Tomáš Gál — Josef Nedoma

Lineáris programozás több paraméterrel a jobb oldalon vagy a célfüggvény-koefficiensekben

E dolgozatunkban célul tűztük ki a többparaméteres lineáris programozási feladat egy megoldási módszerének megadását, amely numerikus megoldásra alkalmas és gépi programozáshoz is alapot szolgáltathat.

I. A többparaméteres jobboldal esete

I.1. *A probléma megfogalmazása*

Keresendő a

(I.1,1) $$z = c^T x$$

függvény maximuma az

(I.1,2) $$Ax = b^* + F\lambda ,$$

(I.1,3) $$x \geq 0$$

feltételek mellett, ahol $A = (a^1, \ldots, a^n) = (a_{ij})$ egy $m \times n$ mátrix, $c^T = (c_1, \ldots, c_n)$, $b^* = (b_1^*, \ldots, b_m^*)^T$ konstans vektorok. Megköveteljük, hogy $m < n$ és A rangja m legyen. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)^T$ vektorparaméter, $F = (f_{ij})$ adott $m \times s$ mátrix. A maximálás az x vektorra történik.

A jobb oldali vektor számára bevezetjük az alábbi rövidített jelölést:

(I.1,4) $$b(\lambda) = b^* + F\lambda.$$

Jelöljük $I = \{i{:}i = 1, \ldots, m\}$, $J = \{j{:}j = 1, \ldots, n\}$. Tetszőleges, az A mátrix $a^{j_1}, \ldots, a^{j_m}$ oszlopvektorai által alkotott bázis esetén a $\varrho = [j_1, \ldots, j_m]$ halmazt a bázis indexnek nevezzük. A bázismátrixra a ${}^{\varrho}B = (a^{j_1}, \ldots, a^{j_m})$ jelölést használjuk. Minthogy ${}^{\varrho}B$ reguláris mátrix, létezik a ${}^{\varrho}B^{-1} = ({}^{\varrho}A_1, \ldots, {}^{\varrho}A_m)$ inverz mátrix. Legyen ${}^{\varrho}J_1 \subset J$ az összes bázisváltozó indexének a halmaza, ${}^{\varrho}J_2 \subset J$ pedig az összes nem bázis változó indexének a halmaza. Természetesen ${}^{\varrho}J_1 \cup {}^{\varrho}J_2 = J$ és ${}^{\varrho}J_1 \cap {}^{\varrho}J_2 = \emptyset$. Jelöljük továbbá $T = \{k{:}k = 1, \ldots, s\}$-el az összes paraméter indexének a halmazát.

A ${}^{\varrho}B$ bázishoz tartozó szimplex táblát a következő módon írjuk fel:

(I.1,5) $$z + {}^{\varrho}c^T x = {}^{\varrho}p^T \lambda + z^{(\varrho)},$$

(I.1,6) $$ {}^{\varrho}Ax = {}^{\varrho}F\lambda + {}^{\varrho}b^* ,$$

ahol

(I.1,7) $$^{\varrho}A = {}^{\varrho}B^{-1}A,\ {}^{\varrho}F = {}^{\varrho}B^{-1}F,\ {}^{\varrho}b^* = {}^{\varrho}B^{-1}b^*.$$

(I.1,8) $${}^{\varrho}b(\lambda) = {}^{\varrho}b^* + {}^{\varrho}F\lambda = {}^{\varrho}B^{-1}b(\lambda),$$

$${}^{\varrho}b(\lambda) = \left({}^{\varrho}b_1(\lambda), \ldots, {}^{\varrho}b_m(\lambda)\right)^T,$$

(I.1,9) $${}^{\varrho}c^T = c_\varrho^T\, {}^{\varrho}A - c^T,\ {}^{\varrho}p^T = c_\varrho^T\, {}^{\varrho}F,\ z^{(\varrho)} = c_\varrho^T\, {}^{\varrho}b^*.$$

Itt c_ϱ a bázisvektorok indexeihez tartozó célfüggvény együtthatók által alkotott vektort jelenti.

Tetszőleges rögzített $\lambda \in E^s$ vektor esetén az (I.1,1) – (I.1,3) feladat a szimplex módszerrel megoldható. Ebben a cikkben a célfüggvény optimális értékét mint a λ vektorparaméter függvényét fogjuk vizsgálni, mégpedig azokra a paraméterértékekre, amelyekre

(I.1,10) $$G\lambda \leq d.$$

Itt $G = (g_{ik})$ konstans $r \times s$ mátrix, $d = (d_1, \ldots, d_r)^T$ konstans vektor. Azoknak a $\lambda \in E^s$ vektoroknak a halmazát, amelyek (I.1,10)-et kielégítik, M-mel fogjuk jelölni.

Célunknak a következő feladat megoldását tekintjük: 1. Határozzuk meg a λ vektorparaméterek azon $K \subset M$ tartományát, melyre fennáll,hogy minden $\lambda \in K$ vektorra az (I.1,1) – (I.1,3) feladatnak létezik véges optimális megoldása, $\lambda \in M - K$ esetén viszont az (I.1,1) – (I.1,3) feladatnak nincs véges optimális megoldása. 2. Találjunk véges sok nem üres $R_{\varrho 1}, \ldots, R_{\varrho p}$ tartományt azzal a tulajdonsággal, hogy $\bigcup_{k=1}^{p} R_{\varrho k} = K$, és minden $k = 1, \ldots, p$ esetén létezik olyan ${}^{\varrho k}B$ bázis, hogy tetszőleges $\lambda \in R_{\varrho k}$ vektorra ${}^{\varrho}B$ az (I.1,1) – (I.1,3) feladatnak optimális bázisa. 3. Írjuk le a ${}^{\varrho k}b(\lambda)$, $z_{\max}^{(\varrho k)}(\lambda)$ függvényeket minden $R_{\varrho k}$ tartományon.

I.2. *Az alapdefiníciók és tételek*

I.2,1. tétel: Tegyük fel, hogy egy bizonyos $\lambda^0 \in E^s$ vektorra létezik az (I.1,1) – (I.1,3) feladat véges maximuma. Ekkor tetszőleges $\lambda \in M \subset E^s$ vektorra vagy létezik az (I.1,1) – (I.1,3) feladat véges optimális megoldása, vagy a feladatnak nincs megengedett megoldása.

Bizonyítás: Készítsük el az (I.1,1) – (I.1,3) feladat duálisát:

(I.2,1) $$\min w = u^T b(\lambda)$$

feltéve, hogy

(I.2,2) $$A^T u \geq c.$$

Abból a feltevésből, hogy λ^0-ra létezik az adott feladat optimuma, a dualitási tétel szerint következik, hogy ha $\lambda = \lambda^0$, akkor az (I.2,1) – (I.2,2) feladatnak is létezik egy $u^0 \in E^m$ megengedett megoldása. Mivel az (I.2,2) feltételrendszer nem függ λ-tól, u^0 az (I.2,1) – (I.2,2) feladat megengedett megoldása tetszőleges $\lambda \in E^s$ vektorra. Most az (I.2,1) – (I.2,2) feladatra mint primálra alkalmazva a dualitás tételt tetszőleges $\lambda \in M$ esetén, nyerjük az I.2,1. tétel állítását.

I.2,1. definíció: Mindazokat a $\lambda \in M \subset E^s$ vektorokat, amelyekre létezik az (I.1,1) – (I.1,3) feladat véges optimális megoldása, megengedett vektorparamétereknek nevezzük. Az összes megengedett vektorparaméter zárt tartományát K-val fogjuk jelölni.

Megjegyzés: Ha legalább egy $\lambda \in M$ vektorra létezik egy véges optimális megoldás, akkor az I.2,1. tétel szerint K azonos mindazon $\lambda \in M$ vektorok halmazával, melyekre az (I 1,1) — (I.1,3) feladatnak létezik megengedett megoldása.

I.2.2. tétel: K konvex poliedrikus halmaz E^s-ben.

Bizonyítás: Legyen ${}^{\varrho}B$ valamely az A mátrix oszlopvektorai által alkotott reguláris $(m \times m)$ mátrix. Azon $\lambda \in E^s$ vektorok halmazát,[1] amelyekre az (I.1,1) — (I.1,3) feladatnak ${}^{\varrho}B$ (primális) megengedett bázisa, az alábbi feltétellel adhatjuk meg:

$$ {}^{\varrho}B^{-1}b(\lambda) \geq 0 \,, \tag{I.2,3} $$

azaz

$$ -{}^{\varrho}F\lambda \leq {}^{\varrho}b^{*}. \tag{I.2,4} $$

Az összes olyan $\lambda \in E^s$ vektor halmaza, amelyekre az (I.1,1) — (I.1,3) feladatnak létezik megengedett bázisa, véges sok (I.2,4) típusú konvex poliedrikus halmaz egyesítése. Ezt a halmazt K_1-el jelöljük.

