FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Kondor György

Leképezés fix pontjának és a gazdaság egyensúlyi helyzetének numerikus approximációja Scarf módszereivel

(Második, befejező rész*)

II. Közgazdasági alkalmazás: az egyensúlyi ár

II.1. *A feladat megfogalmazása*

A matematikai közgazdaságtan egyik központi elméletét az egyensúlyi helyzetekre: az egyensúlyi termelési és fogyasztási szerkezetekre és az egyensúlyi árakra vonatkozó ismeretek alkotják. A cserét leíró általános gazdasági modellekben a figyelem gyakran kifejezetten az egyensúlyi árak vizsgálatára irányul, mivel ezekből gyakran már levezethetők az egyensúlyi termelési és fogyasztási struktúrák. E fejezetben az egyensúlyi árak szerkezete és megközelítése lesz vizsgálatunk tárgya.

Tegyük fel, hogy a gazdaságban n árufajta szerepel és legyen m a gazdasági ügynökségeknek, a fogyasztóknak, illetve azok képviselőinek és a termelési egységeknek, illetve azok képviselőinek a száma. Feltesszük, hogy az ügynökségek gazdasági tevékenységét a többletkeresleti $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ függvények írják le, amelyek kizárólag a nem-negatív $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ árak függvényei. Az r-edik ($r = 1, \ldots, m$) gazdasági ügynökség $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ többletkeresleti függvénye azt mondja meg, hogy az adott árakon az r ügynökségnek az i árufajtából mennyivel nagyobb a kereslete, mint a kínálata. Ha $g_i^r(\boldsymbol{\pi}) < 0$, akkor az ügynökség csökkenteni kívánja az i árufajtából rendelkezésre álló készleteit és növelni akarja azt pozitív $g_i^r(\boldsymbol{\pi}) > 0$ esetén.

1. Feltesszük, hogy a $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ függvény zérófokú homogén, vagyis feltesszük, hogy a keresletet, illetve kínálatot (pontosabban a többletkeresletet) az árak arányai már meghatározzák. Ezért megengedhető, hogy csupán olyan $\boldsymbol{\pi}$ árrendszereket vizsgáljunk, amelyek rajta vannak az S szimplexen, vagyis amelyekre $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1;\ \pi_i \geq 0$.

2. Mindegyik többletkeresleti függvény folytonos az S szimplexen. Ez egy meglehetősen szigorú feltevés, amelyre a továbbiakban még visszatérünk.

3. Általában feltételezik, hogy mindegyik r ügynökség elkölti jövedelmét, vagyis vásárlásait eladásaiból fedezi.[5]

$$\pi_1 g_1^r(\boldsymbol{\pi}) + \ldots + \pi_n g_n^r(\boldsymbol{\pi}) \equiv 0 \qquad r = 1, \ldots, m \tag{II.1}$$

A továbbiakban azonban csak azt használjuk ki, hogy a piaci összkeresletnek tetszőleges áron vett összege megegyezik a kínálat árösszegével:

* A cikk első része a II. évf. 3. számában jelent meg.

[5] (II.1) a Walras-törvény érvényét mondja ki.

$$\pi_1 g_1(\boldsymbol{\pi}) + \ldots + \pi_2 g_2(\boldsymbol{\pi}) \equiv 0, \tag{II.2}$$

ahol

$$g_i(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{r=1}^{m} g_i^r(\boldsymbol{\pi}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

és e függvényt a piac többletkeresleti függvényének nevezzük.

A $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ árvektorról akkor mondjuk, hogy egyensúlyban van, ha ezeken a $\hat{\boldsymbol{\pi}} = (\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_n)$ árakon

$$g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{II.3}$$

és

$$\hat{\pi}_i\, g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{II.4}$$

(II.3) azt mondja, hogy az egyensúlyi árakon egyik áru kereslete sem haladhatja meg kínálatát. (II.4) szerint, ha egy áru kínálata egyensúlyban meghaladja keresletét, akkor az áru egyensúlyi ára zéró, és ha egy áru egyensúlyi ára pozitív, akkor kereslete megegyezik kínálatával.

A Brouwer-tétel segítségével egyszerűen kimutatható, hogy a fentiekben leírt modellben mindig létezik egyensúlyi árvektor.

Tekintsük ugyanis az S szimplexnek saját magára történő alábbi leképzését:

$$f_i(\boldsymbol{\pi}) = \frac{\pi_i + \lambda \max\,[0, g_i(\boldsymbol{\pi})]}{1 + \lambda \sum_{\nu=1}^{n} \max\,[0, g_\nu(\boldsymbol{\pi})]} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{II.5}$$

ahol λ egy kis pozitív konstans.

Az mindenesetre világos, hogy a (II.5)-ben definiált $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) = (f_1(\boldsymbol{\pi}), \ldots, f_n(\boldsymbol{\pi}))$ leképezés folytonos és hogy az S szimplexet saját magára képezi le. Ebből következik, hogy a Brouwer-tétel alkalmazható és így létezik egy $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ fix pont.

Tegyük fel, hogy $\sum_{\nu=1}^{n} \max[0, g_\nu(\hat{\pi})] > 0$. Ekkor, mivel $f_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) = \hat{\pi}_i$, $\hat{\pi}_i + \lambda \max[0, g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}})] = \alpha\, \hat{\pi}_i$, ahol α (II.5) jobb oldalának nevezője és így előző feltételünk alapján $\alpha > 1$. Ebből azonnal következik, hogy $g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) > 0$ minden i-re. Figyelembe véve, hogy $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ és $\pi_i \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$, eredményünk ellentmond (II.2)-nek, ezért e bekezdés elején tett hipotézisünk hibás. Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{n} \max\,[0, g_\nu(\hat{\boldsymbol{\pi}})] = 0$$

és ezzel igazoltuk a (II.3) relációt. Figyelembe véve most már (II.3)-at, és hogy $\pi_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ (II.2) alapján belátható a (II.4) összefüggések érvénye is.

Ha az első fejezetben ismertetett algoritmust alkalmazzuk a fix pont megközelítésére, akkor P_k minden $\pi^j (j > n)$ vektorát egy olyan indexszel látjuk el, amelyre $f_i(\pi^j) \geq \pi_i^j$ vagy (II.5) szerint, amelyre

$$\max\,[0, g_i(\boldsymbol{\pi}^j)] \geq \pi_i^j \sum_{\nu=1}^{n} \max\,[0, g_\nu(\boldsymbol{\pi}^j)] \tag{II.6}$$

(II.6) alapján az indexezést úgy is elvégezhetjük, hogy megkeressük azt az i indexet, amelyre $g_i(\pi^j)/\pi_i^j$ maximális.

Mielőtt rátérnénk néhány fiktív numerikus példa bemutatására, a matematikai-közgazdasági irodalomban kevéssé járatos olvasó kedvéért még néhány szót szólunk arról, hogy hogyan vezeti le a tradicionális iskola a fogyasztók többletkeresleti függvényeit, és hogy milyen erős megszorítást jelenthet e függvények folytonosságára vonatkozó 2. kikötés.

