KONDOR GYÖRGY

# Leképezés fix pontjának és a gazdaság egyensulyi helyzetének numerikus approximációja Scarf módszereivel

*(Első rész)**

E dolgozat célja felhívni a figyelmet SCARF két nevezetes [18], [19] dolgozatára, amelyek a versenyzői egyensúlyi helyzetek megközelítését tárgyalják. Versenyzői egyensúlyi modellekkel számos dolgozat foglalkozik, a legjelentősebb műveket megemlítem az irodalomjegyzékben. E dolgozat II. és III. fejezetében feltételezem az egyensúlyelmélet legfontosabb fogalmainak ismeretét.

Az egyensúly létezésének kimutatásához általában, de nem mindig, a fix pont tételeket használták fel. A fix pont tételektől többnyire közvetlenül juthatunk el az egyensúlyi árak és helyzetek (egyensúlyi termelési és fogyasztási struktúrák) létezéséhez; ezeknek a bizonyításoknak azonban az a fő hátrányuk, hogy *nem konstruktívak*, vagyis, hogy nem adnak módszert ilyen helyzetek kiszámításához illetve megközelítéséhez.

Scarf 1967-ben megjelent [18] munkája konstruktív bizonyítást ad. Eléggé különös, annak ellenére, hogy az utolsó két évtizedben a matematikai közgazdaságtan oly sokat fejlődött, az egyensúlyi helyzet kiszámítására Scarf szóban forgó dolgozatáig nem vált más módszer ismertté. Ez részben annak tudható be, hogy többnyire a gazdaság termelési oldalát érintő modelekkel foglalkoztak és figyelmen kívül hagyták az eltérő hasznosságfüggvényekkel rendelkező fogyasztók szerepét.

Az ismertetésre kerülő dolgozatok matematikai lényege két tétel. Az első a Sperner lemmával rokon, és ahhoz hasonlóan használható fel folytonos leképzés fix pontja létezésének kimutatásához. A tétel bizonyításához Scarf megad egy algoritmust, amelyről kimutatja, hogy véges és hogy segítségével meglehetősen hamar juthatunk el egy közelítő fix ponthoz. Erről a kérdésről a továbbiakban részletesen lesz szó. A második tétel szintén felhasználható a Brouwer tétel bizonyításához, amikor egy szimplextől különböző korlátos poliédrikus konvex halmazt képezünk le saját magába. E tétel segítségével elégséges feltételeket kaphatunk arra is, hogy egy $n$-személyes játék magja ne legyen üres [20]. Végül eredményesen alkalmazható a később bemutatásra kerülő közgazdasági probléma megoldása is. Bár a tárgyalásból nem tűnik ki közvetlenül, Scarf algoritmusai közvetlen kapcsolatban állnak a LEMKE–HOWSON [13] és LEMKE [14] dolgozatában publikált eredményekkel.

Az ismertetendő dolgozatok közgazdasági lényege az, hogy numerikus módszert kapunk két, eltérő tulajdonságokkal rendelkező (absztrakt) gazdaság egyensúlyi helyzeteinek megközelítésére.

* A cikk befejező második részét következő számunkban közöljük.

Mielőtt rátérnék Scarf dolgozatainak ismertetésére, hangsúlyozni szeretném, hogy Scarf eredményei minden bizonnyal egyéb területeken is alkalmazhatók.

Először a matematikai tárgyalásra kerül sor. Ezt követi a matematikai eredmények közgazdasági alkalmazása és a numerikus példák bemutatása. E dolgozat első és második fejezete túlnyomórészt Scarf [18] munkáján alapszik. Az első fejezetben olyan folytonos leképzést vizsgálunk, amely egy *szimplexet* sajátmagába képez le. Scarf szóban forgó dolgozatának utolsó, hetedik fejezetét nem ismertetem teljes egészében. Bár [18] hetedik fejezetének 2. tételét e dolgozat első fejezetének végén részletesen tárgyalom, a 3. tételt — amelyik zárt korlátos *poliéder* sajátmagába való folytonos leképezésével foglalkozik — elhagyom, mert egyrészt e dolgozat főcímében jelzett problémát nem érinti,[1] másrészt e dolgozat lehetséges terjedelme is erre kényszerít. A 2. tétel bizonyításának alapját és a harmadik fejezet lényegét Scarf [19] dolgozata adja.