Megmutatjuk, hogy K_1 konvex halmaz.

Legyen $\lambda^1, \lambda^2 \in K_1$ két különböző vektor. Ekkor léteznek olyan $x^1, x^2 \in E^n$ vektorok, hogy

$$ \begin{aligned} Ax^1 &= b^* + F\lambda^1, \\ Ax^2 &= b^* + F\lambda^2, \\ x^1 &\geq 0,\ x^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{I.2,5} $$

Legyen $t \in (0, 1)$ valós szám. Jelöljük

$$ \begin{aligned} x^t &= (1 - t)x^1 + tx^2, \\ \lambda^t &= (1 - t)\lambda^1 + t\lambda^2. \end{aligned} \tag{I.2,6} $$

(I.2,5)-ből következik, hogy

$$ \begin{aligned} Ax^t &= b^* + F\lambda^t, \\ x^t &\geq 0. \end{aligned} \tag{I.2,7} $$

Ez azt jelenti, hogy a $\lambda = \lambda^t$ vektorra x^t az (I.1,1) — (I.1,3) feladat megengedett megoldása, úgy hogy $\lambda^t \in K_1$.

A $K_1 \subset E^s$ halmaz tehát konvex poliedrikus halmaz, mert konvex, és ki lehet fejezni véges számú konvex poliedrikus halmaz egyesítéseként. Következésképpen $K = M \cap K_1$ szintén konvex poliedrikus halmaz.[2] Qu.e.d.

I.2,3. tétel: $z_{\max}(\lambda)$ konkáv függvény a $K \subset E^s$ halmazon.

E tétel bizonyítását Charnes és Cooper és később Nykowski [25], [26] közölték.

[1] Természetesen ez a halmaz üres is lehet.

[2] Hallgatólagosan feltettük, hogy K nem üres halmaz. Ekkor az I.2,1. definícióhoz fűzött megjegyzés miatt írható $K = M \cap K_1$. A $K = \emptyset$ eset érdektelen, egyébként akkor a tétel triviálisan igaz.

I.2,2. definíció: A ${}^{\varrho}B$ bázist optimális bázisnak nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in K$, melyre ${}^{\varrho}B$ primálisan és duálisan is megengedett.

Megjegyzés: A ${}^{\varrho}B$ bázis primálisan megengedett, ha az (I.2,3) vagy (I.2,4) feltétel teljesül, és duálisan megengedett, ha a

$$ {}^{\varrho}c \geqq 0 \tag{I.2,8} $$

feltételt kielégíti.

Tetszőleges ${}^{\varrho}B$ optimális bázishoz hozzárendelünk egy $R_{\varrho} \subset K$ zárt tartományt, amelyet a

$$ -{}^{\varrho}F\lambda \leqq {}^{\varrho}b^{*}, \tag{I.2,9} $$

$$ G\lambda \leqq d \tag{I.2,10} $$

feltételekkel definiálunk. R_{ϱ} tehát azon megengedett vektorparaméterek halmaza, amelyekre ${}^{\varrho}B$ az (I.1,1) – (I.1,3) feladat optimális bázisa.

I.2,3. definíció: Legyen ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ két különböző optimális bázis. Ha

1. létezik $\lambda^{*} \in K$ úgy, hogy ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ mindegyike az (I.1,1) – (I.1,3) feladat optimális bázisa $\lambda = \lambda^{*}$ esetén, és

2. a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból a ${}^{\varrho_2}B$ bázisba (vagy fordítva) át lehet menni egy duális szimplex algoritmus lépéssel,

akkor a ${}^{\varrho_1}B$ és a ${}^{\varrho_2}B$ bázisokat szomszéd bázisoknak nevezzük.

I.2,4. definíció: Ha az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} tartományoknak megfelelő bázisok szomszéd bázisok, akkor az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} tartományokat szomszéd tartományoknak nevezzük.

A fenti definíciókból nyilvánvaló, hogy az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} szomszéd tartományokra fennáll

$$ R_{\varrho_1} \cap R_{\varrho_2} \neq \emptyset . \tag{I.2,11} $$

I.2,4. tétel: Ha R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} szomszéd tartományok, akkor az E^{s} tér ellentétes féltereiben helyezkednek el.

Bizonyítás: Jelöljük ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$-vel az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} tartományokhoz hozzárendelt optimális bázisokat. A megfelelő szimplex táblák:

$$ {}^{\varrho_1}B: \quad z + {}^{\varrho_1}c^{T}x = {}^{\varrho_1}p^{T}\lambda + z^{(\varrho_1)}, \qquad {}^{\varrho_1}Ax = {}^{\varrho_1}F\lambda + {}^{\varrho_1}b^{*}, \tag{I.2,12} $$

$$ {}^{\varrho_2}B: \quad z + {}^{\varrho_2}c^{T}x = {}^{\varrho_2}p^{T}\lambda + z^{(\varrho_2)}, \qquad {}^{\varrho_2}Ax = {}^{\varrho_2}F\lambda + {}^{\varrho_2}b^{*}. \tag{I.2,13} $$

Legyen ${}^{\varrho_1}a_{i_0 j_0}$ a kulcselem (pivot) az ${}^{\varrho_1}A$ mátrixban a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból a ${}^{\varrho_2}B$ bázisba való átmenetnél. Ez az elem feltevés szerint negatív. Az (I.2,13) rendszer i_0-ik sorát az (I.2,12) rendszer i_0-ik sorának ${}^{\varrho_1}a_{i_0 j_0}$-el való osztásával kapjuk.[3] Ennélfogva

$$ \operatorname{sgn} {}^{\varrho_1}b_{i_0}(\lambda) = -\operatorname{sgn} {}^{\varrho_2}b_{i_0}(\lambda) \tag{I.2,14} $$

[3] Feltesszük, hogy a két rendszernél a sorok sorrendje ugyanaz, abban az értelemben, hogy az egyik bázisból a másik bázisba való átmenetnél nem kell őket átszámozni.

minden $\lambda \in E^s$ vektorra. Mivel $\lambda \in R_{\varrho_1}$ esetén ${}^{\varrho_1}b_{i_0}(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in R_{\varrho_2}$ esetén pedig ${}^{\varrho_2}b_{i_0}(\lambda) \geq 0$, azaz (I.2,14) szerint ${}^{\varrho_1}b_{i_0}(\lambda) \leq 0$, megkaptuk a tétel állítását.

Az optimális bázisok halmazának szerkezetét jól le lehet írni a gráfelmélet segítségével. A továbbiakban az (S, Γ) szimbólum egy irányítatlan gráfot fog jelenteni, ahol S a csúcsok vagy másszóval csomópontok halmaza, Γ pedig egy többrétű leképezés, amely minden $\varrho \in S$ csomóponthoz a szomszédos csomópontokat rendeli hozzá, azaz olyan csomókat, amelyeket ϱ-val él köt össze.

I.2,5. definíció: Az (I.1,1) — (I.1,3) feladathoz hozzárendeljük a következő (S, Γ) gráfot:

1. Az (S, Γ) gráf minden csomópontja egy $\varrho = [j_1, \ldots, j_m]$ halmaz,[4] ahol a j_i-k különböző pozitív egész számok, $1 \leq j_i \leq n$.

2. $\varrho \in S$ akkor és csak akkor, ha ${}^{\varrho}B$ az (I.1,1) — (I.1,3) feladat optimális bázisa.

3. $\varrho_1, \varrho_2 \in S$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$ esetén $\varrho_2 \in \Gamma(\varrho_1)$ (egyúttal $\varrho_1 \in \Gamma(\varrho_2)$) akkor és csak akkor, ha ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ szomszédok.

I.2,5. tétel: Legyen $\lambda^1, \lambda^2 \in K$ két tetszőleges megengedett vektorparaméter és legyen $\varrho_1 \in S$ olyan, melyre $\lambda^1 \in R_{\varrho_1}$. Ekkor az (S, Γ) gráfban létezik olyan $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_k\}$ út, hogy $\lambda^2 \in R_{\varrho_k}$.

Bizonyítás: Fejezzük ki parametrikusan a λ^1, λ^2 pontokat összekötő szakaszt:

$$\lambda(t) = \lambda^1 + t(\lambda^2 - \lambda^1), \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{I.2,15}$$

K konvexitása miatt $\lambda(t) \in K$ minden $t \in [0, 1]$ értékre. λ helyébe a $\lambda(t)$ kifejezést helyettesítve az (I.1,1) — (I.1,3) feladatban, egy egyparaméteres lineáris programozási feladatot kapunk a t paraméterrel. Elvégezzük e feladatra a $0 \leq t \leq 1$ intervallumon a szisztematikus parametrizációt úgy, hogy a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból kiindulva folyamatosan átmegyünk további optimális bázisokhoz a duális szimplex algoritmus segítségével. Eredményül egy olyan bázis sorozatot fogunk kapni, amely megfelel a keresett útnak az (S, Γ) gráfban.