A tradicionális iskola a többletkeresleti függvényeket az individuumok hozammaximálási törekvéseiből vezeti le. Eszerint mindegyik individuum hasznosságfüggvényét kívánja maximalizálni és e törekvés egyetlen korlátját a pénzügyi mérleg adja. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a tradicionális iskola hogyan jut el a többletkeresleti függvényekhez.

Legyen az r individuum hasznosságfüggvénye

$$u_r = (\sum_{i=1}^{n} a_{ri}^{1-a_r} k_{ri}^{a_r})^{1/a_r} \tag{II.7}$$

ahol k_{ri} az r individuum kereslete az i árufajtából, az a_{r_i} paraméter a kereslet intenzitását fejezi ki az i árufajta iránt és a_r a kereslet árrugalmasságával kapcsolatos állandó.[6]

Tegyük fel, hogy az r individuum az i árufajtából w_{ri} mennyiséggel rendelkezik, amelyet a csere folyamán elfogyaszthat, illetve elcserélhet. Feltételezzük, hogy az individuum annyit költ, amennyi jövedelemre készleteinek eladásából szert tesz. Vagyis az r individuum pénzügyi feltétele:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ri}\pi_i \equiv \sum_{i=1}^{n} k_{ri}\pi_i \tag{II.8}$$

Maximalizáljuk a hasznosságfüggvényt a (II.8) feltétel mellett. Az individuum L_r Lagrange függvénye:

$$L_r = u_r - \mu_r(\sum_{i=1}^{n} \omega_{ri}\pi_i - \sum_{i=1}^{n} k_{ri}\pi_i) \tag{II.9}$$

ahol μ_r a pénz határtermelékenységét adja az r individuum számára.

Deriváljuk (II.9)-et k_{ri} $i = 1, \ldots, n$ szerint. A deriváltat nullával egyenlővé téve és felhasználva a $b_r = 1/1 - a_r$ helyettesítést az optimális ξ_{ri} keresletre

$$-\mu_r^{-b_r}\pi_i^{-b_r}(\sum_{i=1}^{n} a_{ri}^{1-a_r}\xi_{ri}^{a_r})^{1/a_r} a_{ri} = \xi_{ri} \tag{II.10}$$

amelyet összevetve (II.8)-cal

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\omega_{ri}\pi_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_{ri}^{1-a_r}\xi_{ri}^{a_r})^{1/a_r}\sum_{i=r}^{n} a_{ri}\pi_i^{1-b_r}} = \mu^{--b_r} \tag{II.11}$$

és így (II.10) és (II.11) alapján

$$\xi_{ri}(\boldsymbol{\pi}) = \frac{a_{ri}\sum_{\nu=1}^{r}\omega_{r\nu}\boldsymbol{\pi}_\nu}{\pi_i^{b_r}\sum_{\nu=1}^{r} a_{r\nu}\pi_\nu^{1-b_r}} \tag{II.12}$$

[6] E hasznosságfüggvények konstans helyettesítés-rugalmassággal rendelkeznek. Ez azt jelenti, hogy egy rögzített indifferencia felületen mozogva (tehát a jövedelemhatástól eltekintve) a kereslet árrugalmassága konstans. Értéke $b_r = 1/1 - a_r$.

(II.12) megadja az optimális keresletet (keresleti függvényt) az i árufajtából. Ha ebből levonjuk a rendelkezésre álló ω_{ri} készletet (ami kínálatot jelent saját maga vagy más számára), akkor jutunk a $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ többletkeresleti függvényhez.

$$g_i^r(\boldsymbol{\pi}) = \xi_{ri}(\boldsymbol{\pi}) - \omega_{ri} \quad \text{(II.13)}$$

A fenti, igen leegyszerűsített modellben nem volt szó termelésről, csupán cseréről. Ha azonban a termelést is figyelembe kívánjuk venni modellünkben, és feltételezzük — mint ahogyan azt a tradicionális iskola teszi — a termelők racionális magatartását, akkor nem tekinthetünk el attól, hogy az árak a termelésre is hatással vannak. A pénzügyi feltételek ilyen esetekben bonyolultabbak lehetnek, mert a kínálatot adó tényezők ártól függővé válhatnak. Ezek pedig egyáltalán nem biztos, hogy az árak folytonos függvényei. Ekkor a piaci többletkeresleti függvény levezetése nehézségbe ütközhet és nem biztos, hogy az algoritmus alkalmazásához (elvileg) nélkülözhetetlen folytonossági feltétel kielégül. Ilyen probléma adódik például akkor, amikor a termelési egységek (gazdasági ügynökségek) által választható eljárásokat olyan konstans input—output koefficiensek jellemzik, amelyek a közönséges egyszerű lineáris programozási feladatokban szoktak szerepelni. Az ilyen cseremodellek egyensúlyproblémái egészen más kezelést igényelnek. Ilyet mutatunk majd be a III. fejezetben. Ez előtt azonban néhány egyszerű cseremodellre alkalmazzuk Scarfnak az I. fejezetben bemutatott algoritmusát, illetve bemutatjuk az általa kapott eredményeket.

II.2. *Numerikus tapasztalatok. Fiktív gazdasági számpéldák*

Legyen $n = 3$, vagyis három árufajta és $m = 5$, azaz öt individuum. A többletkeresleti függvények paraméterei

$$[W_{ri}] = \begin{bmatrix} 1,0 & 3,0 & 10,0 & 1,0 & 2,0 \\ 1,0 & 2,0 & 20,0 & 5,0 & 6,0 \\ 1,5 & 5,0 & 15,0 & 5,0 & 10,8 \end{bmatrix};$$

$$[a_{ri}] = \begin{bmatrix} 2,0 & 1,0 & 0,8 & 1,5 & 1,0 \\ 3,0 & 0,5 & 1,2 & 1,6 & 1,8 \\ 0,9 & 0,8 & 2,0 & 1,0 & 1,8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 1,3 \\ 0,8 \end{bmatrix}.$$

A fenti táblázatok segítségével felépíthetők a (II.13) $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ függvények, majd ezekből (II.2) alapján az $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi})$ vektor-vektor függvény (II.5) komponensei. Ezek után még a P_k halmazt kell megadni.

A P_k halmazt — első öt elemétől eltekintve — Scarf a $({}^{k_1}/_{160}, \ldots, {}^{k_3}/_{160})$ vektorokkal definiálta, ahol a k_i számok pozitív egészek és összegük 160. Körülbelül $0{,}26 \times 10^8$ ilyen vektor létezik. Az algoritmus azonban már 158 iteráció után az alábbi primitív halmazzal fejeződött be:

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{j_1} & \pi^{j_2} & \pi^{j_3} & \pi^{j_4} & \pi^{j_5} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 101 & 102 & 103 & 102 & 103 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 12 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 25 & 25 & 25 & 24 & 25 \\ 15 & 15 & 14 & 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ahol az oszlopvektorokat még 160-nal végig kell osztani.

