Chikán Attila

Többraktáras készletezési rendszerek matematikai modelljei

A szocialista bővített újratermelés különböző szféráiban — mindenütt, ahol a termelési folyamat egyes szakaszai térben vagy időben elszakadnak egymástól — elkerülhetetlen és a folyamatok stabilitása szempontjából alapvető jelentőségű különböző készletek tartása. A készletek optimális szintje igen jelentős az egész gazdálkodás hatékonysága szempontjából. A készletek növekedése vagy csökkenése rendszerint ellentétes irányú költségmozgásokat eredményez a gazdálkodás kapcsolódó egyéb területein.

A megfelelő nagyságú készletek más erőforrások felszabadításával járhatnak, ugyanakkor a készletek túlzott nagysága — mivel lényegében inaktív eszközlekötést jelent — egyértelműen előnytelen. A ráfordítások helyettesíthetősége és különböző hatásfoka szükségessé teszi optimalizálási feladatok megfogalmazását, és a korszerű matematikai eljárásoknak a készletgazdálkodási döntések előkészítésében való felhasználását.

A problémák modellizálhatóságát jelentősen megkönnyíti az a tény, hogy — véleményem szerint — a készletgazdálkodásnak önálló tevékenységként való kezelése rendszerint elfogadható absztrakció. Ennek oka, hogy a készletgazdálkodási döntések a gazdaság más szféráiban hozott döntésekhez képest viszonylagos függetlenséggel bírnak: abban az értelemben, hogy a készletezéssel kapcsolatos költségek csökkentése átlagos gazdasági feltételek mellett egyértelműen célszerű.

A készletproblémának egy általános megfogalmazását a következőképpen adhatjuk meg [17]:

„A készlet úgy definiálható, mint valamely passzív *forrás*, azzal a feltétellel, hogy ennek a forrásnak gazdasági értelemben vett értéke van. Ebből következik, hogy *kereslet* jelentkezik iránta. A kereslet a készletből output útján elégíthető ki. A készlet helyreállítása *input* útján történik. A termelés ilyen input és/vagy output folyamnak fogható fel."

$$-\text{input}\rightarrow \boxed{\text{készlet}} -\text{output}\rightarrow \boxed{\text{kereslet}}$$

Valamely készletezési rendszer állapotát, illetve hatékonyságát — a készletprobléma fenti megfogalmazása esetén — mindenkor az

$$E = E\{a(t)\,,\ b(t),\ r(t)\}$$

dőfüggvény-halmazzal írhatjuk le, ahol

$a(t)$: az input
$b(t)$: az output
$r(t)$: a kereslet az idő függvényében

A $b(t)$ és $r(t)$ függvények igen gyakran — de nem mindenkor — ekvivalensek. Az $a(t)$ és $b(t)$ függvények a döntéshozó ellenőrzése alatt állnak és $r(t)$ alakulását is befolyásolhatják (például áralakítással).

Általánosságban a készletezési probléma lényege abban áll, hogy meg kell találni azon $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ függvényeket, amelyek maximalizálják a rendszer hatékonyságát. Ezt az E-hez rendelt valamilyen mennyiséggel (pl. veszteség, nyereség stb.) mérjük. Az optimalizálandó függvények rendszerint korlátozó feltételeknek vannak alávetve.

Az ily módon értelmezett készletgazdálkodási modellek, más döntési modellekhez hasonlóan, négy szférából állanak:

1. *A döntési változók halmaza*, amelynek alapján a döntéshozó megválasztja üzleti taktikáját. Készletgazdálkodási modellek esetében ilyen döntési változók lehetnek például a kritikus készletszintek, a rendelendő mennyiség, a raktárkapacitás, a raktárak száma, elhelyezése stb. Természetes, hogy adott probléma esetén ezen változóknak csak egy részhalmaza befolyásolja a döntést.

2. *A feltételi rendszer*, amely a változók halmazában feltételezett empirikus relációk halmaza („korlátozó feltételek"). Készletezési problémák esetében ilyen korlátozó feltételek például a különböző kapacitáskorlátok (termelés, raktár, piac stb.), pénzügyi korlátok, szállítási feltételek, időkorlátok stb.

3. *A célfüggvény*. Ez egy olyan, a döntési változók halmazán értelmezett függvény, amelynek valamilyen szélsőértéke a vizsgált rendszer egy kedvező állapotát fejezi ki. Így készletezési modellekben a költségek minimális szintje, a kereslet kielégítésének elérhető maximális mértéke vagy a készletvolumen minimuma lehet például a döntéshozó számára kívánatos állapot.

4. Végül az alkalmazott *számítási eljárások*, amelyek elemzik a döntési változók alternatív értékeinek hatását a célfüggvényre a modell feltételi rendszerében. Ilyen, a készletgazdálkodási modelleknél gyakran alkalmazott eljárások például a klasszikus szélsőérték-számítás vagy az optimális programozás egyes módszerei.

A fent általánosságban leírt modellek speciális tulajdonságaik (az egyes szférák jellemző vonásai) segítségével sokféleképpen csoportosíthatók és szerteágazó problémakört ölelnek fel. Éppen a sokrétűség miatt nagy jelentőséggel bír a fellépő problémák és megoldásaik rendszerezése — hiszen a térben és időben szétszórtan jelentkező modellek, eljárások, eredmények megismerése feleslegesen köti le a felhasználásukkal foglalkozó szakemberek idejét és energiáját. Ennek tulajdonítható, hogy az utóbbi időben több olyan munka jelent meg, amely a készletezési modellek rendszerezésével, általános leírásával, elemzésével, összehasonlításával foglalkozik. Ezen rendszerezések döntő többsége főként azokkal a modellekkel foglalkozik, amelyek a legnagyobb számosságú osztályt alkotják: egy, ritkábban több termék egy raktárban történő készletezésének modelljeivel. Ilyen modellek rendszerezésére több kitűnő munka is ismeretes az irodalomban (pl.: [12], [17], [26]).

Viszonylag kisebb teret szenteltek azonban eddig egy nem kevésbé fontos problémakörnek, a többraktáras modelleknek. Ez részben abban nyilvánul meg, hogy kevesebb modellt ismerünk e tárgykörben, másrészt pedig abban, hogy sem a hazai, sem a külföldi irodalomban nem találkozunk valamennyire is átfogó rendszerezésükkel. Több ilyen modellt ismertet Hanssmann [17] és Gebhardt-Seele [14], de ők sem törekedtek többszempontú, átfogó kép kialakítására. A hazai irodalomban — amely ezen a területen egyébként is meglehetősen szórványos — pedig egyáltalán nem jelent még meg ilyen munka

A többraktáras modellek tulajdonképpen egy általánosítást jelentenek és kiemelt gyakorlati jelentőséggel bírnak. Könnyen belátható, hogy a népgazdaság objektíve csak többraktáras készletgazdálkodási rendszerként kezelhető; ezt a termelés tényleges anyagi-műszaki összefüggései, valamint a vállalatoknak mint elkülönült gazdálkodási egységeknek a létezése implikálják. Ez a tény makroökonómiai szinten húzza alá a többraktáras rendszerek, illetve modellek jelentőségét. Mikroszinten pedig a több gyáregységgel, üzemrészleggel rendelkező ipari nagyvállalatok készletgazdálkodásának korszerű igényeket s a gazdaságosság követelményeit kielégítő, alapvető kritériumait szem előtt tartó irányítása aligha képzelhető el ilyen modellek alkalmazása nélkül. Emellett az új gazdaságirányítási rendszerben fokozódott a fogyasztók jobb kiszolgálásának igénye is, és az ország egész területét ellátó rendszer (TEK vállalat, szervízhálózat) irányítása szempontjából nagy jelentősége van az olyan irányításnak, amely a rendszer egészére vonatkozó optimalizálást a komplex matematikai apparátust felhasználó többraktáras, esetleg többtermékes modellek segítségével végzi, az egyes raktárak, egységek operatív gazdálkodását pedig egyszerű közelítő eljárások, például nomogramok felhasználásával teszi eredményesebbé. Ezen a területen — bár már történtek kísérletek — még jelentős fejlődésre számíthatunk.

A többraktáras készletgazdálkodási modellek jelentőségének felismerése vezetett akkor, amikor egy hosszabb időre tervezett kutatómunka első fázisaként feldolgoztam az idevonatkozó irodalmat. Bár teljességre nem törekedhettem (főként az irodalom egy jelentős részének hazai hozzáférhetetlensége miatt), úgy érzem, hogy az áttekintett modellek alapján egyrészt képet nyerhetünk az operációkutatás e téren elért eredményeiről, másrészt kiinduló alap áll rendelkezésünkre további modellek, eljárások konstruálására.

Azt, hogy a készletezésre vonatkozó vizsgálatunkat egy vagy több raktárra terjesztjük-e ki, a modellek osztályozásakor a változók közti relációk halmazának tulajdonságai közé sorolhatjuk. Ha e nézőpontból kiindulva kívánjuk pontosabban körülírni a többraktáras modelleket, a következő definíciót adhatjuk:

Többraktáras készletgazdálkodási modelleknek azon közgazdasági-matematikai modelleket tekintjük, amelyek készleteknek olyan rendszerekben történő elosztásával, átcsoportosításával, felhasználási és felújítási politikájával (illetve ennek optimalizálásával) foglalkoznak, ahol a rendszert alkotó raktárak egymással input—output kapcsolatban állnak, vagy állhatnak.

A feldolgozás fő eredményeit a következőkben megkísérlem ismertetni. Sajnos a rendelkezésre álló terjedelem nem teszi lehetővé a részletes fejtegetéseket, így csak igen tömören, a leglényegesebbnek vélt jellemzők felsorolásával ismertethetjük a modelleket, és nem nyílik mód ezen a helyen az értékelés, elemzés leírására sem.