I.2.6. tétel: Legyen (S_0, Γ_0) az (S, Γ) gráf egy tetszőleges komponense.[5] Ekkor fennáll $\bigcup_{\varrho \in S_0} R_\varrho = K$.

Bizonyítás: Az előző tételből közvetlenül következik az állítás.

I.3. *A többparaméteres jobb oldali vektor szisztematikus parametrizációjának módszere a lineáris programozásban*

Az I.2.6. tétel azt mutatja, hogy az I.1. szakaszban kitűzött parametrikus probléma megoldása tulajdonképpen az (S, Γ) gráf egy tetszőleges (S_0, Γ_0) komponense összes csúcspontjának meghatározását jelenti.

Egy $\varrho_0 \in S$ szögpont választásával egyértelműen meghatározott az az (S_0, Γ_0) komponens, amelyre $\varrho_0 \in S_0$. Az (S_0, Γ_0) gráf összes csomópontjainak meghatározására hatékony módszernek látszik a következő algoritmus.

[4] Különböző csomóknak természetesen különböző m elemű halmazok felelnek meg.
[5] Az (S, Γ) gráf egy komponensén tetszőleges olyan összefüggő részgráfot értünk, amely nem részgráfja (S, Γ) más összefüggő részgráfjainak.

I.3,1. Algoritmus az összefüggő (S_0, Γ_0) gráf összes csomópontjának megkeresésére.

Az algoritmus során két jegyzéket konstruálunk, melyek egyike a már megtalált csomópontok regisztrálására szolgál, a másik pedig az összes, az előző jegyzékben még nem szereplő, szomszédos csomópontot tartalmazza.

A) Választunk egy $\varrho_0 \in S_0$ csomót.

B) Elkészítjük a

$$V_0 = \{\varrho_0\}, \; W_0 = \{\Gamma(\varrho_0)\}$$

halmazokat (jegyzékeket).

C) Tegyük fel, hogy az algoritmus k-ik lépése során megkaptuk a ϱ_{k-1} csomót és a V_{k-1}, W_{k-1} jegyzékeket. Leírjuk most a $(k+1)$-ik lépést:

C.1. Ha $W_{k-1} = \emptyset$, akkor az eljárás véget ér mert az (S_0, Γ_0) gráf összes csomópontját feljegyeztük a V_{k-1} jegyzékben..

C.2. Ha $W_{k-1} \neq \emptyset$, választunk egy $\varrho_k \in W_{k-1}$ csomót. A választást — amennyiben lehetséges — úgy végezzük, hogy $\varrho_k \in W_{k-1} \cap \Gamma(\varrho_{k-1})$ legyen. Egyébként arra törekszünk, hogy ϱ_{k-1} és ϱ_k minél közelebb legyenek egymáshoz.

C.3. Elkészítjük a

$$V_k = V_{k-1} \cup \{\varrho_k\}, \tag{I.3,1,1}$$

$$W_k = W_{k-1} \cup \Gamma(\varrho_k) - V_k \tag{I.3,1,2}$$

halmazokat. Ezután áttérünk az algoritmus $(k+2)$-ik lépésére.

A fenti algoritmus véges számú lépésben célhoz vezet. Bizonyítása megtalálható a [22] munkában.

I.3,2. Az algoritmus alkalmazása az adott problémára.

Lássuk, mit jelentenek az algoritmus egyes lépései az adott probléma esetén.

Először egy bizonyos $\varrho_0 \in S$ elemet kell meghatározni, ami azt jelenti, hogy meg kell találni az (I.1,1) — (I.1,3) feladat egy optimális bázisát. Ezt a következő módon fogjuk megtenni:

1° Meghatározzuk az

$$Ax - F\lambda = b^*, \tag{I.3,2,1}$$

$$G\lambda + \eta = d, \tag{I.3,2,2}$$

$$x \geq 0, \; \eta \geq 0 \tag{I.3,2,2a}$$

rendszer egy (x^0, λ^0) megengedett megoldását. (λ előjelben nem korlátozott változó.) Ha az (I.3,2,1) — (I.3,2,2) rendszernek nincs megoldása, akkor $K = \emptyset$, és így nincs mit megoldani.

2° Az (I.1,1) — (I.1,3) feladatba a $\lambda = \lambda^0$ vektort helyettesítjük és megoldjuk a

$$\max z = c^T x\,, \tag{I.3,2,3}$$

$$Ax = b(\lambda^0)\,, \tag{I.3,2,4}$$

$$x \geq 0$$

feladatot. Ha ennek a feladatnak nincs véges optimuma, akkor az I.2.1. tétel szerint $K = \emptyset$. Ellenkező esetben létezik az (I.3,2,3) — (I.3,2,4) feladatnak egy optimális ${}^{\varrho_0}B$ bázisa, amely egyidejűleg az (I.1,1) — (I.1,3) feladat optimális bázisa az I.2,2. definíció értelmében. Emellett $\lambda^0 \in R_{\varrho_0} \subset K$ és ϱ_0 az S halmaz keresett eleme.

Bővebb magyarázatot igényel még a C.3. pont is.

Itt feltételeztük, hogy a k-ik lépésben elkészítettük a V_{k-1} és W_{k-1} jegyzékeket. A V_{k-1} jegyzék tartalmazza azon optimális bázisok (és megfelelő tartományok) indexeit, amelyeket már teljesen le tudunk írni. Ismerjük az $R_{\varrho_0}, \ldots, R_{\varrho_{k-1}}$ tartományok meghatározó feltételeit és a feladat megoldását ezeken a tartományokon.

A W_{k-1} jegyzék azon R_ϱ tartományok indexeit tartalmazza, amelyeknek meghatároztuk a létezését az előző lépések folyamán, de nem ismerjük a teljes leírásukat.

A $\varrho_k \in W_{k-1}$ elem választása után átmegyünk a ${}^{\varrho_{k-1}}B$ bázisból a ${}^{\varrho_k}B$ bázisba. Megkapjuk a

$$z + \sum_{j\in J} {}^{\varrho_k}C_j\, X_j - \sum_{l=1}^{s} {}^{\varrho_k}p_l\, \lambda_l = z^{(\varrho_k)},$$

$$\sum_{j\in J} {}^{\varrho_k}a_{1j} x_j - \sum_{l=1}^{s} {}^{\varrho_k}f_{1l}\, \lambda_l = {}^{\varrho_k}b_1^*,$$

$$(\text{I.3,2,5}) \qquad \text{— — — — — — — —}$$

$$\text{— — — — — — — —}$$

$$\sum_{j\in J} {}^{\varrho_k}a_{mj}\, x_j - \sum_{l=1}^{s} {}^{\varrho_k}f_{ml}\, \lambda_l = {}^{\varrho_k}b_m^*,$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J$$

rendszert.

(I.3,1,2) előállítható

$$(\text{I.3,2,6}) \qquad W_k = W_{k-1} \cup Q_k - \{\varrho_k\}$$

alakban, ahol

$$(\text{I.3,2,7}) \qquad Q_k = \Gamma(\varrho_k) - V_{k-1} - W_{k-1}.$$

Most $W_{k-1} \cap Q_k = \emptyset$, a Q_k halmaz tehát éppen azokat a csomókat tartalmazza, amelyeket a W_{k-1}-hez kell csatolni. (Azután már csak a ϱ_k csomót kell áthelyezni a W_{k-1} jegyzékből a V_k jegyzékbe.)

A Q_k halmaz meghatározására alkalmazott módszer könnyebb leírása céljából bevezetjük a következő definíciót.

I.3,2,1. definíció: Az R_ϱ tartománynak ($\varrho \in S$) az i-edik fal szerint ($i \in I$) szomszédja van, ha át lehet menni egy szomszéd tartományba az i-edik bázisváltozónak, x_{j_i}-nek a bázisból való kidobásával az (I.3,2,5) rendszerben.

Megjegyzés: A bázisváltozók sorrendjét az (I.3,2,5) rendszer sorainak sorrendje határozza meg. A falak számozása tehát függ a rendszer leírásának módjától, vagyis egy transzformáció sorozattal van megadva, amellyel az (I.3,2,5) rendszert megkapjuk az (I.1,1) — (I.1,3) rendszerből.

Az R_ϱ tartománynak van tehát szomszédja az i-edik fal szerint, ha

1′ ${}^{\varrho_k}a_{ij} < 0$ legalább egy $j \in {}^{\varrho_k}J_2$-re,

2′ létezik $\lambda^0 \in R_{\varrho_k}$ úgy, hogy ${}^{\varrho_k}b_i(\lambda^0) = 0$.