## I. Folytonos leképezés fix pontjának megközelítése

Legyen az $S$ szimplex $S : \{\boldsymbol{\pi} \mid \Sigma_{i=1}^{n} \pi_i = 1;\ \pi_i \geq 0\}$, ahol $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$. A szimplex önmagába való folytonos leképzését az $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) = (f_1(\boldsymbol{\pi}), \ldots, f_n(\boldsymbol{\pi}))$ folytonos vektor-vektor függvény adja, amelyre tehát $\Sigma_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{\pi}) = 1$ és $f_i(\boldsymbol{\pi}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Brouwer tétele azt állítja, hogy létezik olyan $\hat{\boldsymbol{\pi}}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}} \in S$ vektor, amelyre $\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\pi}}) = \hat{\boldsymbol{\pi}}$.

A tétel a Sperner lemma néven ismeretes kombinatorikai eredmény segítségével bizonyítható be([10], [21]). Scarf kifejtésének megértéséhez hasznos ezt áttekintenünk.

Legyen $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ önkényesen kiválasztott, egymástól eltérő pontok sorozata az $S$ szimplexen. Összekötve $\boldsymbol{\pi}^1$-et $S$ $n$ számú csúcsa mindegyikével. $S$-nek $n$ számú alszimplexbe való felbontásához jutunk (lásd az 1. ábrát). Ekkor összekötjük $\boldsymbol{\pi}^2$-t azon alszimplex $n$ darab csúcsával, amelyhez tartozik és folytatjuk ezt a szukcesszív finomítást a $\boldsymbol{\pi}^3, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ pontok mindegyikével. Eredményül $S$-nek egy specifikus felbontását kapjuk, amelyben a $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ sorozat megfelelő kiválasztásaival az alszimplexek maximális átmérőjét önkényesen kicsivé tehetjük.

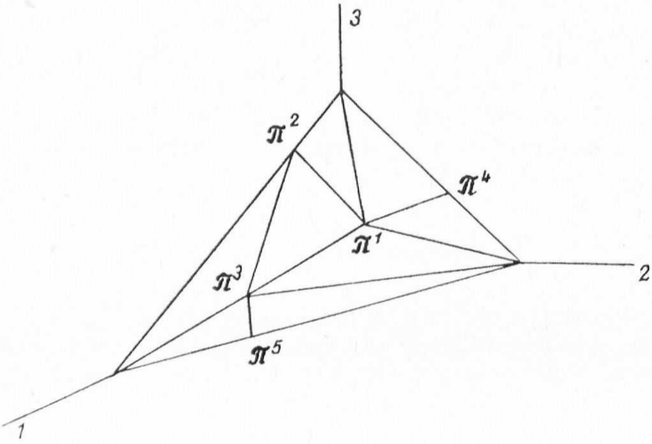
Mindegyik $\boldsymbol{\pi}$ csúcsnak megfeleltetünk egy olyan indexet, amelyre $\pi_i > 0$ és $f_i(\boldsymbol{\pi}) \leq \pi_i$. Világos, hogy mindig található legalább egy ilyen index. A perner lemma azt állítja, hogy a felbontásnak legalább egy alszimplexében az összes csúcs különféleképpen van indexelve. Más szavakkal, a leképzéshez található olyan alszimplex, amelyben az $n$ csúcs mindegyikénél egy egymástól különböző koordináta *nem* növekszik.