A vizsgálatba bevont modellek osztályozását több szempont szerint elvégeztem és végül — a legalapvetőbbnek bizonyult jellemzők alapján — a következő négy csoportot képeztem:

I. Adott központ körül elhelyezett parallel raktárak elosztási modelljei
II. Többszintű raktárrendszerek elosztási modelljei.
III. Adott központ körül elhelyezkedő parallel raktárak optimális készletezési politikája.
IV. Hierarchikus raktárrendszerek optimális készletezési politikája.

Az alábbiakban a modelleket ebben a csoportosításban tárgyaljuk. A fenti alapcsoportokon belül a modellek tulajdonságait még a következő fő szempontok szerint vizsgáltam:

— időhorizont (statikus—dinamikus),
— a rendszerre vonatkozó ismeretek (determinisztikus—sztochasztikus),
— a termékek száma (egy—több termék),
— alkalmazott matematikai apparátus.

Ezek azonban már inkább az elemzés, mint a csoportosítás szempontjai. Természetesen a modellek egy jelentős részét nem lehet szeparáltan egyik vagy másik csoportba sorolni: a leglényegesebb jellemzők vizsgálata azonban lehetővé teszi az alapvető csoportok elválasztását.

Tekintettel a felhasználandó jelölések nagy számára, valamint arra a körülményre, hogy sok közülük több modellben is előfordul, célszerűnek látszik összefoglalásuk. Emellett — amennyiben szükséges — konkrét tartalmukra az egyes modelleknél is utalunk.

a: veszteség egységköltsége
b: segédváltozó
C: költségfüggvény
c: költségtényező
D: szállítás volumentől független költsége
d: szállítás lineárisan változó költsége
E: raktárhalmaz
$F(S)$: a kereslet eloszlásfüggvénye
$f(S)$: a kereslet sűrűségfüggvénye
f: index ($f = 1, 2 \dots g$)
G: függvénykapcsolat, rekurzív összefüggéseknél
g: függvénykapcsolat
H: változók halmaza
h: index ($h = 1, 2 \dots l$)
I: raktárban levő készlet
i: raktárak indexe ($i = 1, 2, \dots n$)
j: index ($j = 1, 2 \dots m$)
K: kapacitás
k: index ($k = 1, 2 \dots r$), máshol az iterációs lépések száma
L: függvénykapcsolat
M: várható érték
P: valószínűség
p: valószínűség
Q: készletmennyiség
R: raktározás volumentől független költsége
r: raktározás fajlagos költsége
$r^{(1)}$: a felhasznált termékek raktározásának egységköltsége
$r^{(2)}$: a felesleg után fizetendő raktározási költség
S: kereslet (felhasználás, szükséglet)
T: időtartam, időintervallum
t: időtartam, máshol idő-index
U: változók felső korlátja
u: változó

v: hiány fix költsége, máshol hiányköltség-függvény
v: hiány egységköltsége
W: profit, nyereség
w: egységnyi termékre jutó profit, nyereség
x: változó, készletmennyiség
y: változó, készletmennyiség
z: kritikus készletszint
Z: készletmennyiség, általában a rendelés volumene
α: szorzókonstans; $\alpha > 1$
β: szorzókonstans; $0 < \beta < 1$
Γ: rendelés fix költsége
γ: rendelés egységköltsége
δ: kijelölő változó
Δ: növekmény, különbség
∂: parciális derivált jelölése
ε: készletszint
η: hiány várható értéke
μ: visszautasított rendelések várható értéke
ν: index
ξ: valószínűségi változó
Π: egységnyi fel nem használt készlet értékcsökkenése
σ: szórás
τ: időtartam
Φ: függvénykapcsolat
φ: függvénykapcsolat
χ: változó
ω: felesleg várható értéke

I. Adott központ körül elhelyezett parallel raktárba történő készletelosztás

A modelleknek ebbe a csoportjába azokat soroltam, amelyek valamely központ (gyártó mű, központi raktár) körül elhelyezkedő, egyenrangú raktárak közötti optimális készletelosztással foglalkoznak. Ezen modellek döntő többsége egytermékes, statikus, sztochasztikus modell, de néhány más típust is bemutatok.

Az elosztási feladatok legáltalánosabb megfogalmazását HANSSMANN-nél találjuk [17], mint az újságárus-probléma általánosítását. Az újságárusnak Q mennyiségű tőkéje van, amelyet különböző újságokba fektethet. Az egyes újságtípusokba (n-féle típus van) való befektetés pénzértéke x_i. Ha $M(W_i(x_i))$ jelöli az egyes újságokból származó nyereség x_i-től függő várható értékét, akkor a feladat az alábbi módon fogalmazható meg:

$$x_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = Q$$

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M\left(\sum_{i=1}^{n} W_i(x_i)\right) \to \max$$

A megoldáshoz konstans Δ növekményű befektetéseket feltételez és a differenciális nyereség rangsorolásával adja meg az optimális elosztást. A módszer egyszerűen kiterjeszthető nem osztható befektetésekkel (gépek, tervek stb.) kapcsolatos elosztási problémákra is. Az eltérő megfogalmazás ellenére a feladatnak készletelosztási problémaként való kezelhetősége evidens.

A hazai irodalomban DENKINGER GÉZA modellje [10] foglalkozik ilyen típusú feladat megoldásával. A modell alapját képező probléma betonacélkészletek optimális elosztásával kapcsolatban lépett fel és azt vizsgálja, hogy egy adott ellátó üzem hogyan ossza szét a feldolgozó üzemeknek az általa egy, adott időszakban termelt félkésztermékek mennyiségét úgy, hogy a feldolgozó üzemeket együttesen a lehető legkisebb költség terhelje. Az ellátó üzem minden termékét szétosztja. A modellt a szerző a feltételi rendszer különböző változataira írja fel, először determinisztikus, majd sztochasztikus esetre. Az első változatban a feldolgozó üzemeket raktározási költség csak a szükségleten felüli mennyiség tárolásával kapcsolatban terheli, ezen mennyiség felülről korlátozva van.

Adott és konstans az egyes feldolgozó üzemekre vonatkozólag a szükséglet, a raktárkapacitás (a szükségleten felüli mennyiségre!), a raktározás és a hiány egységköltsége.

A fentiek alapján a modell az ismertetett jelölésekkel a következőképpen írható fel:

$$0 \leq x_i \leq S_i + K_i \quad (i = 1,2, \ldots n)$$

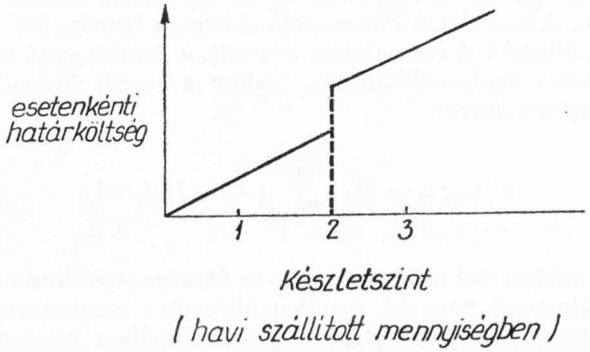
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = Q$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \{v_i \max (0; S_i - x_i) + r_i^{(2)} \max \big(0; \min (K_i; x_i - S_i)\big)\}$$

A feladat megoldását az üzemeknek a fajlagos költségek szerinti sorbarendezésével könnyen megkaphatjuk, tekintetbe véve a szétosztandó anyag mennyisége és az igények közt fennálló nagyságrendi összefüggést.

A modellt további változataiban a szerző az összes raktározási költség, továbbá a szállítási költség figyelembevételével bővíti — ez utóbbi esetben a modell egyszerű szállítási feladatként fogalmazható meg. Leglényegesebb továbbfejlesztése a modellnek az elosztandó mennyiség folytonos valószínűségi változóként való kezelése, ahol a megoldást az előző esetekhez hasonló módon, sorbarendezési eljárással nyerhetjük.

Lényegében analóg feladat megoldását tárgyalja EAGLE [11]. A matematikai modell leírása nélkül ismerteti esettanulmányát, amely a Hawai-i Ananász Társaság idénykészletének elosztásával foglalkozik. Terméke — jellegének megfelelően — kifejezetten idénytermék, amelyet konzervként szállítanak az Egyesült Államokban levő raktárakba. Minden raktár egy adott területet szolgál ki, amelynek ismert a kereslete. A társaság politikája kizárja az egyes raktárak közti szállítás lehetőségét, valamint a készleteknek egyik idényből a másikba való átvitelét. Az egyes raktárak különböznek egymástól a raktározási költségben, valamint az adózás időpontjában. Amikor egy szállítmány megérkezik a kontinensre, úgy kell elosztani, hogy a hiány és az adó költsége a minimális legyen. Ha egy adott készletszinthez tartozó jövőbeli teljes raktározási költség a készletszint négyzetével arányos, ebből következik, hogy a raktározás határköltsége a készletszint lineáris függvénye. Mivel a készletszintet a havi szállítások mennyiségével mérjük, a határköltségnek az adózás miatti megugrása az ábrán látható módon beépíthető a rendszerbe.



Ilyen ábrákat minden raktárra elkészíthetünk, a határköltségek egyenlővé tétele útján az optimális elosztás meghatározható. Az optimális elosztás operatív megszervezésére retrospektív szimulációs eljárást alkalmaztak.

Szintén szimulációs módszerrel oldott meg elosztási problémát WEINSTOCK [39], ismerteti [14]. Tartalékalkatrészt forgalmazó vállalat szétszórt raktárhálózata számára határozta meg az optimális elosztást, a kereslet és a beszerzési idő valószínűségeloszlásának szimulálásával. Tízezer hétre (200 év) játszották le az átlagos heti kereslet különböző értékeit. Így minden értékhez egy olyan görbét kaptak, amely a készlethiányból származó veszteséget mutatja a raktárkészlet nagyságának függvényében.