A következő lépésben, hogy végül is egyetlen $\check{\pi}$ ponthoz jussunk, az (I.21) kifejezést minimalizáljuk. ($\check{\pi}$-vel a $\hat{\pi}$ közelítő értékét jelöljük.) Eljárhatunk úgy is, ahogyan az (I.22—25)-ben írtuk le. Így kapjuk

$$\check{\pi} = (104{,}9 \quad 12{,}3 \quad 5{,}2 \quad 23{,}6 \quad 14{,}1)$$

és ez alapján a piaci többletkeresletekre:

$$g(\check{\pi}) = (0{,}02 \quad 0{,}02 \quad 0{,}27 \quad 0{,}01 \quad 0{,}00).$$

$\check{\pi}$ képét (II.5)-ből számíthatjuk ki, miután $\check{\pi}$ fenti numerikus értékeit 160-nal végigosztjuk. Az algortimus gyorsaságát λ választása is befolyásolja. Az approximáció eredményességét — közgazdasági szempontból — a többletkeresleteknek a teljes kínálathoz ($[w_{ri}]$ oszlopösszegeihez) való viszonya mutatja.

Scarf [18] tanulmányában három numerikus feladatot ismertet. Második feladatában nyolc árufajta $n = 8$ és öt individuum $m = 5$ volt. A szóba jöhető vektorokat $({}^{k_1}/_{200}, \ldots, {}^{k_8}/_{200})$ adta meg. Az algortimus 640 iteráció után eredményezett csak primitív halmazt. Részletes ismertetésétől terjedelmi korlátok miatt el kell tekintenünk, ezért mindjárt a harmadik, legnagyobb méretű feladat ismertetésére térek rá.

Scarf beszámol arról, hogy e feladat nagyon gyorsan, meglehetősen jó illeszkedéssel fejeződött be annak ellenére, hogy az előzőnél nagyobb méretű. Ez a feladat tíz árufajtát és öt individuumot tartalmazott.

Scarf 3. *példája*

$$[w_{ri}] = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & 20{,}0 & 0{,}1 & 2{,}0 & 9{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 15{,}0 \\ 0{,}2 & 11{,}0 & 12{,}0 & 13{,}0 & 14{,}0 & 15{,}0 & 16{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 9{,}0 \\ 0{,}4 & 9{,}0 & 8{,}0 & 7{,}0 & 6{,}0 & 5{,}0 & 4{,}0 & 5{,}0 & 7{,}0 & 12{,}0 \\ 1{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 8{,}0 & 3{,}0 & 17{,}0 \\ 8{,}0 & 1{,}0 & 22{,}0 & 10{,}0 & 0{,}3 & 0{,}9 & 5{,}1 & 0{,}1 & 6{,}2 & 11{,}0 \end{bmatrix}$$

$$[a_{ri}] = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 & 3{,}0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1{,}2 & 2{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}7 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 9{,}9 & 0{,}1 & 5{,}0 & 0{,}2 & 6{,}0 & 0{,}2 & 8{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}2 \\ 1{,}0 & 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 & 5{,}0 & 6{,}0 & 7{,}0 & 8{,}0 & 9{,}0 & 10{,}0 \\ 1{,}0 & 13{,}0 & 11{,}0 & 9{,}0 & 4{,}0 & 0{,}9 & 8{,}0 & 1{,}0 & 2{,}0 & 10{,}0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2{,}0 \\ 1{,}3 \\ 3{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Scarf most a $({}^{k_1}/_{250}, \ldots, {}^{k_{10}}/_{250})$; $\sum_{i=1}^{10} k_i = 250$ vektorokkal határozta meg a P_k halmazt. Körülbelül $0{,}87 \times 10^{16}$ ilyen vektor létezik. Az algoritmus 468 lépésben fejeződött be. A primitív halmaz vektorainak — az előzőkhöz hasonló — átlagolásával a következő árakat és többletkeresleti vektort kapta:

$$\check{\pi} = \quad (47{,}0 \quad 28{,}5 \quad 24{,}0 \quad 10{,}0 \quad 26{,}7 \quad 19{,}3 \quad 29{,}4 \quad 25{,}7 \quad 24{,}8 \quad 12{,}6)$$

és

$$\mathbf{g}(\check{\pi}) = (0{,}07 \quad 0{,}04 \quad 0{,}03 \quad 0{,}00 \quad 0{,}02 \quad 0{,}00 \quad 0{,}02, \quad 0{,}02 \quad 0{,}02 \quad 0{,}07)$$

Ebben a feladatban a többletkereslet vektora nagyon közel van a nullavektorhoz, ha azt a teljes kínálattal hasonlítjuk össze.

A számításokhoz az IBM 7094-es számítógépet használták fel. A gép a három feladat megoldásához összesen 1 perc 36 másodpercet vett igénybe. Ebből arra következtethetünk, hogy az algoritmus és a programozás továbbfejlesztésével a leképzés fix pontjának approximációja valószínűleg nagyon könnyen lehetséges 15—20 dimenziós feladatok esetén is — írja Scarf.

III. Scarf módosított algoritmusa az egyensúlyi ár és termelési vektor meghatározására, amikor a lehetséges termelési vektorok halmaza konvex poliéder

III.1. *A kérdés felvetése*

E fejezetben olyan termelési rendszerrel foglalkozunk, amelynek véges számú tevékenységét az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,n+1} & \ldots & a_{1,m} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & a_{n,n+1} & \ldots & a_{n,m} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.1)}$$

mátrix oszlopai adják meg. A felhasználást negatív, a kibocsátást pozitív számok jelölik. Az első n eljárás az ún. fel nem használási tevékenységeket adja. A továbbiakban ezek koefficienseit is az a_{ij} szimbólumokkal jelöljük. Tehát az első n tevékenységre, amelyet fel nem használási tevékenységnek is nevezhetünk: $a_{ij} = -1$, ha $i = j$ és $a_{ij} = 0$, ha $i \neq j$.

A fogyasztók aggregált (nem-negatív) piaci keresleti függvényeit a

$$\xi_i(\pi_1, \ldots, \pi_n) = \xi_i(\boldsymbol{\pi}) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.2)}$$

kifejezéssel jelöljük. Legyenek e függvények, amelyek csak nem-negatív árakra vannak definiálva, folytonosak és zérófokú homogének. Ebből következik, hogy az általánosság megszorítása nélkül kiköthetjük, hogy az árak összege 1 legyen.

A piacon a termelés és a csere számára rendelkezésre álló árukészletek nagyságát az $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ vektor adja. Feltesszük, hogy a piac résztvevőinek együttes fogyasztását jövedelmük összege határozza meg, vagyis, hogy

$$\pi_1 \xi_1(\boldsymbol{\pi}) + \ldots + \pi_n \xi_n(\boldsymbol{\pi}) \equiv \pi_1 \omega_1 + \ldots + \pi_n \omega_n \qquad \text{(III.3)}$$

Végül feltesszük, hogy a vizsgálatra kerülő gazdaságot a keresleti függvények, az **A** technikai mátrix és a termelésre rendelkezésre álló tényezőkészletek teljesen leírják.