Újabb csúcsok hozzáadásával a felosztás finomítható úgy, hogy a felosztásban szereplő alszimplexek maximális átmérője zéróhoz tartson. Mindegyik felosztás tartalmaz olyan alszimplexet, amelynek összes csúcsa különféleképpen van indexelve. Ebből már következik, hogy található az alszimplexeknek olyan sorozata, amelyek csúcsai egy $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ ponthoz konvergálnak. Mivel a leké-

[1] Zárt korlátos halmaz (nem feltétlenül poliéder) sajátmagába való folytonos leképezésével — az erre vonatkozó Brouwer tétellel — magyar nyelven Szép Jenő [21] könyve foglalkozik. Lásd: Id. mű 472—477.

pezés folytonos $f_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) \leq_i \hat{\boldsymbol{\pi}}_i$ minden $i$-re, amiből — tekintettel arra, hogy $\Sigma_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{\pi}) = 1$ — következik, hogy $f_i(\hat{\pi}) = \hat{\boldsymbol{\pi}}_i$ $i = 1, \ldots, n$, vagyis hogy $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ a leképezés fix pontja.

Scarf a $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ fix pont numerikus approximációjaként egy olyan $\boldsymbol{\pi}$ vektort fogad el, amelynek képe kevesebb, mint egy adott $\gamma > 0$ távolságra van sajátmagától. Válasszuk az $\| \mathbf{x} \|$ normát max $\{| x_1 |, \ldots, | x_n |\}$-nek, és két vektor távolsága mértékéül vegyük a két vektor különbségének e normáját,




1. ábra.

vagyis a különbségvektor legnagyobb abszolút értékű komponensének abszolút értékét. Belátható, hogy a Sperner lemma felhasználható $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi})$ fix pontjának ilyen értelmű megközelítésére.

Ehhez mindenekelőtt vegyük tekintetbe azt, hogy az $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi})$ függvény folytonos egy korlátos és zárt halmazon. Ezért adott $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy $\| \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}') - \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}'') \| \leq \varepsilon$, ha $\| \boldsymbol{\pi}' - \boldsymbol{\pi}'' \| \leq \delta$. *Lemma. Ha a felosztásban szereplő alszimplexek maximális átmérője kisebb vagy egyenlő mint $\delta$, akkor bármely $\boldsymbol{\pi}$ pont egy olyan alszimplexben, amelynek csúcsai különbözőképpen vannak indexelve, ki fogja elégíteni az*

$$\| \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi} \| \leq (n - 1)(\varepsilon + \delta) \tag{I.1}$$

*egyenlőtlenséget és ezért a fix pont ilyen értelmű approximációjaként szolgál'*

Jelöljük ugyanis $\boldsymbol{\pi}^i$-kel $i = 1, \ldots, n$ annak az alszimplexnek csúcsait' amelyre

$$f_i(\boldsymbol{\pi}^i) \leq \pi_i^i \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{I.2}$$

Legyen $\boldsymbol{\pi}$ tetszőleges pontja a szóban forgó alszimplexnek, továbbá legyen a $\boldsymbol{\pi}'$ vektor $\boldsymbol{\pi}$ $\delta$ sugarú környezetében. Ekkor

$$\| \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}' \| \leq \delta \text{ és így } \| \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}') \| \leq \varepsilon \tag{I.3}$$

Ebből $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}^i$-re:

$$f_i(\boldsymbol{\pi}) \leq f_i(\boldsymbol{\pi}^i) + \varepsilon \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.4}$$

és így (I.2) és (I.3) alapján

$$f_i(\pi) \leq \pi_i^i + \varepsilon \leq \pi_i + \delta + \varepsilon \quad i = 1, \ldots, n$$

másképpen

$$f_i(\pi) - \pi_i \leq \delta + \varepsilon \quad i = 1, \ldots, n. \tag{I.5}$$

Vegyük most figyelembe, hogy

$$\textstyle\sum_{i=1}^n f_i(\pi) = \sum_{i=1}^n \pi_i \, (= 1) \tag{I.6}$$

és ezért

$$\textstyle\sum_{i=i}^n (f_i(\pi) - \pi_i) = 0 \tag{I.7}$$

Tekintsük a bal oldal valamelyik $i = i_0$ tagját. Nyilvánvalóan

$$f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0} = - \textstyle\sum_{i \neq i_0} \left(f_i(\pi) - \pi_i\right). \tag{I.8}$$

Vizsgáljuk meg, hogy (I.8) bal oldala abszolút értékének mi a maximális értéke. Ha $f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0} \geq 0$, akkor (I.5)-ből a maximális érték $\delta + \varepsilon$. Ha azonban $f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0} < 0$, a jobb oldali szumma pozitív értékű és (I.5) alapján az nem lehet nagyobb, mint $(n - 1)(\delta + \varepsilon)$.