Raktárhálózat kezdeti készleteinek a szükségleteknek megfelelő újraelosztását, átcsoportosítását optimalizálja RÜZSIKOV [29]. Feltételezi, hogy ismert a szükséglet sűrűségfüggvénye minden raktárra nézve, adottak a raktárakban levő kezdeti mennyiségek és azt vizsgálja, hogyan kell átcsoportosítani a készleteket, hogy a szállítási és hiányköltségek összege minimális legyen. Jelölje H^+ azon raktárak halmazát, ahonnan elszállítunk, H^- azokét, amelyekbe szállítás történik az újraelosztás során. Ekkor a költségfüggvény a következő módon írható fel:

$$C = \sum_{j \in H^-} v_j \int\limits_{I_j + \sum_{i \in H^-} y_{ij}}^{\infty} (S - I_j - \sum_{i \in H^+} y_{ij})\, f_j(S)\, dS +$$

$$+ \sum_{i \in H^+} v_i \int\limits_{I_i - \sum_{i \in H^-} y_{ij}}^{\infty} (S - I_i + \sum_{j \in H^-} Y_{ij})\, f_i(S)\, dS +$$

$$+ \sum_{j \in H^-} \sum_{i \in H^+} d_{ij} y_{ij} \rightarrow \min.$$

Ekkor az egyes raktárakban levő optimális készleteket az integrálok alsó határai állítják elő. Az egyes relációkban történő szállítások optimális mennyiségét (a modell tulajdonképpeni változóját) a függvény minimumpontjának a klasszikus szélsőértékszámítás segítségével történő meghatározása útján állíthatjuk elő.

Hasonló újraelosztási problémát ábrázol dinamikus modell keretében BERMAN [5]. Olyan raktárrendszert vizsgál, amelyben a vizsgálat elején adott készletmennyiség egyenlően van elosztva az egymástól ismert távolságra levő raktárak között. A keresletet Poisson-eloszlásúnak tételezi fel. Az átcsoportosítás késésideje állandó. A vizsgálatba bevonja a készletezett termékek raktáranként különböző értékcsökkenését. Ekkor a t-edik időszakban az egyes raktárak költségfüggvénye:

$$C_i(I_i; t) = \Pi_i \sum_{S_y = I_i + 1}^{\infty} (S_y - I_i) f_{it}(S_y)$$

Monte-Carlo-módszerrel határozza meg az átcsoportosítandó mennyiségeket. Fiktív időperiódusokat vesz fel, minden időszakra meghatároz egy, a t-edik időszaki szállítás (S_y) egységköltségének százalékában kifejezett β_t változót ($0 \leq \beta_t \leq 1$). Alternatív β_t értékekre végzi el a szimulációt, és a rendszer várható költségeit kiszámítva minden esetre azt a β_t-t választja, amely a minimális költséget adja.

MINAS és MITTEN modellje [25], ismerteti [17] a gyakorlathoz közelálló kettős készletezési problémát fogalmaz meg: a termékek készletezésének optimalizálása mellett a szállításhoz felhasznált, adott nagyságú gépkocsiállomány lehető legjobb elosztását is biztosítani kell. A modell dinamikája a kereslet időtől függő voltában, valamint a döntéseknek a jövőre gyakorolt közvetlen hatásában rejlik. A modell elsődlegesen a gépkocsik optimális elosztását célozza, meglehetősen általános alakban felírva: a raktározási, szállítási költségek teljes elhanyagolásával a hiányból és a gépkocsik üresjáratából származó veszteséget minimalizálja.

Érdekes áttekintést ad az elosztási problémák néhány gyakorlati vonatkozásáról MAGEE [22]. Megoldáshoz az esetek nagy részében felhasználhatónak tartja az ismert szállítási algoritmus valamely változatát. Emellett egy szellemes grafikus közelítő eljárást ismertet VIDALE [38] nyomán. Ismerve a területegységenként jelentkező igényeket, a forrásokból (raktárakból) az egyes területegységek ellátásának költségeit, ezeket egy költségtérképpé dolgozza fel. Költségdifferenciagörbék segítségével határozható meg az egyes raktárak által ellátandó terület (és ezen keresztül az egyes raktárakban tartandó készlet) nagysága.

Többtermékes, parallel raktárak közötti elosztásra szolgáló modellként kezelhető a HANSSMANN-nél [17] szereplő, repülőgépek elosztásának optimalizálására szolgáló eljárás. Különböző típusu repülőgépek segítségével bonyolítható le a forgalom több útvonalon. Jelölje a „j" index a különböző típusú repülőgépeket, „i" pedig a különböző útvonalakat. Adott az egyes típusú repülőgépek száma (K_j) és a kereslet eloszlása minden útvonalra. A keresletet diszkrét eloszlású valószínűségi változóként kezeli, ahol az egyes keresleti szintek (S_{hi}; $h = 1, 2 \ldots l$) felülről korlátozzák a hozzájuk rendelendő kapacitásokat (K_{hi}). A „j" repülőgép kapacitása az „i" útvonalon K_{ij}, a szállítási költség d_{ij}. Jelentse p_{hi} az egyes keresleti szintek elérésének valószínűségét, W_i az i-edik útvonalon kielégített egységnyi kereslet hozamát, x_{ij} pedig az i-edik útvonalra kijelölt „j" típusú repülőgépek számát.

Ekkor a feladat a következőképpen írható fel:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és egész!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = K_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_{ij} x_{ij} = \sum_{h=1}^{l} K_{hi}$$

$$0 \leq K_{hi} \leq S_{hi}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i \cdot \sum_{h=1}^{1} p_{hi} \cdot K_{hi} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} x_{ij} \to \max$$

II. Többszintű rendszerek; hierarchikus raktárrendszerek elosztási modelljei

A hierarchikus rendben egymást követő raktárak rendszerével foglalkozó modellek döntő többsége az optimális készletezési politika kialakításával is foglalkozik. Ezeket később fogjuk tárgyalni. Ebben az osztályban olyan modelleket ismertetünk, amelyek három szinten (pl. gyártómű → kereskedelem → felhasználó) történő készletezéssel, optimális elosztással foglalkoznak — az egyes szinteken paralell raktárakat is megengedve. Nyilvánvaló, hogy ezek a modellek az I. részben tárgyaltaknak általánosításaként kezelhetők.

Raktárhálózat—telepítés problémát ismertet, a termeléssel és a szállítással összefüggésben BAUMOL és WOLFE [4]. Jelölje y_{fij} az f-edik gyárból ($f = 1, 2 \ldots g$) az i-edik raktáron át ($i = 1, 2, \ldots n$) a j-edik felhasználóhoz ($j = 1, 2 \ldots m$) szállított mennyiséget. A gyárak és a raktárak kapacitása korlátozott és ismert a felhasználók igénye is. $x_{fij}(y_{fij})$ jelöli a szállítástól függő raktározandó mennyiséget. Ekkor a modell:

$$y_{fij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_{fij} = K_f$$

$$\sum_{f=1}^{g} \sum_{j=1}^{m} x_{fij}(y_{fij}) \leq K_i$$

$$\sum_{f=1}^{g} \sum_{i=1}^{n} x_{fij} = S_j$$

$$\sum_{f=1}^{g} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{fij}(y_{fij}) \to \min$$

A megoldáshoz a feladatot lényegében két szeparált szállítási feladatra bontja, a gyár → raktár és a raktár → felhasználó viszonylatokban.

A költségfüggvényt a két relációnak megfelelően felbontja és a megoldást rekurzív formula alkalmazásával állítja elő.

Azonos problémán alapuló modellt ismertet JÁNDY GÉZA [18]. Az előzőekben használt jelölésekkel a modell a következő:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{fi} \leq K_f$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq K_i$$

$$\sum_{f=1}^{g} y_{fi} \leq K_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = S_j$$

$$\sum_{f=1}^{g} K_f \geq \sum_{j=1}^{m} S_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \geq \sum_{j=1}^{m} S_j$$

$$y_{fi}; y_{ij} \geq 0$$

$$C = \sum_{f=1}^{g} \sum_{i=1}^{n} d_{fi} y_{fi} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} y_{ij} + \sum_{f=1}^{g} C_f \left(\sum_{i=1}^{n} y_{fi} \right) + \sum_{i=1}^{n} r_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \right) \rightarrow \min.$$

A költségfüggvény négy tagja közül az első kettő a gyár → raktár, illetve raktár → felhasználó relációkban történő szállítás költségeit fejezi ki (lineáris függvények). A harmadik tag a termelés, a negyedik a raktározás volumentől függő költsége — ezen két függvény típusára nem tesz kikötést. Ha ezek is lineárisak, akkor a feladat a lineáris programozás módszereivel megoldható. Ha ez nem teljesül, akkor lineáris programozások sorozatával közelíthetünk.

Többtermékes modellt ad a három raktárszint: a gyártómű, a nagykereskedelmi vállalat és a felhasználó raktárai közötti elosztásra URBANEK [36], a rendszer egészére feltételezve az összefüggések linearitását. Feltételezi, hogy a raktárak kapacitása, valamint az egyes termékek kereslete korlátozott. Jelölje az „f" index a gyártóművet, az „i" a nagykereskedelmi vállalatot, a „j" a felhasználót, a k ($k = 1, 2, \ldots r$) a termékfajtát. Ekkor a modell a szokásos jelölésekkel a következőképpen írható fel:

$$x_{kf}; x_{ki}; x_{kj} \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{kf} = K_f \qquad \sum_{k=1}^{r} x_{ki} = K_i$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{kj} = K_j$$

$$\sum_{f=1}^{g} x_{kf} + \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + \sum_{j=1}^{m} x_{kj} = S_j$$

$$C = \sum_{f=1}^{g} C_{kf} x_{kf} + \sum_{i=1}^{n} C_{ki} x_{ki} + \sum_{j=1}^{m} C_{kj} x_{kj} \rightarrow \min.$$

Az egységköltségek a szállítási, raktározási stb. költségeket tartalmazzák. Ilyen — elég erős — kikötések mellett a probléma egyszerű lineáris programozási feladat alakját ölti.