A fenti jelölés mellett *akkor beszélünk versenyző egyensúlyról, ha a* $\boldsymbol{\pi}$ *árvektor és a tevékenységek alkalmazásának nem-negatív* $x_1, \ldots, x_m$ *terjedelmei kielégítik a következő két kritériumcsaládot:*

1. A kínálat minden egyes termék piacán egybeesik a kereslettel, vagy matematikailag

$$\xi_i(\boldsymbol{\pi}) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.4)}$$

Ez természetesen csak úgy igaz mindegyik piacra, ha a nem-szűkös áruk esetén a maradékváltozókat is figyelembe vesszük.

2. Csak azokat a tevékenységeket használjuk, amelyek a $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ áron nem veszteségesek, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\pi}_i a_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad \text{(III.5)}$$

és az egyenlőség jele érvényes, ha $x_j > 0$. E reláció már magában foglalja azt a követelményt, hogy egy áru ára nulla, ha annak kereslete nem fedi annak kínálatát (vagyis ha a maradékváltozó pozitív).

A fentiekben leírt egyensúlyi helyzet (ár- és termelési vektor) meghatározásának problémáját nem lehet az egyensúlyi árak meghatározásának feladatára redukálni. Most szó van termelésről is (nemcsak cseréről) és a lehetséges termelési vektorok halmaza konvex poliéder. Ekkor az árak bizonyos halmazán a tevékenység alkalmazása bármilyen terjedelemben kifizetődő és az árak bizonyos, más halmazán a termelés nem fizetődik ki. A termelési egységek keresleti és kínálati függvényei ilyen esetben nem folytonosak és így a többletkeresleti függvények sem, ami pedig az előző fejezet egyik alapvető kikötése volt. Megállapíthatjuk tehát, hogy a szóban forgó problémánk az előző fejezetben tárgyalttól eltér, arra visszavezetni nem lehet.

Eddigi feltételeinken túlmenően kikötjük még, hogy a tevékenységek terjedelmeinek azon halmaza, amely növeli az árufajták nem-negatív nettó kínálatait, legyen korlátos. Matematikailag: legyen korlátos az az $x = (x_1, \ldots, x_m)$ vektorokból álló halmaz, amelyre

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + \omega_i \geq 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(III.6)}$$

(Az **A** mátrix konstrukciójából következik, hogy ez a halmaz nem üres.) Alkalmilag felhasználjuk, hogy $\omega_i > 0$ minden i-re, habár ez a kikötés realisztikusabb feltétellel is helyettesíthető.

Hasonlóan, mint az előző fejezetben, az egyensúlyi árvektor kiválasztásánál nem kerül szóba az S szimplex akármilyen eleme. Itt is kiválasztunk egy véges $P_k : \boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^n, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorhalmazt és ezek közül keressük ki azokat, amelyek legjobban közelítik a kívánt árvektort.

Miután a $\boldsymbol{\pi}^{n+1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorokat kiválasztottuk, megkonstruálunk egy $\mathbf{B}_k$ mátrixot. $\mathbf{B}_k$ első n oszlopát az egységmátrix adja. A $\mathbf{B}_k$ mátrix j oszlopát $n + 1 \leq j \leq k$-ra a $\boldsymbol{\pi}^j$ vektorral állítjuk kapcsolatba, az alábbi szabálynak megfelelően:

Legyen

$$\begin{matrix} a_{1l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nl} \end{matrix}$$

az **A** technikai mátrixnak az a tevékenysége, amely a $\boldsymbol{\pi}^j$ árakon a maximális profitot adja. (Ha több ilyen van, akkor ezek között az egyik.)

1. Ha e profit *pozitív*, akkor $\mathbf{B}_k$ oszlopát per definitionem az alábbi vektor adja:

$$\begin{matrix} -a_{1l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a_{nl} \end{matrix}$$

2. Ha a $\boldsymbol{\pi}^j$ árakon elérhető legnagyobb profit *zéró vagy negatív*, akkor $\mathbf{B}_k$ j oszlopát definíció szerint

$$\begin{matrix} \xi_1(\boldsymbol{\pi}^j) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n(\boldsymbol{\pi}^j) \end{matrix}$$

alkotja. Így tehát a P_k halmazhoz rendelt $\mathbf{B}_k$ mátrix általános alakja

$$\mathbf{B}_k = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & & \boldsymbol{\pi}^{j_1} & & \boldsymbol{\pi}^{j_2} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{1l} & \ldots & \xi_1(\boldsymbol{\pi}^{j_2}) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{nl} & & \xi_n(\boldsymbol{\pi}^{j_2}) \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{(III.7)}$$

ahol a felülírott $\boldsymbol{\pi}^{j_1}$ és $\boldsymbol{\pi}^{j_2}$ az árak és oszlop közötti kapcsolatot jelzi.

Eltekintve a maradékváltozókra vonatkozó első n oszloptól, $\mathbf{B}_k$ oszlopai vagy az adott áron vett piaci keresletekből állnak, vagy azon tevékenységek negatívjaiból, amelyek az adott árakon maximalizálják a profitot. Elképzelhető természetesen, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix egyes oszlopainak negatívjai igen sokszor szerepelnek a fenti mátrixban. $\mathbf{B}_k$ oszlopainak száma általában igen nagy, és szerencse, hogy sohasem szükséges, hogy a $\mathbf{B}_k$ mátrix explicite tárolva legyen a számítógép memóriaegységében.

Számunkra a $\mathbf{B}_k\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega}$ egyenletrendszer nem-negatív megoldásai lesznek lényegesek. A rendszer egyenletei a következő struktúrával rendelkeznek

$$\sum_j a_{il(j)} x_j + \sum_j \xi_i(\boldsymbol{\pi}^j)\, y_j = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.8)}$$

Nyilvánvaló, hogy az l index j-től függ és azokra a tevékenységekre vonatkozik, amelyek a $\boldsymbol{\pi}^j : \boldsymbol{\pi}^j \in P_k$ áron maximalizálják a profitot úgy, hogy a profit pozitív. A (III.8)-relációban az ezeknek a tevékenységeknek megfelelő z_j változókat jelöljük x_j-vel, míg a második szummában y_i-t írunk z_j helyébe, hogy hangsúlyozzuk azt a különbséget, amely a két oszlopfajta között fennáll.

A $\mathbf{B}_k$ mátrix (III.7) konstrukciójából következik, hogy a következő összefüggések teljesülnek:

1. Ha valamely $y_j > 0$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i^j a_{il} \leq 0$ *minden* l-re ($l = 1, \ldots, m$).
2. Ha bármelyik fel nem használási tevékenységtől *eltérő* l tevékenység pozitív x_j súllyal rendelkezik, akkor erre $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i^j a_{il} > 0$.