Ez azt jelenti, hogy

$$|f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0}| \leq (n - 1)(\delta + \varepsilon) \tag{I.9}$$

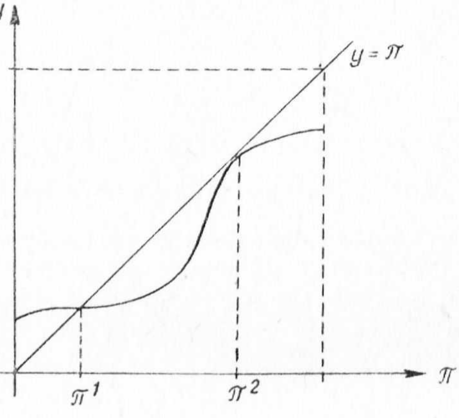
Tekintettel arra, hogy az $i_0$ index megválasztása tetszőleges volt, ezzel a lemma állításához jutottunk.

A levezetésből kitűnik, hogy az $\mathbf{f}(\pi)$ és a $\pi$ vektorok távolságára jobb becslés nem adható, de egyben az is látszik, hogy ilyen eltérés csak rendkívül speciális esetben fordulhat elő. Erre mutatnak a későbbi számpéldák is. A $\gamma$ kellő pontosságot biztosító felosztáshoz úgy juthatunk el, hogy $n$ konkrét értékének figyelembevételével $\varepsilon$ és ezzel együtt $\delta = \delta(\varepsilon)$ értékét elég kicsire választjuk ($\delta$ nem lehet kisebb, mint a maximális átmérőjű alszimplex).

A Sperner lemma nem ad ötletet ahhoz, hogy hogyan lehetne a fix pontot másként megközelíteni, mint addig vizsgálni az alszimplexeket, amíg egy olyat találunk, amelyben az összes csúcs különbözőképpen van indexelve. E közelítésnek azonban komoly gyakorlati akadálya van. Még $n$ szerény értékei esetén is azoknak a csúcsoknak a száma, amelyeket egy elég kis átmérőjű felosztásban kell meghatározni, rendkívül nagy. Ha a csúcsoknak a $(k_1/D, \ldots, k_n/D)$ rácspontokat választjuk, ahol a $k_i$ nem negatív egész számok kielégítik a $\sum_{i=1}^n k_i = D$ összefüggést, akkor $n = 7$, $D = 200$ esetén körülbelül 800 milliárd csúcs függvényértékének kiszámítására volna szükség, és a felosztásban szereplő alszimplexek száma ennél még nagyobb.

Scarfnak a továbbiakban bemutatásra kerülő kombinatórikai tételét Brouwer fix pont tétele bizonyításához is felhasználhatjuk. Ez a tétel a Sperner lemmához hasonlóan az $S$ szimplexen levő finom felosztású ponthalmaz létezéséből indul ki. A Sperner lemmától abban a hatásos algoritmusban tér el, amely a megvizsgálandó pontok sorozatának meghatározására használható fel. Mielőtt azonban ennek tárgyalásába kezdenénk, mégegyszer érdemes kitérni arra, hogy milyen értelemben is közelíti meg Scarf a fix pontot. A szóban forgó approximáció olyan $\pi$ pontot illetve pontokat eredményez, amelyre az $\| \mathbf{f}(\pi) - \pi \|$ *egy előre adott kis pozitív számot* nem halad meg. A gyakorlat szempontjából egy ilyen tulajdonságú $\pi$ pont bizonyára sok esetben betöltheti a fix pont szerepét. Nincsen azonban arra biztosíték, hogy a fenti $\pi$ pont valamilyen kis környezetében található legyen *valódi* fix pont is, vagyis amelyre $\mathbf{f}(\pi) = \pi$.