III. Adott központ körül elhelyezkedő parallel raktárak optimális készletezési politikája

Bonyolultabb problémákkal találkozunk, ha a készletek elosztásán kívül a velük kapcsolatos egyéb műveletek optimális végrehajtására is törekszünk. A rendelési eljárás, az utánpótlási idő megválasztása, a készleteknek egyes raktárak közötti átcsoportosítására vonatkozó szabályok és egyéb kritikus értékek meghatározása az alkalmazott matematikai apparátust is bonyolítja. A legáltalánosabban vizsgált eset: egy központi elosztó raktár és n körzeti ellátó raktár optimális politikájának kialakítása. Fontos megkülönböztetés, hogy a modellek megengedik-e (s ha igen, milyen feltételek mellett) az egyes raktárak közötti közvetlen szállítást.

Gross modellje [15] olyan rendszerre vonatkozik, amelyben egy központi forrás körül elhelyezkedő raktárak bármelyikébe elhelyezhető a vizsgált egyetlen termék. A raktárak közvetlenül egymásnak is szállíthatnak. A készletezési politikának két alapvető esete lehetséges, 1. az egyes raktárak független politikát folytatnak egyedi érdekeik szerint, 2. centralizálják a döntéseket az egész rendszer igényeinek megfelelően. Ennek közvetlenül belátható előnyei vannak. Időnként például bizonyos raktárak túlterhelődhetnek, mások üresen maradhatnak és ekkor az átszállítás gazdaságos lehet, és gyorsan elvégezhető. Ezzel szemben viszont bonyolultabb készletezési politika és nagyobb központi apparátus szükséges.

Az utóbbi típusnak megfelelő, sztochasztikus modellt alakít ki, amely minimalizálja a rendszer egy időszakra vonatkozó összes költségét. Nincs akadálya, hogy az eljárást a legutóbbi információk felhasználásával minden időszak elején megismételjük.

A modellt először két raktárra írja fel. Jelölje „i" a raktárak indexét, ($i = 1, 2$). Adott a rendelés előtti készletszint (I_i). Raktározási költség ($r_i^{(2)}$) csak az időszak alatt fel nem használt készletekkel kapcsolatban merül fel. A rendelés fix költsége elhanyagolható, a volumennel lineárisan változó költség egysége γ_i. Utánpótlási idő elhanyagolható, viszontszállítás és a rendszerből kilépő egység nincsen.

Ekkor a célfüggvény a következőképpen írható fel: x_i jelentse a rendelés utáni készletszintet, az y a raktárak közötti szállítást ($y > 0$, ha **2 → 1** relációban szállítunk, ellenkező esetben $y < 0$).

$$C = \gamma_1(x_1 - I_1) + \gamma_2(x_2 - I_2) + d\,|y| + r_1^{(2)} \int_0^{x_1+y} (x_1 + y - S) f_1(S)\,dS +$$

$$+ v_1 \int_{x_1+y}^{\infty} (S - x_1 - y) f_1(S)\,dS +$$

$$+ r_2^{(2)} \cdot \int_0^{x_2-y} (x_2 - y - S) f_2(S)\,dS + v_2 \int_{x_2-y}^{\infty} (S - x_2 + y) f_2(S)\,dS$$

(ahol $x_1 = I_1$, $x_2 = I_2$ az induláskor).

A megoldáshoz a klasszikus szélsőértékszámítást használja fel. Két raktár esetén a parciális deriváltak segítségével meghatározza a különböző lehetséges esetekre (amelyek a rendelés előtti és utáni készletszinthez tartoznak) vonatkozó alpolitikákat és így állítja össze a rendszer egészének politikáját. A modellt ezután „n" raktár esetére bővíti, és a költségfüggvény formális átalakításával (az egyes raktárak által rendelendő és az átcsoportosítandó mennyiségek függvényében) iterációs eljárást alkalmaz. Mindkét javasolt eljárás jól áttekinthető és viszonylag egyszerűen végigvihető.

Nagy jelentőséggel bír HADLEY és WHITIN modellje [16]. Ez egylépcsős készletezési modell „n" központilag ellenőrzött ellátó raktárral. A beszerzést az egész rendszerre vonatkozólag a központ végzi, amely folytonosan informálva van minden raktár készletszintjéről. A kereslet az egyes raktárakból elégíthető ki. Ha a készlet nem elegendő, a kereslet elvész. Feltesszük, hogy a kereslet minden raktárral szemben S_i paraméterű Poisson-elosztású valószínűségi változó, amely az idővel nem változik. A telephelyek közötti újraelosztásnak két módja van, gyors és lassú szállítás útján történhet. A modell célja, hogy döntési szabályt adjon:

1. mikor és mennyit kell rendelni,
2. a beszerzéseket hogyan osszák szét,
3. mikor és mennyit osszanak újra az egyes raktárak között és melyik (gyors vagy lassú) módon.

A cél a beszerzés, rendelés, készletezés, a központból a raktárba történő szállítás, a rendszer egészére és az egyes raktárakra vonatkozó hiány, valamint a telepek közötti újraelosztás költségeinek minimalizálása.

Az optimumszámítást több lépcsőben végzik el, öt típusú változó mennyiségre vonatkozólag, ezek:

— A rendszer összkészletének kritikus szintje (z) (ahol a központ a rendelést feladja).
— A központ által rendelendő mennyiség (Z).
— Az egyes raktárak részesedése a központ készletéből.
— Az átcsoportosítás kritikus készletszintjei (gyors és lassú esetre) minden raktárban.
— Az egyes raktárak közt szállítandó mennyiség.

Az első lépésben a z és Z meghatározásához a rendszer egészére vonatkozó költségfüggvényt írunk fel. Kihasználják azt, hogy n db Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson-eloszlású, amelynek paramétere megegyezik az eredeti paraméterek összegével — így nyerik a rendszer egészére vonatkozó kereslet várható értékét. A volumentől függő költségekre érdekes kikötést tesznek: az időszak alatt fellépő összes mennyiséggel (amely éppen az összkereslettel egyenlő) lineárisan változik, de a költségszorzó értéke függ az egyszerre rendelt mennyiségtől. A készletezés egységköltsége a rendelés egységköltségének adott hányada, és ez a költség a hiány egységköltségében is megjelenik.

A második lépése a modellnek, hogy dinamikus programozási eljárással meghatározza az átcsoportosítási szabályt. Minden időszakban csak egy raktár jut ezen az úton készletkiegészítéshez. Ennek a raktárnak a költsége az átcsoportosítás során kapott készlet összegétől függ, a többi raktáré pedig a készletérték és a szállítási idő függvénye — a rendszer egészét terheli még a szállítási költség. Az eredeti modell analitikus részletezésben tárgyalja a költségfüggvényt — annak terjedelmes és komplex volta miatt e dolgozat keretében leírására nem vállalkozhattunk. Az elosztásra vonatkozó eljárás a megelőző osztályba sorolt modellekhez hasonló elgondoláson alapul: a fentebb megállapított optimális rendelt mennyiséget kell úgy elosztani a raktárak között, hogy a készletezési és szállítási költségek összege minimális legyen. Az elosztás során természetesen tekintettel vannak a kereslet és a kritikus készletértékek alakulására. A modell a valósághoz közelállóan fogalmazza meg a problémát, minden jelentős tényezőt bevon a vizsgálatba — ennek ára viszont a szerkezetnek és megoldó algoritmusnak nagyfokú komplexitása.

Könnyebben kezelhető — de kevésbé komplex SIMPSON [31] modellje. Egy termék n raktár közötti elosztásával foglalkozik. Ő is feltételezi, hogy ha a készlet egy kritikus z_i érték alá csökken, a készletet sürgősen kiegészítik — a kiegészítés költségeként egy konstans, és egy, a sürgős utánpótlás eseteinek számával arányos tényezőt ad meg.

Feltételezi, hogy helyes gazdálkodás esetén legfeljebb egyszeri kiegészítésre van szükség. Feltételezi, hogy az induló készlet az egyes raktárakban 0, és az időszak során x_i mennyiséget kap a raktár. Összes elosztandó mennyiség:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = Q .$$

Ekkor az átcsoportosítás várható teljes költsége:

$$C = \sum_{i=1}^{n} c_i P(S_i \geq x_i - z_i) ,$$

ahol

$$x_i \geq 0 \text{ és } \sum_{i=1}^{n} x_i = Q ,$$

továbbá $P\ (S_i \geq x_i - z_i)$ annak valószínűsége, hogy a szükséglet az i-edik raktárban akkora, hogy a készlet a kritikus szintre süllyed.

A feladat a C költségfüggvényt minimalizáló és a feltételeket kielégítő x_i értékek meghatározása. Bebizonyítja, hogy a minimális költségű elosztás szükséges feltétele, hogy

$c_i \cdot f_i\ (x_i - z_i)$ konstans legyen, ahol $f_i(S_i)$ a kereslet sűrűségfüggvénye. Ez nyilván diszkrét esetre is igaz, így:

$c_i P(S_i = x_i - z_i) =$ konstans az optimum feltétele.

A feladatot hasonló megfontolásokkal oldhatjuk meg a hiány megengedése (cél: a veszendőbe ment kereslet vagy a várható hiány minimuma) esetén.

Egy sok raktárral rendelkező értékesítő szervezet számára dolgozott ki a rendelési pontokat és mennyiségeket meghatározó többtermékes modellt CLARK [6], ismerteti [15]. A forgalomról feltételezi, hogy olyan időtől nem függő elosztást követ, amelyet három paraméterrel adhatunk meg. Az eloszlásnak két maximuma van, mivel a vevők részben nagyvállalkozók, részben kisvállalkozók. A szállítási idő nem-normális eloszlású véletlen változó.

A rendszer jellegzetessége, hogy az esetek 90%-ában, ha egy megrendelés valamely raktárból nem elégíthető ki, a vevő vár, amíg

a) a szállítás a gyárból beérkezik,
b) valamelyik másik raktár szállít.