A Q_k halmaz konstrukcióját az alábbi terv szerint végezzük:

1°° Meghatározzuk a ϱ_k csomó potenciális $\pi_1^k, \ldots, \pi_t^k$ szomszédait, vagyis azon duálisan megengedett bázisok indexeit, amelyekhez át lehet menni egy duális szimplex algoritmus lépéssel.

Az ily módon nyert csomók közül egyesek már bent lehetnek a W_{k-1} vagy V_{k-1} jegyzékekben.

2°° Jelöljük $P(\subset I)$-vel az R_{ϱ_k} tartomány azon falai indexeinek a halmazát, amelyekről még nem tudjuk, hogy létezik-e szerintük szomszéd tartomány. (Nem tudjuk, teljesül-e a 2′ feltétel.)

3°° Elkészítjük a

$$\begin{aligned} \xi &= {}^{\varrho_k}b^* - (-{}^{\varrho_k}F)\,\lambda, \\ \eta &= d - G\lambda, \\ \xi &\geq 0, \quad \eta \geq 0, \end{aligned} \tag{I.3,2,8}$$

vagyis a

$$\begin{aligned} \xi_i &= {}^{\varrho_k}b_i^* - \sum_{j=1}^{s}(-{}^{\varrho_k}f_{ij})\,\lambda_j, & i &= 1, \ldots, m, \\ \eta_t &= d_t - \sum_{j=1}^{s} g_{tj}\lambda_j, & t &= 1, \ldots, r, \\ \xi_i &\geq 0, \eta_t \geq 0 \end{aligned} \tag{I.3,2,9}$$

rendszert és keressük ξ_i minimumát az (I.3,2,9) feltételekre nézve minden egyes $i \in P$ indexre.

4°° Legyen $\tilde{P}$ azon $i \in P$ indexek halmaza, amelyekre $\min \xi_i = 0$ (az (I.3,2,9) feltételek mellett).

5°° A Q_k jegyzékhez hozzácsapjuk az R_{ϱ_k} tartomány összes, eddig még nem regisztrált azon falak szerinti szomszédait, melyek indexeit a $\tilde{P}$ halmaz tartalmazza.[6]

Az algoritmus használatához a szimplex algoritmuson néhány fontos, de egyszerű módosítást kell végrehajtani. Ezekkel itt helyszűke miatt nem foglalkozunk, hanem az Ekonomicko Matematický Obzor című lapban való publikálásra előkészített kéziratra [24] utalunk.

II. A célfüggvény együtthatóinak lineáris parametrizációja

II.1. *A probléma megfogalmazása, alaptételek és definíciók*

A jobb oldali vektor lineáris parametrizációjának az I. részben tárgyalt módszere bizonyos módosításokkal használható a célfüggvény együtthatóinak (az árvektornak) lineáris parametrizációjára is. Mivel az egész eljárás analóg,

[6] Egy fal szerint több szomszéd is létezhet, ha a kulcselem választása nem egyértelmű a megfelelő sorban.

nem fogjuk részletesen leírni. Csak azokkal az eltérésekkel kívánunk foglalkozni, amelyek a definíciókat, vagy a számítás technikáját érintik.

A feladat most a következő:

$$\max w = (c^* + Hv)^T x, \tag{II.1,1}$$

feltéve, hogy

$$Ax = b, \tag{II.1,2}$$

$$x \geqq 0. \tag{II.1,3}$$

Itt A konstans $m \times n$ mátrix, H konstans $n \times s$ mátrix, $v \in E^s$ vektor paraméter, $c^* \in E^n$, $b \in E^m$ konstans vektorok. Jelöljük

$$c(v) = c^* + Hv. \tag{II.1,4}$$

A parametrizációt most is egy $M \subset E^s$ halmazon végezzük, melyet a

$$Gv \leqq d \tag{II.1,5}$$

egyenlőtlenségrendszer definiál. (G és d ugyanaz, mint az I. részben.)

A feladatot most célszerű a következő ekvivalens alakba átírni:

$$\max w = v^T y + z, \tag{II.1,6}$$

$$Ax = b, \tag{II.1,7}$$

$$y - H^T x = 0, \tag{II.1,8}$$

$$z - c^{*T} x = 0, \tag{II.1,9}$$

$$x \geqq 0. \tag{II.1,10}$$

A vektorparamétert továbbra is (II.1,5)-el korlátozzuk. $y \in E^s$ változó vektor, z skalár változó.

Mivel y komponensei és z előjelben nem korlátozott változók, végig a bázisban maradnak, így a (II.1,6) — (II.1,10) feladat bázisait karakterizálni lehet az x vektor komponensei közé tartozó bázisváltozók indexeivel.

A $\varrho = [j_1, \ldots, j_m]$ bázis indexet és a hozzá tartozó ${}^{\varrho}B$ bázist ugyanúgy értelmezzük, mint az I. részben. A (II.1,7) — (II.1,10) rendszer, a ${}^{\varrho}B$ bázisba traszformálva, a következő alakot ölti.

$${}^{\varrho}Ax = {}^{\varrho}b, \tag{II.1,11}$$

$$y + {}^{\varrho}H^T x = {}^{\varrho}q, \tag{II.1,12}$$

$$z + {}^{\varrho}c^{*T} x = z^{(\varrho)}, \tag{II.1,13}$$

$$w = -({}^{\varrho}Hv + {}^{\varrho}c^*)^T x + v^T\, {}^{\varrho}q + z^{(\varrho)}, \tag{II.1,14}$$

ahol

$${}^{\varrho}A = {}^{\varrho}B^{-1} A, \quad {}^{\varrho}b = {}^{\varrho}B^{-1} b, \tag{II.1,15}$$

továbbá, H_{ϱ}-val H-nak azt a részét jelölve, amely H-nak a bázisváltozókhoz tartozó soraiból áll,

(II. 1,16) $\quad {}^{\varrho}H^T = H_{\varrho}^T\,{}^{\varrho}B^{-1}A - H^T,\ {}^{\varrho}c^{*T} = c_{\varrho}^{*T}\,{}^{\varrho}B^{-1}A - c^{*T},$

(II. 1,17) $\quad {}^{\varrho}q = H_{\varrho}^T\,{}^{\varrho}b,\ z^{(\varrho)} = c_{\varrho}^{*T}\,{}^{\varrho}b\,.$

A ${}^{\varrho}B$ primál megengedett bázis azokra a $\nu \in M \subset E^s$ vektorparaméterekre optimális, melyekre ${}^{\varrho}c(\nu) \geqq 0$ vagyis

(II.1,18) $\quad -{}^{\varrho}H\nu \leqq {}^{\varrho}c^*$

és ezenkívül

(II.1,19) $\quad G\nu \leqq d.$

A (II.1,18) és (II.1,19) feltételek meghatározzák a ${}^{\varrho}B$ bázishoz tartozó $R_{\varrho} \subset E^s$ tartományt. ${}^{\varrho}B$ a (II.1,1) – (II.1,3) feladatnak (vagyis a (II.1,6) – (II.1,10) feladatnak) optimális bázisa, ha $R_{\varrho} \neq \emptyset$. A megengedett vektorparamétert ugyanúgy definiáljuk, mint az I.2,1 definícióban (λ helyébe ν-t téve).

Jelöljük most is K-val az összes megengedett $\nu \in E^s$ vektorparaméter halmazát. K az összes optimális ${}^{\varrho}B$ bázishoz tartozó R_{ϱ} halmazok egyesítése.

Az I.2,1. tétellel analóg a következő tétel.

II.1,1. tétel: Tegyük fel, hogy egy bizonyos $\nu^0 \in E^s$ vektorra létezik véges optimum. Ekkor a (II.1,1) – (II.1,3) feladatnak tetszőleges $\nu \in E^s$ esetén van megengedett megoldása, tehát tetszőleges $\nu \in E^s$ esetén vagy létezik véges optimum, vagy pedig a feladatnak nem korlátos megoldása van.

Változás nélkül fennáll az I.2,2. tétel. Az I.2,3. tétel analógja a következő: A $w_{\max}(\nu)$ függvény konvex a $K \subset E^s$ halmazon.

II.1,1. definíció: A ${}^{\varrho_1}B$, ${}^{\varrho_2}B$ optimális bázisokat szomszéd bázisoknak nevezzük, ha

1. létezik $\nu^* \in K$ úgy, hogy ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ a (II.1,1) – (II.1,3) feladat optimális bázisai $\nu = \nu^*$ esetén, továbbá

2. a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból a ${}^{\varrho_2}B$ bázisba (vagy fordítva) át lehet menni egy primál szimplex algoritmus lépéssel.

