\ &\ \ \vdots\\ u &\geq \mathbf{p}^{(k)*}(\mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y})\\ \mathbf{B}\mathbf{y} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{O}\end{aligned}\right|\ u+\mathbf{c}_2^*\mathbf{y}\to\min.$$

feladatot. Ha ennek $u = \mathbf{p}^{(k)*}(\mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y})$ optimális megoldása, akkor ez optimális megoldása nyilván a (17) ekvivalens feladatnak is, míg ellenkező esetben az optimális megoldásból nyert $\mathbf{y}_{k+1}$-hez határozzuk meg $\mathbf{p}^{(k+1)*}$-t $c(\mathbf{y}_{k+1}) = \mathbf{p}^{(k+1)*}(\mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y}_{k+1})$ alapján és folytassuk az eljárást. $\mathbf{p}^{(k+1)*}$-t most mint a $\min\{\mathbf{c}_1^*\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y}_{k+1},\ \mathbf{x}\geq\mathbf{O}\}$ feladat duálisának optimumát kapjuk. Az eljárás nyilván módosítható oly módon, hogy minden lépésben a (20) feltételeket további $\bar{\mathbf{p}}^* \in P$-knek megfelelőekkel bővítjük (lásd 19).

Az eljárás nylivánvalóan véges, hiszen az extremális $\mathbf{p}^*$-k száma is az.

Az így konstruált feladatok optimumértékei monoton nem csökkenő sorozatot adnak, mindegyik érték alsó becslés az eredeti feladat optimumára.

Ha egy (20) alakú feladat megoldása során a (17) ekvivalens feladat optimális megoldásához jutunk, a (11)—(14) feladat optimális megoldása $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, ahol $\mathbf{x}_k$ optimális megoldása a $\min\{\mathbf{c}_1^*\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}-\mathbf{A}_2\mathbf{y}_k,\ \mathbf{x}\geq\mathbf{O}\}$ feladatnak. A (11)—(14) feladat

$$(21)\qquad \left.\begin{aligned} \mathbf{p}^*\mathbf{A}_1 &\geq \mathbf{c}_1\\ \mathbf{p}^*\mathbf{A}_2+\mathbf{q}^*\mathbf{B} &\geq \mathbf{c}_2\end{aligned}\right\}\ \mathbf{p}^*\mathbf{a}+\mathbf{q}^*\mathbf{b}\to\max$$

duálisának megoldása

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}^*\,\mathbf{P}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$$

ahol $\mathbf{P}$ a szóbanforgó (20) alatti $\mathbf{p}$-kből alkotott mátrix, $(\mathbf{t}^*, \mathbf{q}^*)$ pedig a (20) feladat duálisának optimális megoldásai.

3. A dekompozíciós eljárás alkalmazása

Az eljárást a $h_{ij} = f_i t_j$ feltevés mellett az $u_{ij} = t_j x_{ij}$ változó bevezetésével az alábbi átalakított feladaton mutatjuk be.

$$
(22) \qquad
\begin{aligned}
& u_{ij} \geq 0 \qquad y_k \geq 0 \\
& \sum_{j=1}^{n} u_{ij} = b'_i , \\
& \sum_{i=1}^{m} u_{ij} \leq y_k a'_j - r'_j \\
& y_k \geq s_k \\
& y_k \leq 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} u_{ij} + \sum_{k=1}^{t} y_k d_k \to \min
\end{aligned}
$$

(a'_i, b'_i, r'_j és c'_{ij}) az eredeti feladat megfelelő értékeiből f_i és t_j felhasználásával egyszerűen átszámított értékek.)

1. y-okat választunk úgy, hogy

$$
(23) \qquad s_k \leq y_k \leq 1 \text{ és}
$$

$$
\sum_{k=1}^{t} y_k \left(\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j \right) \geq \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{k=1}^{n} r_j
$$

Ez a feltétel biztosítja, hogy teljesüljön (16), a szállítási feladat megoldására használt eljárás ugyanis ilyen esetekben mindig ad megoldást. Ugyanakkor előfordulhat, hogy a kapott megoldás az eredeti feladatnak nem lesz megoldása, (a szállítási feladat ugyanis tiltott helyekre is programozhat), ezért szükség esetén további feltételekkel kell biztosítanunk, hogy a kapott y-k mellett (16) teljesüljön. Így szükség esetén pl. előírhatjuk, hogy az egyes szénminőségekből az összes termelés legyen nagyobb a csak az adott szénminőséggel kielégíthető igények összegénél, stb.)