Az az $y = f(\pi)$ folytonos függvény, amely a $[0,1]$ intervallumot sajátmagába képezi le, mindenképpen rendelkezik fix ponttal (ábránkon $\pi^1$). Az $f(\pi)$ függ-




2. ábra.

vény $\pi^2$ pontbeli értéke azonban megközelítheti a $\pi^2$ értéket a $\gamma$ hibahatáron belül, anélkül, hogy a függvény az $y = \pi$ egyenest $\pi^2$ kis környezetében metszené:

Ilyen esetben — a tárgyalt approximáció értelmében — $\pi^2$ is betöltheti egy közelítő fix pont szerepét. Természetesen azonban, hogy ha az előírt $\gamma$ elég kicsi, az approximáció csak a $\pi^1$ értékhez tarthat.

## I.1. *A primitív halmaz fogalma és egy kombinatórikai tétel*

Tekintsük $E^n$-ben a $\pi^1, \ldots, \pi^n, \ldots, \pi^k$ vektorokból álló véges $P_k$ halmazt. A $\pi^{k+1}, \ldots, \pi^k$ vektorok az $S : \{\pi \mid \sum_{i=1}^n \pi_i = 1;\ \pi_i \geq 0\}$ szimplexből vannak önkényesen választva. Az első $n$ vektorról feltesszük, hogy az alábbi alakú:

$$\begin{aligned}
\pi^1 &= (0, \quad M_1 \ \ldots, M_1) \\
\pi^2 &= (M_2, \quad 0, \ \ldots, M_2) \\
&\ \vdots \\
\pi^n &= (M_n, M_n, \ldots, \quad 0)
\end{aligned} \tag{I.10}$$

ahol az $M_1, \ldots, M_n$ számok egymástól különböznek és nagyobbak 1-nél. Ezek a vektorok tehát *nincsenek* az $S$ szimplexen.

*Definíció.* Az $n$ elemből álló $\pi^{j_1}, \ldots, \pi^{j_n}$ vektorhalmazt $P_k$-ban *primitív halmaznak* nevezzük, ha *nincsen* olyan $\pi^j$ vektor $P_k$-ban, amelyre

$$\begin{aligned} \pi_1^j &> \min\,[\pi_1^{j_1}, \ldots, \pi_1^{j_n}] \\ &\vdots \\ \pi_n^j &> \min\,[\pi_n, \ldots, \pi_n^{j_n}] \end{aligned} \tag{I.11}$$

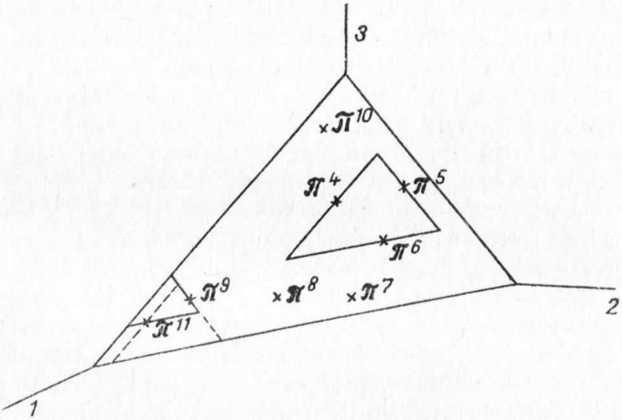
A primitív halmaz geometriailag könnyen interpretálható. Legyen $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j}$ egy $n$ elemből álló halmaz $P_k$-ban és tekintsük $S$-nek azt az alszimplexét, amely a következőképpen van definiálva:

$$\pi_i \geq \min\,[\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \qquad i = 1, \ldots n$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1\,; \pi_i \geq 0\,. \tag{I.12}$$

Abban az esetben, ha az alszimplex élén elhelyezkedő $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ vektorok primitív halmazt alkotnak, vagyis, ha a szóban forgó alszimplex $P_k$ egyetlen vektorát




3. ábra

sem tartalmazza belsejében, az alszimplexet *primitív alszimplex*nek nevezzük.

A szóban forgó alszimplexek eltérnek azoktól, amelyekről a Sperner lemma kapcsán volt szó. Az (I.12) által definiált alszimplexeket — függetlenül attól, hogy azok primitívek-e vagy sem — az $S$ szimplexben fekvő, a koordinátatengelyekre merőleges (a koordináta hipersíkokkal párhuzamos) és a $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ vektorokat metsző egyenesek határolják.