Változtatás nélkül érvényesek az I.2,4., I.2,5. definíciók és az I.2,4. – I.2,6. tételek (természetesen a λ és ν vektorok cseréjével).

II.2. *Az eljárás*

Az (S, Γ) gráf egy (S_0, Γ_0) komponense összes csomópontjának megkeresésére ismét az előző részben ismertetett algoritmust fogjuk használni. Most is tüzetesebben meg fogjuk vizsgálni a ${}^{\varrho_0}B$ optimális bázis meghatározásának (azaz az S_0 halmaz első eleme megtalálásának) módját, továbbá a szomszédok megadásánál követett módszert.

A ${}^{\varrho_0}B$ optimális bázis kereséséhez

1* Meghatározzuk az

(II.2,1)
$$A^T u - H\nu \geqq c^*$$
$$-G\nu \geqq -d$$

rendszer egy (u^0, ν^0) megengedett megoldását. A (II.2,1) rendszert duálisan oldhatjuk meg az

$$\begin{aligned} Ax \qquad\quad &= b, \\ y - H^T x - G^T v &= 0, \\ z - c^{*T} x + d^T v &= 0, \\ x \geq 0,\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

rendszer duálisan megengedett megoldásának keresése útján. Ha a (II.2,1) rendszernek nincs megoldása, akkor $K = \emptyset$.

2* A (II.2,1) rendszer megoldásával kapott ν^0 vektorparamétert behelyettesítjük (II.1,1) be és megoldjuk a

$$\max w = c^T(\nu^0)x, \tag{II.2,2}$$

$$Ax = b, \tag{II.2,3}$$

$$x \geq 0 \tag{II.2,4}$$

feladatot, ahol

$$c(\nu^0) = H\nu^0 + c^*. \tag{II.2,5}$$

Ha ennek a feladatnak van megengedett megoldása, akkor létezik a (II.2,2) — (II.2,4) feladat ${}^{\varrho_0}B$ optimális bázisa, amely a (II.1,1) — (II.1,3) feladatnak is optimális bázisa minden $\nu \in R_{\varrho_0}$ vektorra.

Az algoritmus általános lépésénél keressük a ϱ_k csomó még nem regisztrált (azaz szabad) szomszédait. A potenciális szomszédokat most természetesen mindazon primál megengedett bázisok között keressük, melyekhez át tudnuk menni a ${}^{\varrho_k}B$ bázisból a primál szimplex módszer egy lépésével.

II.2,1. definíció: Az R_{ϱ_k} tartománynak létezik szomszédja a j-edik fal szerint, ha át lehet menni egy szomszéd tartományba a j-edik nem bázis változónak a bázisba való bevonásával a (II.1,11) – (II.1,13) rendszerben, azaz ha

1″ ${}^{\varrho_k}a_{ij} > 0$ legalább egy $i \in I$-re,
2″ létezik $\nu^0 \in R_{\varrho_k}$ úgy, hogy ${}^{\varrho_k}c_j(\nu^0) = 0$.

A Q_k halmaz meghatározására az első részben leírt módszerrel analóg eljárást alkalmazunk. Most a

$$\begin{aligned} \xi &= {}^{\varrho_k}c^{*N} - (-{}^{\varrho_k}H^N)\,\nu, \\ \eta &= d - G\nu, \\ \xi &\geq 0,\ \eta \geq 0 \end{aligned} \tag{II.2,6}$$

rendszert tanulmányozzuk, ahol $\xi \in E^{n-m}$, $\eta \in E^r$. ${}^{\varrho_k}H^N$ a ${}^{\varrho_k}H$ mátrixnak azt a részét jelöli, amely ${}^{\varrho_k}H$-nak a nem bázis változókhoz tartozó soraiból áll, hasonlóan a ${}^{\varrho_k}c^{*N}$ vektor a ${}^{\varrho_k}c^*$ vektornak a nem bázis változókhoz tartozó komponensei által alkotott része. A Q_k halmazba berendeljük az R_{ϱ_k} tartomány összes, eddig még nem regisztrált azon falak szerinti szomszédait, melyek indexére $\min \xi_j = 0$ ($j \in {}^{\varrho_k}J_2$).

III. Illusztrációs példák

III.1. *A jobb oldali vektor parametrizációja*

Tekintsük a következő feladatot:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned}
x_1 \quad\quad &\leq 10 + \lambda_1 + 2\lambda_2,\\
x_2 &\leq 2 - \lambda_1 + \lambda_2,\\
x_1 + x_2 &\leq 20 \quad\quad - \lambda_2,\\
-x_1 + x_2 &\geq 4 \quad\quad\quad - \lambda_3,\\
x_1 + 2x_2 &\leq 12 + \lambda_1 \quad - \lambda_3,\\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

feltételek mellett, továbbá a λ vektorparamétert korlátozó

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 \quad\quad &\leq 10\\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &\geq 20
\end{aligned}$$

mellékfeltételek mellett.

Az adott feltételrendszert átírjuk az (I.3,2,1) – (I.3,2,2) rendszernek megfelelő alakba:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
x_1 & & -\lambda_1 & -2\lambda_2 & & +x_3 & & & & & & = 10\\
 & x_2 & +\lambda_1 & -\lambda_2 & & & +x_4 & & & & & = 2\\
x_1 & +x_2 & & +\lambda_2 & & & & +x_5 & & & & = 20\\
-x_1 & +x_2 & & & +\lambda_3 & & & & -x_6 & & +p_1 & = 4\\
x_1 & +2x_2 & -\lambda_1 & & +\lambda_3 & & & & & +x_7 & & = 12\\
 & & \lambda_1 & +\lambda_2 & & & & & & +\eta_1 & & = 10\\
 & & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & & & & & -\eta_2 & +p_2 & = 20
\end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 7;\ \eta_1, \eta_2 \geq 0;\ p_1, p_2 \geq 0.$$

Az induló szimplex táblát az 1,1 táblázat tartalmazza. A λ^0 megengedett vektorparaméterhez az 1,2–1,4 táblákon keresztül jutunk. Az 1,4 táblából már a szimplex algoritmus egyetlen lépésével (a p_2 mesterséges változó helyett a λ_2 változót helyezve a bázisba) át lehet menni a megengedett megoldásra, amely a $\lambda^0 = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{46}{3}\right)^T$ vektorparamétert szolgáltatja.

$\lambda = \lambda^0$-nak a kitűzött feladatba való behelyettesítésével kapott új feladatnak egyetlen lépéssel (2. → I. táblázat) megkapjuk egy optimális megoldását. Végrehajtottuk egyúttal a $-F$ mátrix és a b^* vektor transzformációját. A $\varrho_0 = [1, 3, 4, 5, 6]$ bázis indexhez tartozó R_{ϱ_0} tartományt tehát a

$$
\begin{aligned}
& -2\lambda_2 - \lambda_3 \leq -2\,, \\
& \lambda_1 - \lambda_2 \leq 2\,, \\
& \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \leq 8\,, \\
& \lambda_1 - 2\lambda_3 \leq -16\,, \\
& -\lambda_1 + \lambda_3 \leq 12\,, \\
& \lambda_1 + \lambda_2 \leq 10\,, \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 20\,,
\end{aligned}
\tag{III.1,1}
$$

feltételrendszer definiálja. Az R_{ϱ_0} halmazon a célfüggvény maximumát és az optimális megoldást a következő függvények adják meg:

$$
\begin{aligned}
z_{\max}^{(\varrho_0)}(\lambda) &= 36 + 3\lambda_1 + 3\lambda_3, \\
x_1(\lambda) &= 12 + \lambda_1 - \lambda_3, \\
x_2(\lambda) &= 0, \\
x_3(\lambda) &= -2 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \\
x_4(\lambda) &= 2 - \lambda_1 + \lambda_2, \\
x_5(\lambda) &= 8 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \\
x_6(\lambda) &= -16 - \lambda_1 + 2\lambda_3, \\
x_7(\lambda) &= 0.
\end{aligned}
\tag{III.1,3}
$$

Az A algoritmus szerint most meghatározzuk a potenciális szomszédokat. $P = \{1, 3, 4\}$, tehát a potenciális szomszédok $\pi_1^0 = [1, 2, 4, 5, 6]$, $\pi_2^0 = [1, 3, 4, 6, 7]$ és $\pi_3^0 = [1, 2, 3, 4, 5]$. Ezután a 3^{00} pontnak megfelelően elvégezve a ξ_1, ξ_3, ξ_4 változók minimálását, (I.1–I.6 táblázatok) azt találjuk, hogy csak a negyedik fal szerint létezik szomszéd, vagyis $\widetilde{P} = \{4\}$. Így tehát megkaptuk, hogy $V_0 = \{[1, 3, 4, 5, 6]\}$, $W_0 = \{[1, 2, 3, 4, 5]\}$, és áttérhetünk az algoritmus második lépésére.