2. Meghatározzuk az

$$
(24) \qquad
\begin{aligned}
& \sum_j u_{ij} = b'_i \\
& \sum_i u_{ij} \leq y_k a'_j - r'_j \\
& \sum_i \sum_j c'_{ij} u_{ij} \to \min
\end{aligned}
$$

feladat duálisának néhány megoldását.

Kezdetben esetleg célszerű az optimális duális megoldás helyett közelítő megoldásokkal megelégedni, az eljárás így valószínűleg gyorsítható. Nagyméretű szállítási feladat megoldása során ugyanis általános tapasztalat, hogy a számítás első felében a célfüggvény gyorsan csökken, majd viszonylag hosszú számítási idő után jut el az optimumig és ebben a szakaszban a célfüggvény értéke már nem lesz lényegesen kisebb. A számítás során időnként kiíratott aktuális célfüggvényérték vizsgálata alapján a feladat ismeretében meglehetős biztonsággal eldönthető, hogy várható-e még a célfüggvény lényeges csökkentése. A szállítási feladat aktuális „potenciáljaiból” könnyen konstruálhatunk lehetséges duális megoldásokat. Mi a következő módon jártunk el: legyenek u_i, illetve v_j az aktuális potenciálok.

a) $v_j \leq 0$ esetén a megfelelő v_j értéket 0-ra emeljük,

b) ha ezután valamennyi c_{ij}-re $c_{ij} \geq u_i - v_j$

teljesül, megoldásunk már lehetséges duális megoldás, ellenkező esetben vagy u_i értékét csökkentjük addig, míg $c_{ij} = u_i - v_j$ teljesül, vagy v_j értékét növeljük ennek a feltételnek megfelelően.

Ily módon, ha k olyan c_{ij} érték van, amelyre $c_{ij} < u_i + v_j$, 2^k számú duális megoldáshoz juthatunk. Legegyszerűbb ezek közül azt a két megoldást megkapni, amelyekben valamennyi esetben u_i-t csökkentjük, ill. v_j-t növeljük. A duális célfüggvényérték alapján képet kaphatunk a közelítés mértékéről is.

3. Megoldjuk az

$$y_k \geq s_k \qquad y_k \leq 1 \tag{25}$$

$$u + \sum_{k=1}^{t} y_k \left(\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j v_j \right) \geq \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \sum_{j=1}^{n} r_j v_j \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{t} y_k \left(\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j \right) \geq \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{j=1}^{n} r_j \tag{27}$$

$$u + \sum_{k=1}^{t} y_k d_k \to \min \tag{28}$$

lineáris programozási feladatot.

Valamennyi duális megoldásból származtatunk egy (26) típusú feltételt.

4. Az eljárást a 2. ponttól folytatjuk, a (25)–(28) feladat eredményeként kapott y értékekkel megoldva a (24) feladatot. Az eljárást mindaddig folytatjuk, míg (25)–(28) az előző lépésben adódott értékek esetén legsz optimális, ekkor ezek az y-ok és (24) megoldása szolgáltatják (22) optimális megoldását.

A (22) feladat duálisa a következő lesz:

$$p_j \geq 0, \; w_k \geq 0, \; z_k \geq 0, \qquad \begin{matrix} (j = 1, \ldots, n) \\ (k = 1, \ldots, t) \end{matrix}$$

$$u_i - p_j \leq c_{ij} \qquad \begin{matrix} (i = 1, \ldots, m) \\ (j = 1, \ldots, n) \end{matrix} \tag{29}$$

$$\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j p_j - w_k + z_k \leq d_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \sum_{j=1}^{n} p_j v_j + \sum_{k=1}^{t} s_k z_k - \sum_{k=1}^{t} w_k \to \max .$$

(29) megoldását (24) és (25)–(28) duálisának megoldásából származtathatjuk. (24) duálisának u_i, v_j megoldásai ugyanis kielégítik a $v_j \geq 0$, $u_i - v_j \leq c_{ij}$ feltételeket, és ezek a v_j és u_i értékek szerepelnek (25)–(28) feltételeiben.

(25)–(28) duálisa a következő lesz:

(30) $$t_l \geq 0,\ t \geq 0,\ w_k \geq 0,\ z_k \geq 0,$$

$$\sum_{l=1}^{r} t_l \leq 1$$

[r (24) figyelembe vett duális megoldásainak a száma)

$$t \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j + \sum_{l=1}^{r} t_l \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j v_j + z_k - w_k \leq d_k \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

$$\sum_{l=1}^{r} t_l \left[\sum_{i=1}^{m} u_{il} b_i + \sum_{j=1}^{n} r_j v_{jl} \right] + t \left[\sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{j=1}^{n} r_j \right] + \sum_{k=1}^{t} s_k z_k - \sum_{k=1}^{t} w_k \to \max$$

Könnyen belátható, hogy a (30) megoldásából kapott

(31) $$p_j = \sum_{l=1}^{r} t_l v_{jl} + y,$$

$$u_i = \sum_{l=1}^{r} t_l u_{il} + y,$$

w_k, z_k értékek (29) lehetséges megoldásai, és így (25)—(28) optimális megoldásához tartozó (30)-beli megoldásokból képzett (31) megoldások az optimális duális megoldást adják.