A költségfüggvény (amelynek változói a rendelési idő és a rendelt mennyiség) minden cikk és minden raktár esetében különböző minimumát kell meghatározni.

Tetszőleges számú felhasználó és gyártómű, valamint egy központi raktár készletgazdálkodásának optimalizálását szolgálják MEGYERI—MESZÉNA—SZÉP modelljei [24]. Négy változatot dolgoztak ki, amelyeknek feltételrendszere kisebb-nagyobb mértékben eltér egymástól.

Az alapváltozatban a következő feltételezésekkel élnek: Egy meghatározott cikk (a modell tulajdonképpen többtermékes: az egyes termékek készletezése azonban egymástól függetlenül folyik, és csak a raktárkapacitás kitöltése szempontjából van számításba véve a termékek különböző volta), termelése különböző helyeken telepített üzemekben folyik, egy központi raktár készletez, s a felhasználás is szétszórt hálózatban történik. A szükségletek kielégítésére import is igénybevehető. A felhasználók ellátása egyaránt történhet a központi raktárból és közvetlenül a gyártó művekből. Adott a megrendelések és szállítások rendje mind a gyártó vállalatok, mind az import esetében. Ismert a szükséglet időszakonként (minden időszakot m kisebb egységre bontanak) és körzetenként. Adott a központi raktár kapacitása. A hiány összköltsége a hiány átlagos nagyságával és időtartamával lineárisan változik. A felhasználás az egyes vállalatoknál egyenletes.

Az első modellváltozat alapján kiszámítható a központi raktárban és a felhasználóknál összesen tartandó készletek optimális nagysága, majd a szerzők annak kritériumát adják meg, hogy mely felhasználók kapjanak készletet közvetlenül a gyártó műből és melyek a központi raktárból. A szóba jöhető variációk nagy száma miatt ez nehéz feladat, de az alkalmazott mintavételi eljárás szellemesen hidalja át a nehézségeket.

Diszkrét és folytonos változatban is kidolgozták a modell részletesebb változatát, ahol szintén a művi és raktári ellátás minimális költségű kombinációját határozták meg. Először a diszkrét változatot ismertetjük. Ha összesen n felhasználó van, és ebből k számút ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) vonunk be a raktári ellátásba, akkor $n - k$ felhasználó részesül közvetlenül művi ellátásban.

Mivel a két ellátási mód egymást kizárja, maximálisan

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

lehetőség van. A feladat e lehetőségek közül egy olyan k-ad osztályú kombináció kiválasztása, amely a minimális költséget eredményezi. A célfüggvény ekkor

$$C(k; \nu_j) = \sum_{\nu_j=0}^{k} S_{\nu_j} r_{\nu_j} + \sum_{j=k+1}^{n} S_{\nu_j} \bar{r}_{\nu_j} + \left(R + r'S + r''Q(S) \cdot S\right),$$

ahol r_i a raktári ellátás esetén az i-edik felhasználó egységnyi költsége (a raktár költségei nélkül), $\bar{r}_i$ a művi ellátás fajlagos költsége, R a központi raktár viszonylag állandó, r' a forgalommal, r'' az átlagos készlettel lineárisan változó költség $Q(S)$ az egységnyi forgalomra eső átlagkészlet, S_i az i-edik raktár forgalma, v_j a k-ad osztályú kombinációkba sorolt fogyasztókat jelenti, és

$$S = \sum_{j=0}^{k} S_{v_j}$$

Így az összeg első tagja a raktári, második tagja a művi ellátás összköltsége, harmadik tagja pedig a központi raktár költsége.

A megoldáshoz sorbarendezzük a fogyasztókat a művi ellátással szemben raktári ellátással elérhető fajlagos (egységnyi felhasználásra eső) megtakarítása $(\bar{r}_{v_j} - r_{v_j})$ szerint. A raktári ellátás bővítésével a forgalom összköltsége mindaddig csökken, míg a felhasználóknál elérhető megtakarítás növekménye meghaladja a központi raktár költségeinek növekményét.

NADDOR és SALTZMANN azt vizsgálja, hogy egy ellátó rendszer területi raktárai időszakonként hányszor rendeljenek és a készletezett termékféleségek közül melyiket, ha az egyszeri rendelés költsége egy állandó és egy, a rendelt cikkfajtákkal lineárisan változó költségtényező összege.

A kereslet az egész időszakra előre ismert. Ez elég erős korlátozás — az egyenletes felhasználás feltételezése azonban az általánosság még ennél is jelentősebb megszorítása. Ilyen kikötések mellett azonban a felhasználandó algoritmus igen egyszerűvé válik. A modell szerkezetének megváltoztatása nélkül bevezethető azonban a véletlenszerűen jelentkező kereslet. Minden költségelem lineárisan változó. A szerzők által javasolt politikák közül egyértelműen kiválasztani a legjobbat csak a konkrét költségadatok alapján lehet. A vizsgált esetek többségében a probléma tulajdonképpen egyraktáras — ugyanis az egyes raktárak egymástól függetlenül készleteznek.

FABRYCKY és BANKS [12] másoktól eltérő módon, a beszerzés oldaláról csoportosítja a készletezési rendszereket. Azt vizsgálják, hogy adott terméket (vagy termékeket) melyik raktárból (vagy raktárakból) célszerű beszerezni. A függőségi kapcsolatot is a termékek és nem a források között tételezik fel és így a modellek tulajdonképpen visszavezethetők az egy termék, egy forrás esetre. Feltételrendszerükben a forrás megválasztásától függ a késésidő, a tétel és beszerzési költség.

Szintén FABRYCKY és BANKS a [13] cikkében az előzőekben leírt alapállásban közöl egy többtermékes, több forrás esetére kidolgozott determinisztikus modellt. A modell célja, hogy meghatározza a rendelési szintet, mennyiségeket és forrást, úgyhogy az időszak összes költsége az egész rendszerre nézve minimális legyen. Feltételezik, hogy a j-edik termék egysége a raktár diszkrét b_j térfogategységét foglalja el. A maximálisan felhalmozható készlet az egyes termékekből K_j, az egész raktárkapacitás K. Ekkor a cél az, hogy a következő függvény minimumát adó beszerzési és készletezési politikát találjuk meg.

$$C(K_1 \cdot b_1; K_2 b_2; \dots K_m b_m) = g_1(K_1 b_1) + g_2(K_2 b_2) + \dots + g_m(K_m b_m)$$

olyan feltételek mellett, hogy

$$K_j b_j \geq 0 \; (K_j \text{ egész})$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_j b_j \leq K$$

A rendszer készletezési politikája abban áll, hogy ha a készlet adott z értékre csökken, utánarendelünk Z-t.

A megoldáshoz a költségfüggvényre táblázatot adnak, az optimumot dinamikus programozással határozzák meg.

Ezen feladat speciális esetének fogható fel az egy termék — több forrás modell: ekkor egylépcsős dinamikus programozási feladatot kell megoldani.

A fenti szerzőkhöz hasonló javaslatot tesz a többraktáras rendszerek kezelésére STARR és MILLER [34]. Rámutatnak, hogy az általuk vizsgált feltételek között a probléma visszavezethető a több cikk — egy raktár modellek megoldására. Ha az egyes raktárak függetlenek, a megoldás evidens, ha pedig időszakonként beküldik igényeiket a központi raktárba, amely központilag intézi a rendelést, és az egyes raktárak szükséglete, költségtényezői eltérőek, ez úgy fogható fel, mint az előző probléma (több termék — egy raktár) megfordítása: az előzőekben az egyes cikkekhez rendelt költségeket itt az egyes raktárakhoz rendelik.

IV. Hierarchikus raktárrendszerek optimális készletezési politikája

Raktárak egymást követő elhelyezése esetén minden lépcső (fokozat) egyazon cél elérésére törekszik, amely cél a legutolsó lépcsőnél jelentkezik közvetlenül (pl. a kereslet kielégítése) — ezért ez a szint áll az érdeklődés középpontjában. A megelőző szintek készletei csak segédszerepet töltenek be. Az ilyen típusú modelleknél megválaszolandó két fő kérdés:

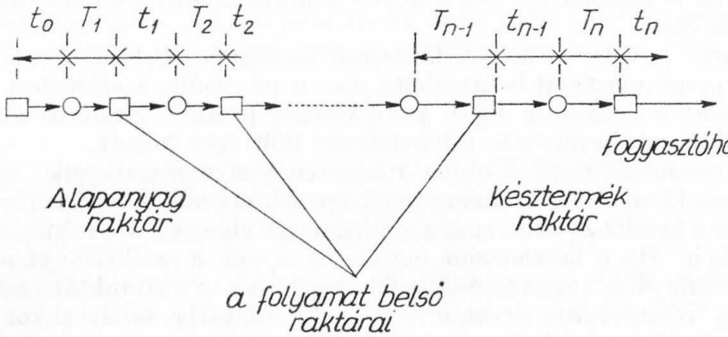
1. Legyen-e készlet egy adott szinten?
2. Ha igen, mi legyen ezen szint készletezési politikája?

Igen ötletes megközelítése a problémának az újságárus-probléma egy másik általánosítása, amelyet HANSSMANN [17] ad meg. Egy adott időszakban legyen S kereslet $F(S)$ sűrűségfüggvénnyel valamilyen késztermékre vonatkozólag. A termelési folyamat során négy szinten készleteznek: nyersanyag formájában (3), félkésztermék formájában (2,1) és késztermékként (0). A fel nem használt készletre vonatkozó egységnyi veszteség $r_i^{(2)}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Minden kielégített rendelés (az utolsó, 0 szinten) w egységnyi profitot eredményez (w nem tartalmazza $r_i^{(2)}$-t). Kielégítetlenség esetén csak a fogyasztók bizonyos %-a hajlandó várni. Amikor a 0-dik szinten elfogy a készlet, β_1 % kielégítetlen keresletet továbbítanak az 1. szint felé.