A 3. ábrán a $\boldsymbol{\pi}^4$, $\boldsymbol{\pi}^5$ és $\boldsymbol{\pi}^6$ vektorok egy primitív halmazt alkotnak, mivel nincs olyan $\boldsymbol{\pi}^j \in P_k$ vektor, amely a $\boldsymbol{\pi}^4$, $\boldsymbol{\pi}^5$ és $\boldsymbol{\pi}^6$ által meghatározott alszimplex belsejében feküdne. Amint látható, a $\boldsymbol{\pi}^2$, $\boldsymbol{\pi}^9$ és $\boldsymbol{\pi}^{11}$ szintén primitív halmazt alkot, mivel $P_k$-ban nincs olyan vektor, amely a $\boldsymbol{\pi}^9$, $\boldsymbol{\pi}^{11}$ és $S$ azon éle által

[2] SCARF [20]-ban az „ordinális bázis" terminológiát használta, hogy felhívja a figyelmet a primitív halmaznak vagy másképpen primitív alszimplexnek a lineáris programozásban szereplő „bázis"-sal való kapcsolatára.

meghatározott alszimplex belsejében feküdne, amelyen a második koordináta zéró.

Azt hiszem, elégséges az előző ábrára hivatkozni, mert ennek alapján is világosan látható, hogy *az alszimplexet generáló* $\pi^{j_i}$ *vektorok nem feküdhetnek az alszimplexek csúcsain kívül.* Ha például az előző ábrán a $\pi^6$ vektor a rajta keresztülmenő egyenesen az alszimplex bal csúcsától balra feküdne, akkor második koordinátája kisebb volna, mint $\pi^4$ második koordinátája és így $\pi^4$ nem generálhatná az alszimplex egyik oldalélét adó — a második koordinátatengelyre merőleges — korlátozó egyenesét. Ekkor $\pi^4$, $\pi^5$ és $\pi^6$ közül $\pi^6$ határozná meg az alszimplexnek a második és harmadik koordinátatengelyre, míg $\pi^5$ az első koordinátatengelyre merőleges élét. Ez esetben $\pi^6$ az alszimplex egyik csúcsát alkotná és $\pi^4$ a $\pi^5$ és $\pi^6$ által meghatározott alszimplex belsejében volna. Ekkor tehát $\pi^4$, $\pi^5$ és $\pi^6$ már nem adhatna primitív halmazt. Ha a $\pi^{j_i} i = 1, \ldots, n$ vektorok primitív halmazt képeznek, úgy, hogy a $\pi^{j_1}, \ldots, \pi^{j_n}$ vektorok közül az egyik — mondjuk a $\pi^{j_1}$ — az általuk meghatározott alszimplexnek egy csúcsában van, akkor kell lenni közöttük legalább egy olyan másik $\pi^{j_{i_0}}$ $i_0 \neq 1$ vektornak is, amelyikkel a $\pi^{j_1}$ vektor annak valamelyik koordinátájában megegyezik. Ilyenkor fordulhat elő az az eset, hogy a $\pi^{j_i}$ $i = 1, \ldots, n$ vektorhalmaz ugyanazt a primitív alszimplexszet determinálná, mint ugyanez a halmaz $\pi^{j_{i_0}}$ nélkül. Ebből következik, hogy ha *kizárjuk* azt, hogy $P_k$ bármely két elemének lehessen azonos $i$-edik $i = 1, \ldots, n$ koordinátája, akkor kizártuk azt az esetet is, hogy egy primitív alszimplexet generáló primitív halmaz valamelyik eleme a primitív alszimplex csúcsában legyen és *így a primitív halmaz előállításához mindig* $P_k$ $n$ *elemére van szükség.*