$\varrho_1 = [1, 2, 3, 4, 5]$ választása most kötött. Az x_6 változó helyett bevonva a bázisba az x_2 változót, a *II.* táblát kapjuk. Itt negatív együtthatók az 1., 2., 3. és 4. sorban vannak. Mivel a negyedik fal szerinti, még nem regisztrált szomszéd most nem lehetséges, elég a következő potenciális szomszédokat tekinteni:

$$\pi_1^1 = [1, 2, 4, 5, 6],\ \pi_2^1 = [1, 2, 3, 5, 7],\ \pi_3^1 = [1, 2, 3, 4, 7].$$

Az előbbivel azonos módon kapjuk, hogy $\widetilde{P} = \{2\}$,

tehát
$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{[1, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 5]\}, \\
W_1 &= \{[1, 2, 3, 5, 7]\}.
\end{aligned}
$$

Az algoritmus következő lépésére térve, vesszük a $\varrho_2 = [1, 2, 3, 5, 7]$ indexet. A hozzátartozó szimplex tábla a III. táblázat. Megismételve a szokásos eljárást, újabb szomszédot már nem kapunk, tehát az algoritmus végetér. Végül

$$V_2 = \{[1, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 5], [1, 2, 3, 5, 7]\},$$
$$W_2 = \emptyset .$$

A II. és III. tábla alapján könnyen felírhatók az R_{ϱ_1} ill. R_{ϱ_2} tartományok meghatározó feltételei, valamint a $z_{\max}(\lambda)$ és $x_i(\lambda)$ függvények e tartományokon.

III.2. *Az árvektor parametrizációja*

Tűzzük ki a

$$\max z = (-2 + 2\nu_1 + 2\nu_2)x_1 + (1 - \nu_1 + \nu_2)x_2 + (1 - \nu_2)x_3$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 10,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

feladatot. (Az egyszerűség kedvéért kihagytuk a mellékfeltételeket, így M most azonos az E^s térrel.)

Az x_4, x_5 maradékváltozók bevezetésével a feltételrendszer

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad &= 4,\\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 10,\\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

A kiinduló szimplex tábla a 3. táblázatban van. Mivel az induló megoldás duálisan nem megengedett, a táblázatot kibővítjük a p_1, p_2 duál mesterséges változókkal.

A $p_1 + p_2$ függvényt a duál algoritmus segítségével minimálva, folyamatosan elimináljuk a mesterséges változókat, és végül a IV. táblázathoz jutunk, amely a $\varrho_0 = [2, 4]$ bázis indexhez tartozik. Alkalmazva a dolgozat első részében közölt algoritmust, annak egyes lépései során a

$$V_0 = \{[2, 4]\},\ W_0 = \{[1, 2]\};$$
$$V_1 = \{[2, 4], [1, 2]\},\ W_1 = \{[1, 3]\};$$
$$V_2 = \{[2, 4], [1, 2], [1, 3]\},\ W_2 = \emptyset$$

halmazokat kapjuk. A megfelelő táblázatokból most is fel tudjuk írni az R_{ϱ_0}, R_{ϱ_1}, R_{ϱ_2} tartományok meghatározó feltételeit, valamint az optimális megoldást és az optimumot megadó függvényeket e tartományokon.

(Beérkezett: 1969 január 16.)

TÁBLÁZATOK

1.1. tábla

	x_1	x_2	x_6	λ_1	λ_2	λ_3	η_2	
x_3	1	0	0	−1	−2	0	0	10
x_4	0	1	0	1	−1	0	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	0	20
p_1	−1	1	−1	0	0	$\boxed{1}$	0	4
x_7	1	2	0	−1	0	1	0	12
η_1	0	0	0	1	1	0	0	10
p_2	0	0	0	1	1	1	−1	20
$-\sum_{i=1} p_i$	1	−1	1	−1	−1	−2	1	−24

1.2. tábla

	x_1	x_2	x_6	λ_1	λ_2	η_2	
x_3	1	0	0	−1	−2	0	10
x_4	0	1	0	$\boxed{1}$	−1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	20
λ_3	−1	1	−1	0	0	0	4
x_7	2	1	1	−1	0	0	8
η_1	0	0	0	1	1	0	10
p_2	1	−1	1	1	1	−1	16
$-\sum_{i=1}^{2} p_i$	−1	1	−1	−1	−1	1	−16

1.3. tábla

	x_1	x_2	x_6	x_4	λ_2	η_2	
x_3	1	1	0	1	−3	0	12
λ_1	0	1	0	1	−1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	20
λ_3	−1	1	−1	0	0	0	4
x_7	2	2	$\boxed{1}$	1	−1	0	10
η_1	0	−1	0	−1	2	0	8
p_2	1	−2	1	−1	2	−1	14
$-\sum_{i=1}^{2} p_i$	−1	2	−1	1	−2	1	−14

1.4. tábla

	x_1	x_2	x_7	x_4	λ_2	η_2	
x_3	1	1	0	1	—3	0	12
λ_1	0	1	0	1	—1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	20
λ_3	1	3	1	1	—1	0	14
x_6	2	2	1	1	—1	0	10
η_1	0	—1	0	—1	2	0	8
p_2	—1	—4	—1	—2	$\boxed{3}$	—1	4
$-\sum_{i=1}^{2}{}' p_i$	1	4	1	2	—3	1	—4

2. tábla

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	b^*	$b(\lambda^0)$
x_3	1	0	—1	—2	0	10	16
x_4	0	1	1	—1	0	2	0
x_5	1	1	0	1	0	20	56/3
x_6	1	—1	0	0	—1	—4	34/3
x_7	$\boxed{1}$	2	—1	0	1	12	0
	—3	—2	0	0	0	0	0

I. tábla

	x_7	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	${}^{\varrho_0}b^*(\lambda)$	${}^{\varrho_0}b(\lambda^0)$
x_3	—1	—2	0	—2	—1	—2	16
x_4	0	1	1	—1	0	2	0
x_5	—1	—1	1	1	—1	8	56/3
x_6	—1	$\boxed{-3}$	1	0	—2	—16	34/3
x_1	1	2	—1	0	1	12	0
	3	4	—3	0	3	36	0

I.1. tábla

	λ_1	λ_2	λ_3	
ξ_1	0	—2	—1	—2
ξ_2	$\boxed{1}$	—1	0	2
ξ_3	1	1	—1	8
ξ_4	1	0	—2	—16
ξ_5	—1	0	1	12
η_1	1	1	0	10
η_2	—1	—1	—1	—20

I.2. tábla

	ξ_2	λ_2	λ_3	
ξ_1	0	—2	—1	—2
λ_1	1	—1	0	2
ξ_3	—1	2	—1	6
ξ_4	—1	1	—2	—18
ξ_5	1	$\boxed{-1}$	1	14
η_1	—1	2	0	8
η_2	1	—2	—1	—18

I.3. tábla

	ξ_2	ξ_5	λ_3	
ξ_1	—2	—2	—3	—30
λ_1	0	—1	—1	—12
ξ_3	1	2	1	34
ξ_4	0	1	—1	—4
λ_2	—1	—1	—1	—14
η_1	1	2	2	36
η_2	—1	—2	$\boxed{-3}$	—46

I.4. tábla

	ξ_2	ξ_5	η_2	
ξ_1	—1	0	—1	16
λ_1	1/3	—1/3	—1/3	10/3
ξ_3	2/3	4/3	1/3	56/3
ξ_4	1/3	$\boxed{5/3}$	—1/3	34/3
λ_2	—2/3	—1/3	—1/3	4/3
η_1	1/3	2/3	2/3	16/3
λ_3	1/3	2/3	—1/3	46/3

I.5. tábla

	ξ_2	ξ_4	η_2	
ξ_1	—1	0	—1	16
λ_1	2/5	1/5	—2/5	28/5
ξ_3	2/5	—4/5	3/5	48/5
ξ_5	1/5	3/5	—1/5	34/5
λ_2	—3/5	1/5	—2/5	18/5
η_1	$\boxed{1/5}$	—2/5	4/5	4/5
η_3	1/5	—2/5	—1/5	54/5

I.6. tábla

	η_1	ξ_4	η_2	
ξ_1	5	—2	3	20
λ_1	—2	1	—2	4
ξ_3	—2	0	—1	8
ξ_5	—1	1	—1	6
λ_2	3	—1	2	6
ξ_2	5	—2	4	4
λ_3	—1	0	—1	10