Innen tovább (ha 1-en, illetve 2-n jelentkezik kielégítetlen kereslet) β_2%, illetve β_3% megy. Az a kereslet, amit a 3. szint sem tud kielégíteni, elvész. A feladat annak meghatározása, mekkora mennyiséget (Q_i) tároljanak az egyes szinteken, hogy a várható profitot maximalizálják. A megoldáshoz a klasszikus szélsőértékszámítást alkalmazzák.

SIMPSON [32] egy olyan nagyvállalat készletezési rendszerének modelljét konstruálta meg, amely egyetlen terméket hoz létre műveletek sorozatával. A „befejezetlen" terméket minden művelet után raktározzák — ha a munkafázisnak — ez lehet egyszerűen szállítás is — vége, a raktárba viszik és onnan megy tovább. A folyamatot a következő ábrán láthatjuk.

Gyártási folyamat belső raktározással



Az ábrán a □ jelöli a raktárakat, a ○ az egyes gyártási (szállítási) fázisokat.

Amikor valamely raktárba rendelés érkezik (tehát kereslet van a „befejezetlen" termékkel szemben is), ezt azonnal kielégítik, ha van készlet. Ha nincs, továbbítják a rendelést az alacsonyabb szintek felé (legyártják a terméket), és az végigfut az egész rendszeren. A rendelést adott t_i időn belül ki kell elégíteni (azaz: minden szintről továbbítani kell a felette levő lépcső számára). Feltesszük, hogy az alapanyag és a végtermék iránti kereslet azonnal kielégíthető, azaz

$$t_n = t_0 = 0\,,$$

míg a többi t_i értékek a rendszer készletezési politikájának döntési változói. Egy rendelés (ebben a modellben minden szintre azonos értelemben tekintjük a kereslet fogalmát) kielégítésének ideje két tényezőből tevődik össze: a megelőző szint raktárából való szállítás és a megfelelő termelési fázis időszükségletéből (ezek egyike vagy mindkettő lehet 0 is!). A maximálisan elfogadható késésidő a rendszer politikájától függ. Kritikus az egész folyamatra nézve az az elhatározás, hogy mekkora maximális keresletre készüljenek még fel (a hiányból származó veszteségeket nem veszik figyelembe) — a modell megfogalmazása teljesen általános, így tetszőleges érték vehető fel. A kereslet várható értékét és szórását a kiszolgálási idő függvényében írja fel és a várható raktározási költséget (raktáranként különböző, lineáris költségtényezővel számolva) minimalizálja.

A legáltalánosabban Hanssmann [17] fogalmazza meg az eddigiekben tárgyalt problémát. Simpsonhoz hasonlóan felteszi, hogy a normális eloszlású kereslet várható értéke és szórása a maximális kereslet és a késésidő függvénye. Az első változatban, ahol csak egyetlen szinten lehet készletet tartani, a várható bevétel és kiadás különbségét maximalizálja: előbbi a legfelső szinten történő eladásból származik, az utóbbi az átlagkészlet lineáris függvénye.

A profit várható értékét minden szintre kiszámítja és a legnagyobbat választja — ez, miután itt csak három szintet tételez fel, nehézség nélkül elvégezhető. Az általánosabb esetben a döntési változó az egyes szinteken tartandó készletek nagysága, bármely szintet megengedve. A várható profitot itt is a termelési folyamat időszükséglete és a szállítási késésidő függvényében írja fel, normális eloszlású keresletet feltételezve. A modell további kiterjesztése tetszőleges számú terméknek a vizsgálatba történő bevonása. Feltételezi, hogy a kereslet minden termékre nézve a maximálisan elérhető mennyiség azonos százaléka.

Az egymást követő késésidők láncszerű összekapcsolódása következtében dinamikus programozással határozható meg a minimális készletezési költség, amelynek alapján második lépés a maximális profitot biztosító egyensúly elérése az eladások bevétele és a készletezési költségek között.

SINGLETON modellje [33] olyan raktárrendszerre vonatkozik, amelyben minden időszakban véletlen mennyiségű termék érkezik a rendszerbe. Ha az 1. raktárban a készlet Z_1 alatt van, a szállítmányt elfogadják a raktárkapacitás (K_1) mértékéig. Ha a készletszint magasabb Z_1-nél, a szállítmányt a 2. raktárba irányítják. Ugyanez történik a felesleggel, ha az első raktár csak a szállítmány egy részét tudja átvenni. Az n-edik raktárba tehát akkor érkezik a szállítmány vagy annak egy része, ha az előzőek már telítettek. Feltételezi, hogy a rendszeren való átfutás időigénye elhanyagolható az egész tekintett időhorizonthoz képest, továbbá, hogy az egyes raktárakban jelentkező kereslet és az ideszállított mennyiség eloszlása kölcsönösen független.

Jelentse S_{ij} az i-edik raktárnál jelentkező keresletet a j-edik időszakban. Ezek függetlenek, azonos eloszlásúak (minden j-re!) $f_i(S)$ sűrűségfüggvénnyel. A függetlenség az egyes raktárakra (minden i-re) is fennáll, és hasonlóképpen független a rendszerbe szállított mennyiségeknek (ezek is valószínűségi változók) x_j-nek a sorozatától. Legyen $G_j(x)$ az „x" eloszlásfüggvénye.

Alapfeltétel a rendszer stabilitásához (hogy a készletszint egyetlen raktárlépcső esetében se tartson $-\infty$-hez), hogy az átlagos szállított mennyiség, „x" várható értéke, $M(x)$, meghaladja az átlagos keresletet, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} S f_i(S)\, dS < M(x)\,.$$

Mivel a raktár csak akkor vesz át szállítmányt, ha készletszintje egy adott véges értéknél kisebb, az átlagkészletszint nem tarthat $+\infty$-hez. Ez akkor is fennáll, ha az egyes raktárak kapacitása $+\infty$.

Kimutatható, hogy a feltételezett készlet-elfogadási politika mellett a készletszint stacionárius eloszlása az első raktárra nézve ($F_1(Q)$) előállítható. Erre a többi raktár nincs befolyással — ez viszont hat az őt követő lépcsőkre. Ez a kiinduló lépés. Bemutatja, hogy általában, ha az $F_i(Q)$ az i-edik raktárra előállítható, akkor a szállított mennyiség eloszlása az $(i+1)$-dik raktárra nézve.

$$G_{(i+1)}(x) = \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{I_i+S} \int\limits_0^{x+K_i+S-Q} f_i(S)\, d\,G_2(\varrho)\, dF_i(Q)\, dS + \\ + G_i(a) \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{I_i+S}^{\infty} f_i(S)\, dF_i(Q)\, dS; \text{ ha } x > 0 \\ 0\,, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

Amennyiben $f_i(S)$-t folytonosnak tételezzük fel, $\dfrac{dG_{i+1}(x)}{dx}$ előállítható, és meghatározható az $F_{i+1}\,(Q)$ a készletszint stacionárius eloszlása a szállítás után az $(i+1)$-edik raktározási lépcsőben. Az eljárást ily módon végigvihetjük valamennyi raktáron.

Sajátos készletezési eljárást ad kétszintű raktározás esetére COMES és STEINBERG [9]. Az 1. raktár a 2-től kapja a készletet és vele szemben normális eloszlású kereslet jelentkezik. A készletezési politika az, hogy szabályos időközönként meghatározzák az elméleti készletet (Q), amely a tényleges és a már megrendelt készletek összege, és összehasonlítják egy előre adott z_1 és z_2 készletszinttel.

$$z_2 - z_1 = 2\Delta > 0$$

Ha $z_1 \leq Q \leq z_2$, akkor a Q konkrét értékétől független állandó x értéket rendelnek (x lehet például az átlagos értékesítés volumene).

Ha $Q < z_1$ a rendelés mennyisége $x + (z_1 - Q)$, ha $Q > z_2$, akkor pedig $x - (Q - z_2)$.

A politika előnye, hogy alkalmasan választott z_1, z_2, x értékek mellett viszonylag stabil rendeléseket lehet leadni. A rendszerre a döntő befolyást a sávszélesség, a $2\,\Delta$ értéke gyakorolja. Ennek optimalizálására a rendszer egészére vonatkozó forgókészletet minimalizálják (amelynek várható értéke az egyes szinteken adódó forgókészletek várható értékeinek összege) úgy, hogy a W nyereségszázalék maximumát keresik a Δ függvényében

$$W = 1 - \frac{\omega(\Delta)}{\omega(o)},$$

ahol $\omega(\Delta)$ és $\omega(0)$ a készletfelesleg várható értéke a tartománysáv függvényében.

CLARK és SCARF dinamikus modellje [7] kétlépcsős helyzetre vonatkozik. Két raktár van (a rendszert így jelöljük: $2 \to 1$, a nyíl a készletmozgás irányára utal), a kereslet az 1-en jelentkezik, $f(S)$ sűrűségfüggvénnyel.

Közvetlenül a rendelés előtt legyen I_1 az első raktár készlete, I_2 pedig a két raktárban levő, valamint a két raktár között útonlevő készletek összege. A $2 \to 1$ szállítás késésideje legyen két periódus, a második raktárba való beérkezésé egy periódus. y_1 jelöli a következő időszakban az 1. raktárba szállítandó már kijelölt mennyiséget.

A rendszer állapotát így az I_1, I_2, y_1 mennyiségek írják le, és az optimális politikát a $C_m\,(I_1; I_2; y_1)$ függvény (minimális várható diszkontált költség) rekurzív meghatározásával állítják elő, ahol m a vizsgált időszakok száma. — Az eljárás első lépéseként elhanyagoljuk a 2. raktárt, és kiszámítjuk az optimális politikát az 1-re vonatkozólag, eltekintve attól a lehetőségtől, hogy a 2-n fellépő készlethiány megakadályozhatja a politika érvényesítését. A kielégítetlen kereslet elvész. Így az optimális politika csak az 1. raktárban készletezett és rendelés alatt levő mennyiségtől függ és a következő rekurzív összefüggéssel határozható meg

$$G_m(u) = \min_{I_0 > u} \Big\{ d_1(I_0 - u) + \beta^2 \int\int C(I_0 - S_1 -$$

$$- S_2)\, f(S_1)\, f(S_2)\, dS_1\, dS_2 + \beta \int_0^\infty G_{m-1}(I_0 - S)\, f(S)\, dS \Big\},$$

ahol d_1 a $2 \to 1$ szállítás egységköltsége a várható időszakonkénti készletezési és hiányköltség, mint az időszak elején raktáron levő mennyiség függvénye, β pedig a diszkontfaktor és $G_1(u) = G_2(u) = 0$.