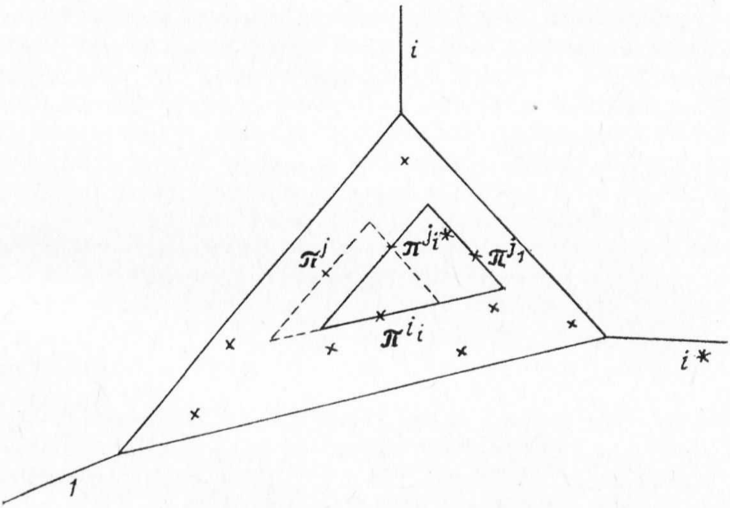
*A degenerációmentesség feltétele:* Nincs két olyan vektor $P_k$-ban, amelyeknek valamely $i = 1, \ldots, n$ koordinátájuk azonos volna. *Ezzel a feltétellel biztosítjuk azt, hogy a korlátozó felületek mindegyike a primitív halmaznak pontosan egy vektorát tartalmazza.* Nevezetesen azt a vektort, amelyben a megfelelő koordináta a legkisebb. Ha a primitív halmaz $i \leq n$-re tartalmazza $\pi^i$-t, akkor a primitív alszimplex egyik korlátozó felületét $S$ megfelelő határfelülete adja és e felületen az $i$-edik koordináta zéró. (Többek között a degenerációmentesség biztosításához kellett feltennünk, hogy $P_k$ első $n$ vektorának nemzéró koordinátái nagyobbak legyenek az egységnél. Ha az $M_i$ értékek egynél kisebbek is lehetnének, akkor előfordulhatna például az, hogy $M_2 = \pi_1^9$ volna és ez ellentmondana a degenerációmentesség feltételének. Ha $M_2 < \pi_1^9$ lehetne, akkor $\pi^2$, $\pi^9$ és $\pi^n$ már nem alkotnak primitív halmazt, mivel eredetileg e primitív halmazban $\pi^9$ első koordinátája volt a legkisebb első koordináta, mint ahogyan ez a 3. ábrán is látható. Mivel továbbá az olyan primitív alszimplexeket, amelyeknek egyik oldalát $S$ egyik korlátozó hipersíkja determinálja — ilyen többek között a $\pi^9$, $\pi^{11}$ és az $S$ szóban forgó éle által meghatározott alszimplex — nem volna célszerű a primitív halmazok sorából kizárni, ezért $P_k$ első $n$ vektorát — és így a $\pi^2$ vektort is — Scarf úgy definiálta, hogy annak szerepeltetése valamely $n$ elemű halmazban kizárólag csak az S szimplex élét reprezentálja. Az $M_i$ értékeknek (I.10)-nél jelzett megválasztása — $M_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$ — eleget tesz ennek a célnak.)

A $P_k$ vektorhalmaz elemei mindegyikének feleltessük meg az $1, 2, \ldots, n$ egészszámokból kiválasztott egy-egy indexet. A megfeleltetés — a vektorlista első $n$ tagját kivéve — önkényes. *Megköveteljük*, hogy $\pi^1$-nek az 1, $\pi^2$-nek a 2, ..., $\pi^n$-nek az $n$ index feleljen meg. Ezekután kimondható az alábbi kombinatórikai tétel:

1. *Tétel. Létezik olyan primitív halmaz, amelynek mindegyik vektora különbözőképpen van indexelve*

E tételt — belátása után — alkalmazhatjuk a Brouwer tétel bizonyítására. Ekkor a $\boldsymbol{\pi}^{n+1}, \ldots, \pi^k$ vektorok mindegyikének olyan $i$ indexet feleltetünk meg, amelyikre $f_i(\pi^j) \geq \pi_i^j$, $j = n+1, \ldots, k$. $j > n$-re, minthogy $\sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=1}^n \pi_i$ $(= 1)$, nyilvánvaló, hogy van ilyen $i$ index.