II. tábla

	x_7	x_6	λ_1	λ_2	λ_3	$e_1 b(\lambda)$
x_3	—1/3	—2/3	—2/3	—2	1/3	26/3
x_4	$\boxed{-1/3}$	1/3	4/3	—1	—2/3	—10/3
x_5	—2/3	—1/3	2/3	1	—1/3	40/3
x_2	1/3	—1/3	—1/3	0	2/3	16/3
x_1	1/3	2/3	—1/3	0	—1/3	4/3
	5/3	4/3	—5/3	0	1/3	44/3

II.1. tábla

	λ_1	λ_2	λ_3	
ξ_1	—2/3	—2	1/3	26/3
ξ_2	4/3	—1	—2/3	—10/3
ξ_3	2/3	1	—1/3	40/3
ξ_4	—1/3	0	2/3	16/3
ξ_5	—1/3	0	—1/3	4/3
η_1	1	1	0	10
η_2	—1	$\boxed{-1}$	—1	—20

II.2. tábla

	λ_1	η_2	λ_3	
ξ_1	4/3	—2	7/3	146/3
ξ_2	7/3	—1	1/3	50/3
ξ_3	—1/3	1	—4/3	—20/3
ξ_4	$\boxed{-1/3}$	0	2/3	16/3
ξ_5	—1/3	0	—1/3	4/3
η_1	0	1	—1	—10
λ_2	1	—1	1	20

II.3. tábla

	ξ_4	η_2	λ_3	
ξ_1	4	—2	5	70
ξ_2	7	—1	$\boxed{5}$	54
ξ_3	—1	1	—2	—12
λ_1	—3	0	—2	—16
ξ_5	—1	0	—1	—4
η_1	0	1	—1	—10
λ_2	3	—1	3	30

II.4. tábla

	ξ_4	η_2	ξ_2	
ξ_1	—3	—1	—1	16
λ_3	7/5	—1/5	1/5	54/5
ξ_3	9/5	3/5	2/5	48/5
λ_1	—1/5	—2/5	2/5	28/5
ξ_5	2/5	—1/5	1/5	34/5
η_1	7/5	4/5	$\boxed{1/5}$	4/5
λ_2	—6/5	—2/5	—3/5	18/5

II.5. tábla

	ξ_4	η_2	η_1	
ξ_1	4	3	5	20
λ_3	0	−1	−1	10
ξ_3	−1	−1	−2	8
λ_1	−3	−2	−2	4
ξ_5	−1	−1	−1	6
ξ_2	7	4	1	4
λ_2	3	2	3	6

III. tábla

	x_4	x_6	λ_1	λ_2	λ_3	$\varrho_2 b(\lambda)$
x_3	−1	−1	−2	−1	1	12
x_7	−3	−1	−4	3	2	10
x_5	−2	−1	−2	3	1	20
x_2	1	0	1	−1	0	2
x_1	1	1	1	−1	−1	−2
	5	3	5	−5	−3	−2

III.1. tábla

	λ_1	λ_2	λ_3	
ξ_1	−2	−1	1	12
ξ_2	−4	3	2	10
ξ_3	−2	3	1	20
ξ_4	$\boxed{1}$	−1	0	2
ξ_5	1	−1	−1	−2
η_1	1	1	0	10
η_2	−1	−1	−1	−20

III.2. tábla

	ξ_4	λ_2	λ_3	
ξ_1	2	−3	1	16
ξ_2	4	$\boxed{-1}$	2	18
ξ_3	2	1	1	24
λ_1	1	−1	0	2
ξ_5	−1	0	−1	−4
η_1	−1	2	0	8
η_2	1	−2	−1	−18

III.3. tábla

	ξ_4	ξ_2	λ_3	
ξ_1	—10	—3	—5	—38
λ_2	—4	—1	—2	—18
ξ_3	6	1	3	42
λ_1	—3	—1	—2	—16
ξ_5	—1	0	—1	—4
η_1	7	2	4	44
η_2	—7	—2	$\boxed{-5}$	—54

III.4. tábla

	ξ_4	ξ_2	η_4	
ξ_1	—3	1	—1	16
λ_2	—6/5	—1/5	—2/5	18/5
ξ_3	9/5	—1/5	3/5	48/5
λ_1	—1/5	—1/5	—2/5	28/5
ξ_5	2/5	2/5	—1/5	34/5
η_1	7/5	$\boxed{2/5}$	4/5	4/5
λ_3	7/5	2/5	—1/5	54/5

III.5. tábla

	ξ_4	η_1	η_2	
ξ_1	—13/2	—5/2	—3	14
λ_2	—1/2	1/2	0	4
ξ_3	5/2	1/2	1	10
λ_1	1/2	1/2	0	6
ξ_5	—1	—1	—1	6
ξ_2	7/2	$\boxed{5/2}$	2	2
λ_3	0	—1	—1	10

III.6. tábla

	ξ_2	η_1	η_2	
ξ_1	13/7	15/7	4/7	124/7
λ_2	1/7	6/7	2/7	30/7
ξ_3	—5/7	—9/7	—3/7	60/7
λ_1	—1/7	1/7	—2/7	40/7
ξ_5	2/7	—2/7	—3/7	46/7
ξ_4	2/7	5/7	4/7	4/7
λ_3	0	—1	—1	10

3. tábla

	(u_3) x_1	(u_4) x_2	(u_5) x_3	
(u_1) x_4	1	—2	—1	4
(u_2) x_5	1	1	0	10
ν_1	—2	1	0	0
ν_2	—2	—1	1	0
	2	—1	—1	0

3a. tábla

	(u_3) x_1	(u_4) x_2	(u_5) x_3	
(u_1) x_4	1	—2	—1	4
(u_2) x_5	1	1	0	10
p_1	0	1	0	0
p_2	0	0	1	0
ν_1	—2	1	0	0
ν_2	—2	—1	1	0
	2	—1	—1	0

3.b. tábla

	x_1	p_1	p_2		$\sum\limits_{i=1}^{2} p_i$
x_4	1	2	1	4	3
x_5	1	—1	0	10	—1
x_2	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	1
ν_1	—2	—1	0	0	—1
ν_2	—2	1	—1	0	0
	2	1	1	0	2

4. tábla

	x_1	x_5	p_2		$\sum\limits_{i=1}^{2} p_i$
x_4	3	2	1	24	1
x_2	1	1	0	10	0
x_3	0	0	1	0	1
ν_1	—3	—1	0	—10	0
ν_2	—1	1	—1	10	—1
	3	1	1	10	1

IV. tábla

	x_1	x_5	x_3	
x_4	$\boxed{3}$	2	−1	24
x_2	1	1	0	10
ν_1	−3	−1	0	−10
ν_2	−1	1	1	10
	3	1	−1	10
$\varrho_0 c^T(\nu^0)$	2	2	0	20

IV.1. tábla

	ν_1	ν_2	
ξ_1	3	1	3
ξ_2	1	−1	1
ξ_3	0	$\boxed{-1}$	−1

IV.2. tábla

	ν_1	ξ_3	
ξ_1	$\boxed{3}$	1	2
ξ_2	1	−1	2
ν_2	0	−1	1

IV.3. tábla

	ξ_1	ξ_3	
ν_1	1/3	1/3	2/3
ξ_2	−1/3	−4/3	4/3
ν_2	0	−1	1

V. tábla

	x_4	x_5	x_3	
x_1	1/3	2/3	−1/3	8
x_2	−1/3	1/3	$\boxed{1/3}$	2
ν_1	1	1	−1	14
ν_2	1/3	5/3	2/3	18
	−1	−1	0	−14