A $G_m(u)$ és az első raktárral kapcsolatos $C_m(I_1\,;\,y_1)$ minimális költségfüggvény között a következő kapcsolat áll fenn:

$$C_m(I_1; y_1) = C(I_1) + \beta \int C(I_1 + y_1 - S) f(S)\, dS + G_m(I_1 + y_1)\,.$$

Ha most $C(I_0)$ konvex, mint az általában feltehető, az optimális politika az $I^{(3)}, I^{(4)} \ldots$ kritikus értékek sorozatával határozható meg úgy, hogy ha

$$I_1 + y_1 < I^{(m)}$$

az u időszak kezdetén, akkor a differenciát rendeljük, ellenkező esetben ($I_1 + y_1 \geq I^{(m)}$) nem rendelünk. Ha vizsgálatunkat a teljes rendszer-készletre kiterjesztjük, akkor az $I_2 < I^{(m)}$ összefüggés fennállása esetén a fenti politika nem alkalmazható. Ez esetben az összes, a 2. raktárban levő készlet az 1-be szállítandó. Ha $I_2 > I^{(m)}$, akkor csak az a része, amely elegendő az $I_1 + y_1 = I^{(m)}$ reláció teljesüléséhez.

Hátra van még a 2. raktár számára rendelendő mennyiség optimális értékének meghatározása. Ez a döntés nem hozható meg az 1. raktárra gyakorolt hatás figyelembevétele nélkül. Az optimális politika lényeges jellemzője, hogy a rendelési döntés egyedül a rendszer összkészlete (I_2) alapján meghozható, ha a költségeket egy olyan additív hiányköltséggel megnöveljük, amely az 1. raktárban jelentkező kereslet ki nem elégítését bünteti.

Ha ezt a költséget hozzáadjuk a készletezés és hiány „természetes'' költségéhez (legyen az $\tilde{C}(I_2)$), akkor a rendszer optimális politikája a következő függvényegyenlet megoldásával oldható meg:

$$g_m(I_2) = \min_{x \geq 0} \left\{ d(x) + \tilde{C}(I_2) + \Lambda_m(I_2) + \beta \int g_{m-1}(I_2 + x - S)\, f(S)\, dS \right\}$$

Egy másik modelljében Clark és Scarf [8] az előző modellt egészíti ki egy, a $2 \rightarrow 1$ szállításra vonatkozó rendelési költséggel, és közelítő megoldást mutat az optimumra.

Ha $C(I_1)$ konvexitása és a kielégítetlen kereslet elvesztése fennáll, akkor az optimális eljárás a (z; Z) típusú politika. E politikánál a kritikus értékek — jelöljük Z_m és z_m-mel — minden időszakra meghatározhatók a következő függvényegyenlet segítségével:

$$\begin{aligned} G_m(u) = \min_{I_2 \geq u} \Big\{ & D\delta(I_0 - u) + d_1(I_0 - u) + \\ & + \beta^2 \int\int C(I_0 - S_1 - S_2) f(S_1) f(S_2)\, dS_1\, dS_2 + \\ & + \beta \int G_{m-1}(u - S) f(S)\, dS \Big\}, \end{aligned}$$

ahol

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ 1 & \text{ha } x > 0\,. \end{cases}$$

Belátható, hogy az additív hiányköltség nem egyedül I_2 függvénye. Ezért közelítő eljárásra van szükség, amely az optimális értékekhez rekurzív összefüggés felhasználásával vezet. Mindkét modell értelemszerűen kiterjeszthető többszintűre is.

Lényegében az előzőekben leírt eljárás alkalmazását javasolja Kosszov és Zsemajtajtite [21] makroökonómiai készletezési probléma megoldására.

Ha $C(x)$ jelenti az x készletvolumen melletti országos szintű ráfordításokat, $C_j(x_j)$ pedig a j-edik vállalat vagy raktár ráfordításait, akkor nyilván

$$C(x) = \sum_{j \in H} C_j(x_j),$$

ahol H a vállalatok és raktárak száma. A H halmazban van n raktár és $H - n$ vállalat, minden raktár $(i = 1, 2, \ldots, n)$ g_i vállalatot lát el $(\Sigma g_i = H - n)$. Ekkor

$$C(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)}(x_i),$$

ahol $C_i^{(0)}(x_i)$ az i-edik raktár összes ráfordításai, beleértve a g_i mennyiségű vállalathoz kapcsolódó ráfordítást is. Ha a raktárak függetlenek, nyilván fennáll a

$$\min C(x) = \sum_{i=1}^{n} \min C_i^{(0)}(x_i)$$

összefüggés.

Először egylépcsős raktározási modellben ábrázolják a készletirányítás sajátosságait, s ezután térnek vissza az eredeti problémához. A vizsgált rendszer kétlépcsős: első lépcső a vállalat, második a raktár. Az optimalizáláshoz a Clark—Scarf-féle első modellváltozat gondolatmenetét használják fel.

Scarf [30] általánosabban is megfogalmazza az előzőekben leírt problémát, a kvalitatív leírás mellett azonban alkalmazásként szintén csak két lépcsőre írja le a modellt, amely jelentéktelen változtatásokkal azonos a [27] modellel (nem közli a bizonyításokat és néhány jelölést egyszerűsít). Ha n különböző lépcsőt tekintünk, és feltesszük, hogy a készlet az n-edik lépcsőben lép be a rendszerbe, és átszállítják a rendszeren $(n \to (n-1) \to \ldots \to 3 \to 2 \to 1)$, hogy az első raktárral szemben jelentkező véletlen keresletet kielégítse. A dinamikus programozás eljárása (az optimális tételnagyság és szállítási szabály meghatározása rekurzív összefüggéseket kielégítő költségfüggvények sorozatának segítségével) akkor alkalmazható, ha a rendszer lehetséges állapotainak száma nem túl nagy. Az optimális politika meghatározását a következő feltevések könnyíthetik meg jelentősen:

1. Az egyes lépcsőkből való továbbszállítás költsége arányos a szállított mennyiséggel.
2. A kielégítetlen kereslet elvész.
3. A várható készletezési és hiányköltségek (amelyek az időszak alatt minden lépcsőt terhelnek) az adott lépcsőben elhelyezett készleteknek és az alacsonyabb fokozatokon, valamint a szállítás alatt levő készletek összegének függvénye.

V. A vizsgált modellek összefoglaló áttekintése

Az ismertetett modellek természetesen még egyéb tulajdonságaik szempontjából is elemezhetők. Néhány tanulság azonban e rövid áttekintés alapján is levonható:

— a modellek döntő többsége statikus. A dinamikussá való bővítés tetszetős igény, gyakorlatban azonban rendszerint az alkalmazott apparátus szabja meg a korlátot — egyes modellek dinamizálása olyan egyéb, esetenként jelentős feltételezések elhagyását igényelheti, amely nem áll arányban a dinamizálás nyújtotta előnyökkel,

— a legtöbb modell sztochasztikus, kevés foglalkozik azonban a véletlennek tekintett változók tényleges eloszlásával. Rendszerint egyáltalán nem specifikálják az eloszlást, ha igen, akkor Poisson- vagy normális eloszlást tételeznek fel,

— túlsúlyban vannak az egy termékes modellek. Több közülük viszonylag egyszerű módon átalakítható több termékessé, de rendszerint azzal a — gyakorlatilag többnyire elfogadható — feltételezéssel él, hogy az egyes termékek raktározása egymástól független,

— a költségfüggvény összetevői általában a raktározási, szállítási és a hiány okozta költségek, ritkábban a rendeléssel, illetve az egyes raktárak közötti átcsoportosítással kapcsolatos költségek. Ezen általános megfogalmazások mögött elég változatos tartalom rejlik. A további elemző vizsgálatok egyik legfontosabb szempontja éppen a költségösszefüggések feltárása lehet.

— csaknem minden modell célfüggvénye minimalizálandó költségfüggvény. Ennek fő oka, hogy ezáltal a vizsgált készletezési rendszer zárt rendszerként kezelhető, hiszen a felmerülő költségekkel kapcsolatban leginkább feltehető az, hogy nem függenek a rendszeren kívüli tényezőktől. Valamilyen hozam maximálása esetén a készletezett egységek értékének realizálási feltételeit is be kellene vonni a vizsgálatba — ez azonban egyrészt bonyolítja a problémát, főként pedig eltorzíthatja a rendszer belső összefüggéseiről alkotott képet. Emellett jelentős tény az is, hogy a költségek minimalizálása bármilyen társadalmi-gazdasági környezetben célszerű egy adott rendszer számára,

— a felhasznált matematikai apparátus igen változatos: az optimális programozás különböző módszerei (kiemelt szerepe van a dinamikus programozásnak) mellett főként a klasszikus szélsőérték számítás és különböző iterációs eljárások fordulnak elő. Mint már említettük, a megoldás algoritmusa legtöbb esetben korlátozza a modellek feltételrendszerének általánosítási lehetőségeit. Érdekes eredményeket hozhatna annak mélyrehatóbb elemzése, hogy ez a korlátozás milyen következményeket jelent az egyes konkrét modellekre nézve, és esetleg hogyan oldható fel.