Végül megjegyezzük, hogy mivel (24) duálisnak lehetséges megoldásai a jobb oldaltól függetlenek, a jobb oldal (a szállítási feladat ,,peremei") változása esetén a korábbi duális megoldásokat továbbra is felhasználhatjuk a (26) típusú feltételek képzésénél.

4. A számítás eredményei

Két feladatot oldottunk meg, (B és C modell), a feladatok paraméterei a b vektor (fogyasztói igények) és a költségmátrix egyik oszlopa kivételével azonosak voltak.

Előzőleg megoldottunk egy feladatot, amelyben nem vettük figyelembe az azonos osztályozóból kikerülő szénfajták közötti kötött arányokat (A modell), tehát a (22) feladatban az

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij} \leq y_k a'_j - r'_j \text{ feltétel helyett az } \sum_{i=1}^{m} u_{ij} \leq a'_j - r'_j$$

feltételt alkalmaztuk, és a termelési költségeket szétosztottuk az egyes szénfajták között:

$$\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j k_j = d_k .$$

A modell egyéb feltételei azonban nem tértek el lényegesen a B modell feltételeitől. A B modell megoldása során az induló $\mathbf{y}$ vektort az A modell árnyékárai ismeretében választottuk. Az A modell (u_i, v_j) árnyékáraiból az

1. sz. tábla

y *vektorok a B modell megoldása során*

Osztályozó	Iteráció				
	1	2	3		5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1
17	1	1	0,952	1	1
18	0	1	0	0	0
19	1	1	0	1	1
20	0	1	0	0	0
21	1	1	1	1	1
22	0	0	0	0	0
23	0,01	1	0,00035	1	0,40
24	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1
26	0	1	0	1	1
27	1	1	1	1	1
28	0	0	0	0	0
29	1	1	0,07	1	1
30	0	0	0	0	0
31	0,15	0,27	0,12	0,12	0,12
32	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1
36	0,01	1	0,006	0,006	0,006
37	1	0,947	0,947	0,947	0,947
38	1	1	1	1	1
39	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1
44	1	1	1	1	1
45	1	1	1	1	1
46	0	0	0	0.07	1
47	1	1	1	1	1
48	1	1	1	1	1
49	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	1

$$u_i = u_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$p_j = v_j + k_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$w_k = \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j v_j \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

formulákkal a B modell lehetséges duális megoldásaihoz jutunk. Az u_i és p_j értékekkel megoldhatjuk a (26)—(28) feladatot és így az eljárást innen folytathatjuk. A gyakorlatban egyszerűbb módon jártunk el: a számított w_k értékek nagysága alapján választottuk y-kat, úgy, hogy már az 5 legkisebb pozitív w_k esetén is $y_k = 0$ legyen.

A továbbiakban az eljárást a leírásnak megfelelően folytattuk.

A B modell megoldása során hat iterációs lépést végeztünk. Az 1. sz. táblában és az alábbiban összefoglaljuk a számítás főbb mutatóit.

Iteráció	Termelési	Szállítási	Összes	A célfüggvény alsó korlátja
	költség			
1	722 953	84 741	807 694	744 157
2	744 157	62 913	807 070	776 213
3	711 233	116 830	828 063	797 871
4	735 906	66 510	802 416	799 009
5	738 461	62 777	801 238	800 948

Az eljárást itt befejeztük, bár a pontos optimumot nem értük el, de az eltérés 0.1%-nál kisebb, így a megoldás gyakorlatilag optimum. A következő lépésre egyébként egyetlen y érték, a 23. osztályozóhoz tartozó 0.4 változott volna 0,33-ra.

A fogyasztók és a szénfajták árnyékárai a 4. és az 5. lépés szállítási feladatának súlyozott átlagai, a súlyok 0,511 ill. 0,489.

A C modell megoldása során lényegében a B modell optimális termelési szerkezetével kezdtük az eljárást, egyedül a 23. osztályozó termelése tért el a B modell-beli értéktől. (A B. modellben az ötödik iterációban ugyanis ez az érték 0,58 lett volna, ezt az értéket szakértői becslés alapján csökkentettük 0,4-re.) Hat iterációs lépést végeztünk, a legjobb eredményt az ötödik lépésben kaptuk, az optimumtól való eltérés ismét 0,1 százalék alatt maradt.