Az egyensúlyi árvektort és termelési tervet a $\mathbf{B}_k\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega}$ *egyenletrendszernek olyan nem-negatív bázismegoldásának segítségével kívánjuk megközelíteni, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a* $\boldsymbol{\pi}^j$ *árak mindegyike, amelyek pozitív* x_j- *vagy* y_j-*re vonatkoznak, közel vannak egymáshoz és hogy a* $\boldsymbol{\pi}^j$ *áraknak* i *koordinátája közel van zéróhoz, ha az* i *maradékváltozó pozitív.*

P_k valamely n elemű $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ halmazának elemeiről akkor mondjuk azt, hogy P_k-ban közel vannak egymáshoz, ha azok primitív halmazt alkotnak A következőkben azt mutatjuk ki, hogy egy ilyen megoldás az egyensúlyi árvektor közelítésére szolgálhat, ha e primitív halmaz eleget tesz az I.3-ban tárgyalt 2. tétel állításának.

III.2. *Matematikai tárgyalás*

A 2. tétel értelmében mindegyik P_k felosztásban létezik olyan $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ elemű primitív halmaz, amelyhez található $\mathbf{B}_k$-ban olyan bázis, amelyik $\mathbf{B}_k$ $j_1, \ldots, j_n$ oszlopaiból áll. Jelöljük a szóban forgó primitív halmaz által meghatározott primitív alszimplexet σ_0-lal. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy e primitív halmaz első $j_1, \ldots, j_s$ elemére vonatkozó tevékenység származik az $\mathbf{A}$ mátrixból és a többi $n-s$ számú felel meg a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)^*$ oszlopnak. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}_k$ minden bázisában az $\mathbf{A}$ mátrix tetszőleges oszlopa legfeljebb egyszer szerepelhet, mert a bázisban az oszlopok lineárisan függetlenek.

(III.8) helyére ekkor az alábbit írhatjuk:

$$-\sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)}\, x_{j_\nu} + \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu})\, y_\nu = \omega_i \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.9)}$$

ahol az első szummában az l_ν oszlopindex j_ν függvénye és az $a_{il_\nu(j_\nu)}$ koefficiensek arra a tevékenységre vonatkoznak, amely a $\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}$ $\nu = 1, \ldots, s$ árrendszerrel maximálja a profitot úgy, hogy a profit pozitív.

A (III.8) reláció után két megállapítást tettünk $\mathbf{B}_k$ konstrukciójával kapcsolatban. Figyelembe véve (III.9)-et, 1. most így fogalmazható:

1'. Ha valamely $y_\nu > 0$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il} \leq 0 \text{ minden } l\text{-re} \tag{III.10}$$

(tehát nemcsak azokra, amelyek (III.9) első szummájában szerepelnek).

Mielőtt 2.-t átfogalmaznánk, vegyük figyelembe a következőt:

A $\mathbf{B}_k$ mátrix konstrukciójából és a 2. tételből folyik, hogy (III.9)-ben akkor és csak akkor szerepel egy fel nem használási tevékenység, ha a primitív halmazban szerepel az annak megfelelő $\boldsymbol{\pi}^j$; $j \leq n$. Emlékeztetőül megemlítjük, hogy a fel nem használási tevékenység alkalmazásának terjedelmét mérik az x_j maradékváltozók. Ha tehát a 2. tételt kielégítő bázisban a fel nem használási tevékenységnek megfelelő $x_j > 0$ (elégséges feltenni, hogy a fel nem használási tevékenység szerepel a bázisban), akkor a megfelelő primitív halmazban van olyan árvektor, amelynek i-edik koordinátája zéró.

2'. A (III.9)-ben szereplő bármelyik l_ν tevékenységre — *beleértve* a fel nem használási tevékenységeket is

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il_\nu(j_\nu)} \geq 0 \qquad \nu = 1, \ldots, s \tag{III. 11}$$

ahol az egyenlőség jele csak a fel nem használási tevékenységekre vonatkozhat. Ha az l_ν tevékenység egy fel nem használási tevékenység, (III.11) azt állítja, hogy a szóban forgó π_i^j ár csak nem-pozitív lehet. Összevetve ezt az árak nemnegativitására tett kikötéssel, az adódik, hogy ez az ár nulla.

Az alábbiakban kimutatjuk, hogy ha az S szimplex P_k felosztása elég finom, vagyis ha a primitív alszimplexek maximális átmérőjénél nem kisebb δ elég kicsi, akkor

a) legalább egy $y_\nu > 0$.

Ebből (III.10) és (III.11) figyelembevételével következik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix mindazon tevékenységére, amely (III.9)-ben szerepel (vagyis mindenképpen azokra, amelyekre $x_{j_\nu} > 0$):

b) $$\sum_{i=1}^{n} \pi_i a_{il_\nu(j_\nu)} \approx 0\,; \qquad \boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$$

és az $\mathbf{A}$ mátrix minden más tevékenységére

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i a_{il} \lesssim 0\,; \qquad \boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$$

amin azt értjük, hogy a többi tevékenység értékelése nem haladhat meg egy nullához közeli értéket. Itt a $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ vektorról csak azt tesszük fel, hogy az a 2. tételben szereplő $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ vektorokkal generált primitív alszimplexnek egy tetszőleges eleme. Közgazdaságilag ez azt jelenti, hogy a szóban forgó bázismegoldásnak megfelelő tevékenységek minden $\boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$-ra közelítőleg eleget tesznek a rentabilitás követelményének.

Ezután be fogjuk látni, hogy ha az S szimplex felosztása elég finom, akkor

c) $$\sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \approx 1 .$$

Ebből egyszerűen következik majd, hogy (III.9) közelítőleg biztosítja a kereslet és kínálat egyensúlyát az összes áruk piacán. Vagyis a szóban forgó primitív alszimplexnek bármely pontja közelítőleg betölti az egyensúlyi árrendszer szerepét.

Legyen az S szimplexen $\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i$ alsó határa ω_0. Ez pozitív, mert $\omega_i > 0$ $i = 1, \ldots, n$ és $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. Jelöljük $\bar{A}_j$-vel az $\mathbf{A}$ mátrix koefficienseinek abszolút értékeiből képzett mátrix j-edik oszlopának oszlopösszegét.

A (III.6) egyenlőtlenségrendszert kielégítő nem-negatív x vektorok halmaza feltevésünk értelmében korlátos. Maximáljuk e halmazon a $\sum_{j=1}^{m} \bar{A}_j x_j$ függvényt és jelöljük e függvény maximumát K-val.

A $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\pi}) = (\xi_1(\boldsymbol{\pi}), \ldots, \xi_n(\boldsymbol{\pi}))$ vektor-vektor függvény folytonossága azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy

$$|\xi_i(\boldsymbol{\pi}') - \xi_i(\boldsymbol{\pi}'')| \leq \varepsilon \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\tag{III. 12}$$

hacsak $$|\pi_i' - \pi_i''| \leq \delta \qquad i = 1, \ldots, n$$

Folytonos függvény zárt tartományban felveszi maximumát. Legyen

$$\max_{i} \max_{\pi \in S} \xi_i(\boldsymbol{\pi}) = \xi^0 \tag{III. 13}$$

Végül megjegyezzük, hogy a továbbiakban $\boldsymbol{\pi}$-vel annak a primitív alszimplexnek egy tetszőleges elemét jelöljük, amelyet az S szimplexen a $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ primitív halmaz határoz meg.