A készletezési tevékenységnek a dolgozat elején említett viszonylagos függetlensége következtében a tőkés és szocialista gazdálkodásnak a termelési viszonyok különbözőségében gyökerező eltérése viszonylag kevésbé érezteti hatását, mint az operációkutatás alkalmazásának más területein. A polgári irodalomban szereplő nagyszámú modell közvetlen adaptálása azonban így sem lehetséges. A lényegileg eltérő gazdálkodási célkitűzések mellett a szocialista gazdaságban mások a konkrét termelési feltételek, s azok a hipotézisek, amelyek meghatározó szerepet játszanak az említett modelleknél (hogy csak egyet említsek: rendszerint feltételezik, hogy a rendelő megszabhatja például a szállítás ütemezését), hazai viszonylatban az esetek többségében nem teljesülnek. Ezért nagy szükség van a speciális hazai körülményeket, a készletgazdálkodás sajátos vonásait jobban figyelembe vevő modellek kidolgozására. (Alapvető jelentőségűnek tartom ebből a szempontból azt az irányt, amelyet az ismert Prekopa–Ziermann modellcsalád kijelöl.) Az anyagban szereplő, hazai gyakorlati feladatokon nyugvó modellek igazolják, hogy a probléma foglalkoztatja szakembereinket – a készletgazdálkodási modellek hazai kutatása területén azonban még nagyok a lehetőségek, és további jelentős fejlődésre van szükség.

(Beérkezett: 1970. január 5.)

IRODALOM

[1] ALLEN, S. G.: Redistribution of Total Stock over Several User Locations. Naval Research Logistics Querterly, 1958. Vol. 5. No. 4.

[2] ARROW, K. J.–KARLIN, S.–SCARF, H.: The Nature and Structure of Inventory Problems; Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production (ed. Arrow, K. J.–Karlin, S.–Scarf, H.) Stanford University Press. Stanford, California, 1958.

[3] BAUMOL, W. J.: Közgazdaságtan és operációanalízis. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[4] BAUMOL, W. J.–WOLFE, PH.: A Warehouse – Location Problem; Operations Research, March-April 1958. Vol. 6. No. 2.

[5] BERMAN, E. B.: Monte-Carlo Determination of Stock Redistribution. Operations Research, July-August, 1962. Vol. 10. No. 4.

[6] CLARK, E. D.: Mathematical Analysis of an Inventory Case; Operations Research, Sept-Oct 1957. Vol. 5. No. 5.

[7] CLARK, A. J.–SCARF, H.: Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem; Management. Science, 1960, 6. (4)

[8] CLARK, A. J.–SCARF, H.: Approximate Solutions to a Simple Multi-Echelon Inventory Problem; Studies in Applied Probability and Management Science (ed. Arrow, K. J.–Karlin, S.–Scarf, H.) Stanford, California, 1962. Stanford University Press.

[9] COMES, G.–STEINBERG, N.: La methode du stock à bande dans la gestion de stocks a plusieur niveaux; Revue Francaise de Recherche Operationelle, 1965. Vol. 6. No. 34.

[10] DENKINGER, G.: Egy optimális készletelosztás. Döntési modellek. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[11] EAGLE, A. R.: Distribution of Seasonal Inventory of the Hawaiian Pine-apple Company. Operations Research, May-Jun. 1957. Vol. 5. No. 3.

[12] FABRYCKY, W. J.–BANKS, J.: Procurement and Inventory Systems. New York–Amsterdam–London, 1967. Reinhold Publishing Corporation.

[13] FABRYCKY, W. J.–BANKS, J.: A Hierarchy of Deterministic Procurement – Inventory Systems. Operations Research, Sept-Oct 1966. Vol. 14. No. 5.

[14] GEBHARDT–SEELE, P.: Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen. München. 1962. Verlag R. Oldenbourgh.

[15] GROSS, D.: Centralized Inventory Control in Multilocation Supply Systems. Multistage Inventory Models and Techniques (ed. Scarf, H. E.–Gilford, D. M.–Shelly, M. W.) Stanford, California, 1963. Stanford University Press.

[16] HADLEY, G.–WHITIN, T. M.: An Inventory – Transportation Model with N. Locations; Multistage Inventory Models and Techniques (ed. Scarf, H. E.–Gilford, D. M.–Shelly, M. W.) Stanford, California, 1963. Stanford University Press.

[17] HANSSMANN, F.: Operations Research in Production and Inventory Control New York–London, 1962. John Wiley and Sons, Inc.

[18] JÁNDY G.: Szállítási és telepítési operációkutatás. Budapest, 1966. Műszaki Könyvkiadó.

[19] KAUFMANN, A.: Az optimális programozás. Budapest, 1968. Műszaki Könyvkiadó.

[20] KAUFMANN, A.: Az operációkutatás módszerei és modelljei. Budapest, 1968. Műszaki Könyvkiadó.

[21] KOSSZOV, V. V.–ZSEMAJTAJTITE, Sz. S.: Az anyagkészletekkel való gazdálkodás irányításának módszertani kérdései matematikai módszerek és elektronikus szá-

mítógépek alkalmazásával (fordítás, kézirat). IV. Nemzetközi Anyaggazdálkodási Szimpozium, Varsó, 1965.
[22] MAGEE, J. F.: Production Planning and Inventory Control New York—Toronto—London 1958. Mc Hraw Hill Book Company, Inc.
[23] MEGYERI E.: A készletek optimális elosztása a készletező és felhasználó vállalatok között (sokszorosítás) KGM IGÜSZI, Budapest, 1967.
[24] MEGYERI E.—MESZÉNA GY.—SZÉP J.: Matematikai-közgazdasági modellek az ipari készletgazdálkodás céljaira — tetszőleges számú gyártómű és felhasználó, valamint egy központi raktár esetében. Döntési modellek. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
[25] MINAS, J. G.—MITTEN, L. G.: The Hub Operation Scheduling Problem Operations Research, May-Jun 1958. Vol. 6. No 3.
[26] NADDOR, E.: Inventory Systems. New York, 1966. John Wiley and Sons, Inc.
[27] NADDOR, E.—SALTZMAN, S.: Optimal Reorder Periods for an Inventory System with Variable Costs Ordering Operations Research, Sept-Oct. 1958. Vo. 6. No. 5.
[28] RÉNYI A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó.
[29] RÜZSIKOV, J. I.: Pereraszpredelenyije zapaszov v sziszteme szkladov. Ekonomika i matematicseszkije metodü, 1968. Tom IV. vüp. 5.
[30] SCARF, H. E.: A Survey of Analytic Techniques in Inventory Theory. Multistage Inventory Models and Techniques (ed. Scarf, H. E.—Gilford, D. M.—Shelly, M. W.) Standford, California, 1963. Standford University Press.
[31] SIMPSON, K. F.: A Theory of Allocation of Stocks to Warehasuses; Operations Research, Nov-Dec. 1959. Vol. 7. No. 6.
[32] SIMPSON, K. F.: In — Process Inventories. Operations Research Nov-Dec 1958. Vol. 6. No. 6.
[33] SINGLETON, R. C.: Steady-State Properties of Selected Inventory Models. Studies in Applied Probability and Management Science (ed. Arrow, K. J.—Karlin, S.—Scarf, H. E.) Standford, California, 1962. Standford University Press.
[34] STARR, M. K.—MILLER, D. W.: Inventory Control: Theory and Practice. Englewood—Cliffs, N. J. 1962. Prentice — Hall, Inc.
[35] SZÉP J.: Analízis. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
[36] URBANEK, T.: Optymalizacja rozmieszczenia zapasów. Ekonomika i Organizacja Pracy 1966. (XVII/4.).
[37] VAZSONYI, A.: Scientific Programming in Business and Industry. New York, 1958. John Wiley and Sons. Inc.
[38] VIDALE, M. L.: A Graphical Solution of the Transportation Problem. Operations Research, April 1956. Vol. 4. No. 2.
[39] WEINSTOCK, J. K.: An Inventory Control Solution by Simulation. Report of System Simulation. Symposion. New York 1957.

MATHEMATICAL MODELS OF MULTI-STORE INVENTORY SYSTEMS

The paper presents a general formulation of the inventory problem, where the stock of goods is being considered as a passive resource and demand is defined as the motive force of the inventory system. The multi-store models represent an important category of the storage models, since multi-store systems can actual by be met with both on the macro- and micro-levels whereas the assumption of a single store is usually a simplifying hypothesis.

Having defined the multi-store models, the author proceeds to outlining the results of a systemizing work in the course of which he has surveyed the multi-store models described in the literature on the subject. Investigation of the models and their classification according to various points of view have led the author to establish four basic groups, namely

— the distribution models of parallel stores situated around a given centre;
— the distribution models of multi-revel storage systems;
— the storage-policy models of parallel stores situated around a given centre;
— the optimal storage-policy models of hierarchical storage systems.

The author bases the survey of the models on the above classification, describing their main characteristics and mathematical formulation, with references to their solution.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАПАСОВ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ СКЛАДОВ

В статье дается описание общей формулировки проблемы оптимизации запасов, в которой запасы рассматриваются как пассивные ресурсы, а двигателем системы образования запасов является спрос. Модели с несколькими складами представляют собой очень значительную категорию моделей оптимизации запасов, так как в действительности как на макро-, так и на микроэкономическом уровне нам встречаются системы с несколькими складами, а предположение одного склада мотивируется только упрощенным подходом.

Дав определение моделей с несколькими складами, автор представляет в статье результаты систематизирующей работы, в рамках которой он обработал фигурирующие в специальной литературе модели с несколькими складами. Изучив и квалифицировав эти модели в нескольких аспектах, он образовал четыре группы:

— модели распределения параллельных складов, располагающихся вокруг данного центра;
— модели распределения многоступенчатых систем складов;
— модели политики образования запасов в параллельных складах, располагающихся вокруг данного центра;
— модели политики оптимального образования запасов иерархических систем складов.

Автор дает описание обработанных моделей в вышеуказанной квалификации: их наиболее существенных характерных черт математической формулировки, а также — в общих чертах — их решения.