V.1. tábla

	ν_1	ν_2	
ξ_1	$\boxed{-1}$	−1/3	−1
ξ_2	−1	−5/3	−1
ξ_3	1	−2/3	0

V.2. tábla

	ξ_1	ν_2	
ν_1	−1	1/3	1
ξ_2	−1	−4/3	0
ξ_3	1	$\boxed{-1}$	−1

V.3. tábla

	ξ_1	ξ_3	
ν_1	−2/3	1/3	2/3
ξ_2	−7/3	−4/3	4/3
ν_2	−1	−1	1

VI. tábla

	x_4	x_5	x_2	
x_1	0	1	1	10
x_3	−1	1	3	6
ν_1	0	2	3	20
ν_2	1	1	−2	14
	−1	−1	0	−14

VI.1. tábla

	ν_1	ν_2	
ξ_1	0	$\boxed{-1}$	−1
ξ_2	−2	−1	−1
ξ_3	−3	2	0

VI.2. tábla

	ν_1	ξ_1	
ν_2	0	−1	−1
ξ_2	−2	−1	0
ξ_3	$\boxed{-3}$	2	−2

VI.3. tábla

	ξ_3	ξ_1	
ν_2	0	−1	1
ξ_2	−2/3	−7/3	4/3
ν_1	−1/3	−2/3	2/3

IRODALOM

1. Beightler, Ch. S.—Wilde, D. J.: Sensitive analysis gives better insight into linear programming. Petr. Ref. 44, 1965, II 2, 111—126 pp.
2. Courtillot: Programmation linéaire. Étude de la modification de tous les parameters. CR de Siences de L'Academie de Siences, 247, 1958. 7., 670—673 pp.
3. Černikov, S. N.: Svertyvanije konečnych sistem linejnych neravenstv. Ž. vyčisl. mat. i mat. fiz. 5. 1965. 1., 3—20 pp.
4. Černikova, N. V.: Algoritm dlja nachoždénija obščej formuli neotricatelnych rešenij sistemy linejnych neravenstv. Ž. vyčisl. mat. i mat. fiz. 5, 1965. 2., 334—337 pp.
5. Dragan, I.: Un algorithm pour la résolution de certains problèmes paramétriques, avec un seul parametre contenu dans la fonction économique. Rev. Roum. Mat. pur. et appl. 11, 1966. 4., 447—451 pp.
6. Finkelštejn, B. V.: Obobščenije parametričeskoj zadači linejnogo programmirovanija. Ekon. mat. met. 1, 1965. 3., 442—450 pp.
7. Fischer, M.: Rozbor jednoho systému charakterizovaného lineární transformací a řízeného lineární cílovou funkcí. Výzk. práce č. 134, Praha 1967. VÚNP
8. Fotr, J.: Poznámky ke konstrukci modelů lineárního programování a interpretaci jejich výsledků. Ekon. mat. obzor 3, 1967, 3. sz., 366—378 pp.
9. Gál, T.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 1. Sledování změn prvků a_{ij} matice soustavy podmínek simplexové úlohy lineárního programování. Ekon. mat. obzor. 3, 1967. 4., 446—456. pp.
10. Gál, T.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 2. Sledování změn koeficientů a_{ij} základních strukturních proměnných simplexové úlohy lineárního programování. Ekon. mat. obzor 4, 1968. 1., 76—92 pp.
11. Gál, T.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 3. Sledování současné změny všech koeficientů a_{ij} základních i nezákladních strukturních proměnných simplexové úlohy lineárního programování. Ekon. mat. obzor 4, 1968. 2., 190—201 pp.
12. Gál, T.: Modifikovaná metoda lineárního parametrického programování. Zeměd. ekon. 14, 1968. 1., 17—36 pp.
13. Gál, T.—Habr, J.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 4. Ekonomicko matematický pohled na problémy degenerace. Ekon. mat. obzor 4, 1968. 3., 320—336 pp.

14. GASS, S. I.—SAATY, T. L.: The parametric objective function. I. Opns. Res. 2, 1954. 316—319 pp.
15. GASS, S. I.—SAATY, T. L.: The parametric objective function. II. Opns. Res. 3, 1965. 395—401 pp.
16. GASS, S. I.—SAATY, T. L.: The computational algorithm for the parametric objective function. Naval Res. Log. Quart. 2, 1955. 39—45 pp.
17. HABR, J.: Systémové programování. Statistika a demografie 5, 1965. 145—153 pp.
18. HESS, H. D.: Anwendung einer parametrischen linearen Programmierung in einem chemischen Betrieb. Ind. Org. 35, 1966. 2. 76—77 pp.
19. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Systems evaluation and repricing theorems. Managem. Sci. 9, 1962. 209—228 pp.
20. JOKSCH, H. C.: Constraints, objectives, efficient solutions and suboptimisation in mathematical programming. Z. ges. Staatwis. 122, 1966, 1., 5—13 pp.
21. KAŠKA, J.: O jedné úloze parametrického programování. Ekon. mat. obzor. 3, 1967. 3., 298—307 pp.
22. MAŇAS, J.—NEDOMA, J.: Finding all vertices of convex polyhedron. Numer. Math. 12, 1968. 225—229 pp.
23. MARUNOVÁ, E.: Lineární parametrizace vstupních dat úloh lineárního programování a možnosti jejího uplatnění v zemědělství. Kand. dis. práce VŠZ Praha—Čes. Budějovice, 1968.
24. NEDOMA, J.: Některé modifikace simplexového algoritmu. (Kézirat.)
25. NYKOWSKI, I.: Dwuparametryczny dualny problem liniowy. I. Przegl. statyst. 12, 1965. 3., 203—217 pp.
26. NYKOWSKI, I.: Dwuparametryczny dualny problem liniowy. II. Przegl. statyst. 12, 1965. 4., 311—323 pp.
27. PANNE, C. VAN DE: Post optimality analysis via the reverse simplex method and the Tarry method. Faculty of Economics, State Univ. of Groningen, July 1966.
28. SAATY, T. L.: Coefficient perturbation of a constrained extremum. Opns. Res. 7, 1959, 284—303 pp.
29. SOKOLOVÁ, L.: Problém víceparametrického lineárního programování. Ekon. mat. obzor. 4, 1968. 1., 44—68 pp.
30. ZELINKA, J.: Řešení úloh lineárního programování s dolními a horními omezeními. Ekon. mat. labor. při Ekon. ústavu ČSAV, Výzk. publ. č. 7, Praha 1965.
31. ZOUTENDIJK, G.: Methods of feasible directions. Elsevier Publ. Co. Amsterdam—London—New York—Princeton. 1960.

MULTI-PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING ON THE RIGHT-HAND SIDE OR IN THE OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS

The problem of multiparametric linear programming has been studied and solved in several works on a high theoretical level. The application however, requires the knowledge not only of theoretical relations, but also of methods which can be used in pratical work.

The purpose of the work under review is to present a method of multiparametric linear programming of the righthand side vector, or the vector of prices, which may be found convenient for numerical computation, and, hence, for the construction of corresponding computer programmes. An example illustrates the applicability of the method.

The multiparametric linear programming problem can be written down as follows: Maximize

$$z = c^T x \text{ (max)}$$

subject to

$$Ax = b(\lambda),\ x \geq 0$$

where A is an m by n matrix of constant coefficients, $c, x, 0 \in E^n$, $\lambda \in E^s$ is a vector-parameter, $b(\lambda) \in E^m$. Further:

$$b(\lambda) = b^* + F\lambda,$$

where F is an m by s matrix of constant entries.

Or: Maximize

$$z = c^T(\nu)\, x \ \text{(max)}$$

subject to

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

where

$$c(\nu) = c^* + H\nu,$$

and H is an n by s matrix of constant coefficients, $\nu \in E^s$ is a vectorparameter.

The structure of the matrix, F, or H is closely connected with the analysis of a specified system, and its environmental interrelations. The economic interpretation of the coefficients of the vectorparameters is not discussed here.

The method of multiparametric linear programming is based upon a method for finding all vertices (extreme points) of a convex polyhedron, which works with the aid of the theory of graphs.

In deriving the method of multiparametric linear programming the simplex algorithm had to be slightly modified.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРАВОЙ СТОРОНЕ ИЛИ В КОЕФФИЦИЕНТАХ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Проблема многопараметрического линейного программирования (далее толко MLP) была изучена и решена в некоторых научных работах на высоком теоретическом уровне. Для практического использования этого метода не является достаточным знать только теоретические соотношения, но нужно иметь метод, которым можно пользоваться непосредственно на практике.

Целой представленной работы является разработка метода линейной параметризации вектора правых сторон, или коэффициентах целевой функции, применение которого пригоден для нумерических вычислений и раздаботки для ЭВМ. В конуе статьи представляется метод на иллюстративном примере.

Проблем M L P можно сформулировать как следующую задачу:

Максимизировать функции

$$z = c^T x \ \text{(max)}$$

при условиях $\quad Ax = b(\lambda),\ x \geq 0,$

где A матрица типа $\quad (m,\ n),\ c\ \ x,\ 0 \in E^n b\,(\lambda) \in E^m, \quad \lambda \in E^s$ вектор-параметр.

Далее $\quad b\,(\lambda) = b^* + F\,\lambda,$

где F матрица постоянных элементов типа (m, s).

Или же: максимизировать функции

$$z = c^T(\nu) x \ \text{(max)}$$

При условиях

$$Ax = b,\ x \geq 0,$$

где

$$c(\nu) = c^* + H\nu$$

и H матрыца постоянных элементов типа (n, s), $\nu \in E^s$ вектор-параметр.

Конструкция элементов матрыц F и H тесно связана с анализом данной экономической системы и с взаимосоотношениями ее средой. Экономическим истолкованием помощи элементов вектор-параметров в работе авторы не занимаюся.

Метод M L P основан на методе нахождения всех вершин выпуклого многогранника; при помощи из теории графиков.

Для выведения соответсвующих соотношений метода M L P нужны некоторые модификации симплекс метода.