Az a) állítás belátása

Legyen az S szimplex felosztása oly finom, vagyis ε és ezzel együtt a primitív alszimplexek maximális átmérőjénél nem kisebb $\delta = \delta(\varepsilon)$ oly kicsi, hogy

$$\delta < \frac{\omega_0}{K} \tag{III. 14}$$

Ekkor van legalább egy olyan y_ν, amelyre $y_\nu > 0$.

Tegyük fel ugyanis az állítás ellenkezőjét. Ekkor (III.9) az alábbi alakot öltené:

$$\sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{III. 15}$$

Szorozzuk ezt az egyenlőséget végig π_i-vel, $\boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$, és összegezzük i-re

$$-\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{s} \pi_i a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i$$

vagy másképpen

$$-\sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il_\nu(j_\nu)}\right) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} (\pi_i^{j_\nu} - \pi_i)\, a_{il_\nu(j_\nu)}\, x_{j_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, \omega_i\,. \tag{III. 16}$$

A 2. észrevételből következik, hogy a bal oldal első tagja nem-pozitív, ezért (III.16) bal oldala nem nagyobb, mint

$$\delta \sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu} \sum_{i=1}^{n} |a_{il_\nu(j_\nu)}| = \delta \sum_{\nu=1}^{s} \bar{A}_{j_\nu}\, x_{j_\nu} \leq \delta K\,. \tag{III. 17}$$

Vagyis (III.17)-ből

$$\delta K \geq \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, \omega_i \geq \omega_0 \tag{III. 18}$$

(III.18) ellentmond (III.14)-nek, így indirekt feltevésünk hibás. Kell tehát pozitív y_ν-nek léteznie.

A b) állítás igazolása

Az *a)* állításból tudjuk már, hogy ha az S szimplex felosztása elég finom, ha (III.14) fennáll, akkor létezik pozitív y_ν. Ezért (III.10)-ból minden l-re:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il} + \sum_{i=1}^{n} (\pi_i^{j_\nu} - \pi_i)\, a_{il} \leq 0$$

és így, ha $\boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il} \leq \delta\, \bar{A}_l \tag{III. 19}$$

Ehhez teljesen hasonlóan kapjuk (III.11)-ből, hogy mindegyik bázisban szereplő l_ν tevékenységre

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il_\nu} \geq -\delta\, \bar{A}_{l_\nu} \tag{III. 20}$$

amiből (III.19) alapján mindegyik bázisban szereplő tevékenységre

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il_\nu}\right| \leq \delta\, \bar{A}_{l_\nu} \tag{III. 21}$$

és minden más tevékenységre (III.19) érvényes. Ezzel a *b)* állítás fennállását beláttuk.

A c) állítás igazolása

Szorozzuk meg a (III.9) egyenlőséget π_i-vel és összegezzük i-re.

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{s} \pi_i\, a_{il_\nu(j_\nu)}\, x_{j_\nu} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=s+1}^{n} \pi_i\, \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu})\, y_\nu = \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, \omega_i \tag{III. 22}$$

(III.21)-ből

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{s} \pi_i\, a_{il_\nu(j_\nu)}\, x_{j_\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu} \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il_\nu(j_\nu)} \leq \sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu}\, \delta\, \bar{A}_{l_\nu} \leq \delta K\,. \tag{III. 23}$$

Fontoljuk meg továbbá azt is, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=s+1}^{n} \pi_i \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu = \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \xi_i(\boldsymbol{\pi})\right) \left(\sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i\right) \sum_{\nu=s+1}^{n} \left(\xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) - \xi_i(\boldsymbol{\pi})\right) y_\nu$$

és így (III.12)- és (III.3)-ból, tekintettel arra, hogy $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \varepsilon\right) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=s+1}^{n} \pi_i \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \varepsilon\right) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu . \tag{III. 24}$$

(III.23) és (III.24) felhasználásával (III.22)-ből

$$-\delta K + \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \varepsilon\right) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i \leq \delta K + \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \varepsilon\right) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu$$

amiből most már kapjuk, hogy

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \delta K}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \varepsilon} \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \delta K}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \varepsilon}$$

vagy még inkább:

$$1 - \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 + \varepsilon} \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq 1 + \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} \tag{III. 25}$$

amiből

$$\left| \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu - 1 \right| \leq \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} . \tag{III. 26}$$

Ez azt jelenti, hogy ε és ezzel együtt $\delta = \delta(\varepsilon)$ elég kicsire választásával $\sum\limits_{\nu=s+1}^{n} y_\nu$ tetszőleges közel „vihető" az egységhez, feltételezve, hogy a primitív alszimplexek maximális átmérője kisebb, mint $\delta < \dfrac{\omega_0}{K}$.

A fentiek segítségével azt kell még belátnunk, hogy ha S felosztása elég finom, akkor az a megoldás, amely (III.9)-et kielégíti, közelítőleg (III.4)-nek is eleget tesz.

Mivel (III.9) baloldalának második szummájára:

$$\sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu = \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{\pi}) y_\nu + \sum_{\nu=s+1}^{n} \left(\xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) - \xi_i(\boldsymbol{\pi})\right) y_\nu \tag{III.27}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

ezért

$$\left(\xi_i(\boldsymbol{\pi}) - \varepsilon\right) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu \leq \left(\xi_i(\boldsymbol{\pi}) + \varepsilon\right) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \qquad i = 1, \ldots, n$$

Vonjunk le mindegyik oldalból $\xi_i(\pi)$-t:

$$(\xi_i(\pi) - \varepsilon) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu - \xi_i(\pi) \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\pi^{j_\nu}) y_\nu - \xi_i(\pi) \leq$$

$$\leq (\xi_i(\pi) + \varepsilon) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu - \xi_i(\pi) \tag{III.28}$$

amiből (III.25) segítségével, tekintettel ξ° (III.13)beli definíciójára:

$$-(\xi^\circ - \varepsilon)\frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 + \varepsilon} - \varepsilon \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\pi^{j_\nu}) y_\nu - \xi_i(\pi) \leq (\xi^\circ + \varepsilon)\frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} + \varepsilon \tag{III.29}$$

A (III.29) egyenlőtlenségből (III.9) alapján azonban már egyszerűen következik, hogy

$$|\xi_i(\pi) - \sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} - \omega_i| \leq (\xi^\circ + \varepsilon)\frac{\delta k + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} + \varepsilon \tag{III.30}$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy ha $\varepsilon \to 0$ (és ezzel együtt természetesen $\delta \to 0$), akkor az egyre finomabb felosztásoknak és a 2. tételnek megfelelő primitív halmazok végtelen sorozata nem szükségképpen konvergens. Nyilvánvaló azonban, hogy létezik *legalább* egy torlódási pont és így a fentiek nemcsak az approximáció pontosságára adnak becslést, hanem egyben azt is bizonyítják, hogy a problémának van *egzakt* megoldása is.

A fentiekben a 2. tételnek eleget tevő primitív halmaz által generált σ_0 primitív alszimplex tetszőleges pontja betöltötte a közelítő egyensúlyi ár szerepét. Ahhoz, hogy végül is egyetlen közelítő árrendszerhez jussunk, eljárhatunk például úgy, hogy a (III.30) becslés pontosságát élesítjük.