2. sz. tábla

y vektorok a C modell megoldása során

Osztályozó	Iteráció					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1
18	0	0	0	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1
20	0	0	0	0	0	0
21	1	1	1	1	1	1
22	0	0	0	0	0	0
23	0,58	0,00035	0,00035	0,00035	0,00035	0,00035
24	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1
28	0	0	0	0	0	0
29	1	1	1	1	1	1
30	0	1	1	1	0,355	0,262
31	0,12	1	1	1	1	1
32	1	1	0,51	0,66	0,8	0,896
33	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1
35	1	0,15	1	0,64	0,78	0,612
36	0,006	0,006	0,006	0,0006	0,006	0,006
37	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947
38	1	1	1	1	1	1
39	1	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1	1
44	1	1	1	1	1	1
45	1	1	1	1	1	1
46	1	1	1	1	1	1
47	1	1	1	1	1	1
48	1	1	1	1	1	1
49	1	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	1	1

A 2. számú és az alábbi táblázatban, a B modellhez hasonlóan, összefoglaljuk a C modell számítási eredményeit.

Iteráció	Termelési	Szállítási	Összes	A célfüggvény alsó korlátja
	költség			
1	739 932	66 664	806 056	804 687
2	742 944	63 928	806 872	804 779
3	732 728	63 151	805 879	804 924
4	741 937	63 647	805 584	804 924
5	741 418	63 716	805 134	804 951
6	740 968	64 328	805 296	

Látható, hogy valamennyi iterációs lépés az optimumhoz közeli értéket adott, ugyanakkor a célfüggvény alsó korlátja csak lassan nőtt. Mindkét jelenség ellentmond a B modell megoldása során szerzett tapasztalatoknak, ugyanakkor a kellő pontosság eléréséhez szükséges iterációk száma mindkét esetben lényegében azonos volt.

A C modell esetében a fogyasztók és a szénfajták árnyékárai az 1., 2. a 4. és 5. lépés szállítási feladatának súlyozott átlagai, a súlyok rendre 0.760, 0.005, 0.113, 0.122.

(Beérkezett: 1970. I. 5.)

IRODALOM

[1] BENDERS J. F.: „Partitioning procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Num. Math., 4. (1962).

[2] KOVÁCS Á.: Az éves szénelosztás optimalizálása. Információ Elektronika, 1967/3. Sz.

DECOMPOSITION METHOD FOR THE OPTIMIZATION OF COAL MINING AND DISTRIBUTION

The purpose of the model is to determine a production and transport program to satisfy a fixed demand of coal consumers with minimum cost. The solution of the dual problem enables to work out prices for each coal type, such that the consumers choice based on their own economic interest will not be contradictory to the optimum program.

The model is a linear programing problem

$$\mathbf{x},\ \mathbf{y} \geq 0$$
$$\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{A}_2\mathbf{y} = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{B}\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{c}_1'\mathbf{x} + \mathbf{c}_2'\mathbf{y} \to \min$$

characterized by the fact that the number of variables **x** (delivery directions) is a multiple of that of variables **y** (production level of coal breakers).

This study presents a decomposition method for the solution of the problem and deals with its application to the model. The idea underlying the decomposition method is the Benders decomposition principle and in the case of the model under discussion,the procedure consists in solving a series of transport problems where the constant terms of the constraints come from the solution of a small-size linear program.

Some results of the actual calculation are also presented.

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ОПТИМАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛЯ

Целью модели является определение программы производства и транспорта, по которой с минимальной затратой удовлетворяются установленные потребности потребителей угля. Решение двойстевной задачи позволяет установить такие цены на отдельные виды угля, при которых выборы потребителей, основаны на их экономических интересах, не будут противоположными с решениями оптимальной программы.

Модель

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$$
$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{A}_2 \mathbf{y} = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{c}_1' \mathbf{x} + \mathbf{c}_2' \mathbf{y} \to \min$$

является задачей линейного программирования, для которой характерно, что число переменных x (направления транспорта) во много раз больше числа переменных y (уровни производства сепараторов).

В статье излагается декомпозиционный метод для решения этой задачи, далее занимается применением этого метода к модели. Основным замыслом декомпозиционного метода является декомпозиционный принцип Бендерса и в случае излогаемой модели метод состоит из решения серии транспортных задач, где ограничения для транспортных задач даются в решении небольшой задачи линейного программирования.

Излагаются также некоторые результаты конкретного расчета.