Az a γ_0 érték keresendő, melyre

$$\min \gamma = \gamma_0 \tag{III.31}$$

alávetve a következő feltételeknek:

$$-\gamma \leq \bar{\xi}_i(\pi) - \sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)} - \omega_i \leq \gamma \qquad i = 1, \ldots, n \tag{III.32}$$

ahol a $\bar{\xi}_i(\pi)$ függvény a $\xi_i(\pi)$ függvény lineáris közelítését adja és γ tetszőleges nem-negatív szám. (Feltesszük, hogy a $\xi_i(\pi)$ függvény Taylor-sorba fejthető hasonlóan az (I.22–25) feladat $f_i(\pi)$ függvényéhez.)

És mivel a π vektort a szóban forgó primitív alszimplexből választjuk:

$$\pi_i \geq \min [\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \qquad i = 1, \ldots, n \tag{III.33}$$

valamint

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \, ; \; \pi_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{III.34}$$

III.3. *Numerikus tapasztalatok*

Az első fejezethez hasonlóan vesszük fel itt is a P_k halmazt. Feltesszük, hogy P_k elemeit $({}^{k_1}/_D, \ldots, {}^{k_n}/_D)$ adja, ahol a k_i számok pozitív egészek és összegük D. Az I.3-ban tárgyalt algoritmus befejeződése után a primitív halmazban szereplő vektorokat most is az előzőkhöz hasonlóan átlagoljuk. Scarf felteszi, hogy a primitív halmaz környezetében a keresleti függvények jól közelíthetők Taylor-soruk első két tagjával, és itt azt a vektort választja, amely minimalizálja a kereslet és kínálat közötti maximális eltérést. (Lásd a (III.31—34) feladatot.)

Feladatunkban, amely csupán numerikus tapasztalatszerzésre való és nem akarja a valóság látszatát kelteni, hat árufajta szerepel:

1. Tőke, amely a folyó periódus végén áll rendelkezésre (t. p. v.).
2. Tőke, amely a folyó periódus elején áll rendelkezésre (t. p. e.).
3. Szakmunka (sz. m.).
4. Szakképzetlen (szkl. m.).
5. Nem-tartós jószágok (nt. j.).
6. Tartós jószágok (t. j.).

Az adott időperiódus alatt a termelés három szektorban folyik. Az egyik tartós fogyasztási cikkeket, a másik nem-tartós fogyasztási cikkeket gyárt, míg a harmadik a periódus végén rendelkezésre álló tőkét előállító szektor. Az első hat tevékenység a fel nem használási tevékenységekkel azonos.

A tartós fogyasztási cikkek szektorát az alábbi két (hetedik és nyolcadik) tevékenység írja le:

7	8
4	4
−5,3	−5
−2	−1
−1	−6
0	0
4	3,5

ahol az árufajták sorrendje a fentiekben van megadva. E két tevékenység közül az első olyan eljárást ad, amely 4 egység tartós fogyasztási cikket állít elő, mialatt 5,3 egység tőkét, 2 egység szakmunkát és 1 egység szakképzetlen munkát használ fel. Az 5,3 egység tőke a használat következtében a periódus végére részlegesen elértéktelenedik és 4 egységre csökken. E szektor második tevékenysége a szakképzett és szakképzetlen munka helyettesítését teszi lehetővé.

A nem-tartós javak szektorában három lehetséges tevékenység van: a kilencedik, a tizedik és a tizenegyedik.

9	10	11
1,6	1,6	1,6
−2	−2	−2
−2	−4	−1
−3	−1	−8
6	8	7
0	0	0

Mint látható, itt is a szakmunka és a szakképzetlen munka különböző mértékű helyettesítésére van lehetőség.

Végül a tőkejószág szektor az alábbi három tevékenységet tartamazza:

12	**13**	**14**
0,9	7	8
−1	−4	−5
0	−3	−2
0	−1	−8
0	0	0
0	0	0

ahol az első oszlop a tőke értékcsökkenésének rátáját adja meg, ha beruházásba nem fognak bele.

Hipotétikus gazdaságunk öt fogyasztót is magában foglal, amelyek különböző keresleti függvényhalmazzal és kezdeti árukészlet-vektorral rendelkeznek. A következő mátrix írja le az öt fogyasztó kezdő készletét:

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
1. fogyasztó	0	3	5	0,1	0	1
2. fogyasztó	0	0,1	0,1	7	0	2
3. fogyasztó	0	2	6	0,1	0	1,5
4. fogyasztó	0	1	0,1	8	0	1
5. fogyasztó	0	6	0,1	0,5	0	2

Mint látható, a fogyasztók a periódus elején nem rendelkeznek sem nemtartós javakkal, sem olyan tőkejószággal, amelyik a periódus végén áll rendelkezésre. Az 5. fogyasztó rendelkezik a legtöbb tőkével a periódus elején, míg a kétfajta munkából és a különböző tartósságú fogyasztási javakból különféle mértékben részesednek.

A keresleti függvényeket Scarf konstans helyettesítés-rugalmasságú hasznossági függvényekből vezette le, az előző fejezet (II.8—13) relációinak megfelelően. Az r fogyasztó keresletét az i árufajtából a (II.12) képlet adta, amiből megkaphatjuk az i árura irányuló teljes keresletet:

$$\xi_i(\pi) = \sum_{r=1}^{5} \xi_{ri}(\pi) \tag{III.35}$$

ω_{ri} értékeit (a gazdasági ügynökségek, illetve az individuumok tulajdonában levő kezdeti készletek nagyságait) az előző táblázatból olvashatjuk le. Az i árufajtából rendelkezésre álló összes árumennyiséget $\sum_{r=1}^{5} \omega_{ri}$ adja. A II. fejezetben, így most is, a b_r paraméterek adják a fogyasztók helyettesítés-rugalmasságait és a_{ri} méri az r fogyasztók keresleteinek intenzitásait az i; $i = 1, \ldots, 6$ áruk iránt. Az a_{ri} paraméterek numerikus értékeit a túloldali táblázatból kapjuk.

Mint ahogyan látható, nincs olyan fogyasztó, amelynek kereslete volna tőkéből a periódus *elején*, de lehet kereslete az időszak *végén* — függően az időszak áraitól. Az időszak végén rendelkezésre álló tőke iránti keresletet mint megtakarítási hajlamot interpretálhatjuk. A szakmunka és a szakképzetlen

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
1. fogyasztó	4	0	0,2	0	2	3,2
2. fogyasztó	0,4	0	0	0,6	4	1
3. fogyasztó	2	0	0,5	0	2	1,5
4. fogyasztó	5	0	0	0,2	5	4,5
5. fogyasztó	3	0	0	0,2	4	2

munka oszlopainak adatait a fogyasztó saját munkaidejének csökkentésére (a szabadidő növelésére) irányuló hajlamát fejezik ki.

Végül a helyettesítés-rugalmasság konstans koefficienseit a következő táblázat szolgáltatja:

Fogyasztó	b_i
1	1,2
2	1,6
3	0,8
4	0,5
5	0,6

A példa numerikus megoldásában a P_k halmaz π^j elemeiről feltesszük, hogy $({}^{k_1}/_{100}, \dots {}^{k_6}/_{100})$; $\sum_{j=1}^{6} k_j = 100$ alakúak. Ezzel a számításokhoz szükséges minden numerikus adatunk megvan.

Az algoritmus 913 primitív halmaz megvizsgálása után fejeződött be. Az IBM 7094-es gépen a számítási idő alig haladta meg az egy percet. Eredménye a következő primitív halmaz:

π^{j_1}	π^{j_2}	π^{j_3}	π^{j_4}	π^{j_5}	π^{j_6}
22	22	22	22	22	23
22	21	22	22	24	22
20	19	19	19	19	20
7	7	7	6	6	7
12	12	12	12	11	12
19	19	18	19	18	16

E hat vektor kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban áll a B mátrixnak olyan hat oszlopával, amelyek a $\mathbf{Bz} = \omega$ egyenletrendszernek megengedhető bázisát alkotják. A fenti vektorok közül az első négy a 9., 7., 10. és a 11. tevékenységhez kapcsolódik, a leírás sorrendjében. A π^{j_5} vektor az összes tevékenység esetében negatív profitot ad és ezért a keresletek (egyik) oszlopának felel meg a **B** mátrixban. π^{j_6} a 13. tevékenységgel kapcsolatos.

Végül a hat vektort a lineáris programozás segítségével oly módon közepeltük, hogy a kereslet és kínálat különbsége minimális legyen [lásd a (III. 31—34) feladatot]. Eredményül a következőket kaptuk:

$$\check{\pi} = (21{,}8 \quad 21{,}8 \quad 19{,}4 \quad 7{,}4 \quad 12{,}2 \quad 17{,}4).$$

Tevékenység	Terjedelem	Profit
7	0,86	–0,05
8	0,0	–0,25
9	0,10	0,03
10	1,41	0,04
11	1,31	–0,02
12	0,0	–0,02
13	0,47	0,00
14	0,0	–0,33

A 7-es és 8-as tevékenység tartozik a tartós fogyasztási cikkeket gyártó szektorba. A nem-tartós szektor három tevékenysége a 9-es, a 10-es és a 11-es. Végül az utolsó három alkotja a periódus végén rendelkezésre álló tőkét előállító szektort. (Az első hat adja a fel nem használási tevékenységeket.)

Az utolsó oszlopban található profitokat már a normált árvektorral számítottuk, ahol $\hat{\pi}$ úgy van normálva, hogy az árak összege 1 legyen.

Végső összegezésként az ezekre az árakra számított piaci keresletet hasonlítsuk össze a nettó kínálattal, amelyet a tevékenységek fenti terjedelmei és a kezdeti árukészletek alapján határozhatunk meg:

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
Kereslet	11,27	0,00	1,02	2,17	21,08	10,98
Kínálat	11,27	–0,01	1,01	2,14	21,06	10,96

Úgy tűnik, hogy a $\hat{\pi}$ árvektor és a fenti tevékenységterjedelmek a kereslet és kínálat egyensúlyának jó közelítését nyújtják. A profitok tekintetében azonban, amelyeknek zérónak kellene lenniök olyan tevékenységek esetén, amelyeket felhasználunk és nem-pozitívnak a többiekre vonatkozóan, láthatóan kevésbé kielégítő az eredmény. Ez kétségtelenül annak tulajdonítható, hogy a végső lineáris programozási problémában a kereslet és kínálat eltérését minimalizáltuk, és ez a cél a profitok tekintetében nem vezetett teljesen kielégítő eredményhez. De sok más átlagolási eljárás is használható és ezek behatóbb vizsgálatot érdemelnek, mielőtt nagyobb problémát próbálunk ki. Hangsúlyoznunk kell, hogy a végső lineáris programozási probléma számítási ideje alig egy-két másodperc, szinte elhanyagolható. Sok idő a kívánt tulajdonságú primitív halmaz meghatározásához kell. Ezzel a számítással kapjuk meg azt a környezetet, amelyben a közelítő egyensúlyi árvektor fekszik.

A példa vizsgálata során látható, hogy a ma rendelkezésre álló tőke azonos azzal, amit ma kell fizetni a holnapi tőkéért, így a valódi kamatláb természetesen zérónak veendő. Ez abban a tényben tükröződik, hogy a tőke kezdeti készlete a periódus végére 12,1 egységről 11,3 egységre csökken, bár a 13. tevékenység, a tőkét termelő tevékenység 0,47 terjedelemben kihasználásra kerül.

Összehasonlítás kedvéért vezessünk be modellünkbe egy további termelő tevékenységet – a tizenötödiket – a tőkejavakat termelő szektorban. A

15
6,4
−3,5
−1
−5
0
0

tevékenység 0,13 profitot hoz az eredeti modell normált egyensúlyi árain, azaz, ha ez a tevékenység rendelkezésre áll, bizonyára felhasználásra is kerül. Ésszerűnek tűnik arra gondolni, hogy e tevékenység bevezetése a kamatlábat az előző zéró színvonalhoz képest növelni fogja.

Ha most is ugyanazzal az árráccsal dolgozunk, mint az előbbiekben, a számítás 1185 árvektor kiszámítása után körülbelül egy perc húsz másodperc gépi számítási idő alatt fejeződik be az IBM 7094 számítógépen. Átlagolás után a következő árvektort és tevékenység terjedelmeket kapjuk:

$$\check{\pi} = (18{,}8 \quad 22{,}0 \quad 19{,}6 \quad 7{,}1 \quad 13{,}4 \quad 19{,}1)$$

Tevékenység	Terjedelem	Profit
7	0,69	−0,11
8	0,0	−0,30
9	0,0	0,06
10	1,79	0,08
11	0,76	0,04
12	0,0	−0,05
13	0,0	−0,22
14	0,0	−0,56
15	0,95	−0,12

A kereslet és kínálat közötti új összefüggést az alábbi táblázat adja:

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
Kereslet	12,98	0,00	1,03	2,41	19,73	10,29
Kínálat	12,93	−0,01	1,02	2,40	19,68	10,28

Az új, 15. tevékenység elsősorban a 11. tevékenység terhére lép be, amelyben nagymennyiségű szakképzetlen munkát használnak fel nem-tartós cikkek termelésére. Ezért a nem-tartós cikkek ára emelkedik és fogyasztása csökken. A kamatráta várt növekedése is bekövetkezik a megtakarítás növekedésével együtt.

*

A tárgyalt példák azt a sebességet és pontosságot jelzik, amellyel az algoritmus egy közepesen nehéz feladatnál működik. Scarf dolgozata végén kifejti meggyőződését, hogy ez mind sebességben, mind pontosságban finomabb programozási technikák segítségével még tetemesen javítható. Így olyan problémákat is megoldhatunk majd, amelyek több fajta árut tartalmaznak.

(Beérkezett: 1969. VI. 15.)