Egy olyan primitív halmaz, amelynek $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ vektorai mind különbözőképpen vannak indexelve, tartalmazhat néhány vektort az első $n$-ből is. Legyen $I$ ezen vektorok indexeinek a halmaza. A primitív halmaznak megfelelő alszimplexet $i \in I$-re a $\pi_i = 0$ élek korlátozzák. Ebből következik mármost, hogy egy olyan alszimplexben, amelyre mint primitív halmazra a fenti tétel áll, mindegyik $i$-hez található olyan $\boldsymbol{\pi}$ vektor, amelyre $f_i(\boldsymbol{\pi}) \geq \pi_i$.




4. ábra.

Kiválasztható a $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorok olyan sorozata, hogy $k \to \infty$ esetén a primitív alszimplexek maximális átmérője nullához tartson. Ezért található a tételben leírt tulajdonságú primitív alszimplexeknek olyan sorozata, amely egyetlen $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ vektorhoz tart. Kihasználva $f(\boldsymbol{\pi})$ folytonosságát, láthatjuk, hogy $f_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) \geq \hat{\pi}_i$ minden $i$-re, úgyhogy $\hat{\boldsymbol{\pi}}$-nek a leképzés fix pontjának kell lennie.

*Segédtétel Legyen $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ egy primitív halmaz és legyen $\boldsymbol{\pi}^{j_\alpha}$ ezekből a vektorokból az egyik. Ekkor, eltekintve egy kivételes esettől, egyetlen olyan $\boldsymbol{\pi}^j \in P_k$; $\boldsymbol{\pi}^j \neq \boldsymbol{\pi}^{j_\alpha}$ vektor létezik, amelyikre $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_{\alpha-1}}, \boldsymbol{\pi}^j, \boldsymbol{\pi}^{j_{\alpha+1}}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ primitív halmazt ad. A kivételes eset akkor áll elő, amikor az $n-1$ darab $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ $i \neq \alpha$ vektort $P_k$ első $n$ vektora közül választjuk. Ez esetben helyettesítés nem lehetséges.*

A segédtétel azt állítja, hogy eltekintve a kivételes esettől, ha egy tetszőleges vektort kivesszünk egy primitív halmazból, csak egyetlen olyan helyettesítése lehetséges, amellyel a vektorhalmaz ismét primitív halmazt ad. Ekkor a

$\pi^{j_\alpha}$-t helyettesítő $\pi^{j}$-t egyszerű geometriai szerkesztéssel kaphatjuk meg. Ahhoz, hogy illusztráljuk ezt a szerkesztést, tegyük fel, hogy

$$\pi_i^{j_i} = \min [\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \quad i = 1, \ldots, n \tag{I.13}$$

vagyis, hogy $\pi^{j_i}$ a primitív alszimplexnek azon a felületén van, amelyen az $i$-edik koordináta konstans. Tegyük fel továbbá, hogy $\pi^{j_1}$-et vesszük ki a halmazból. (Ezekkel a feltevésekkel az általánosság megszorítása nélkül élhetünk.) $\pi^{i*}$-gal jelöljük a primitív halmaznak azt a vektorát, amelynek az első koordinátája a *második* legkisebb értékű. Ahhoz, hogy olyan vektort találjunk, amelyik $\pi^{j_1}$-et helyettesíti, a $\pi^{j_{i*}}$-ot tartalmazó felületet magával párhuzamosan elmozgatjuk, csökkentve az $i^*$-odik koordinátát, egészen addig, amíg az *először* metsz át egy $P_k$-ban levő $\pi^{j}$ vektort úgy, hogy

$$\pi_i^{j} > \pi_i^{j_i} \quad \text{minden} \quad i \neq 1, i^* \text{ -ra és } \quad \pi_1^{j} > \pi_1^{j_{i^*}}$$

*vagy amíg az S szimplex azon felületével fog egybeesni, amelyre* $\pi_{i^*} = 0$.

Az új primitív halmaz fenti előállítását matematikailag a következőképpen fogalmazzuk meg: Ha a primitív halmazból $\pi^{j_1}$-et zárjuk ki (amelynek az első koordinátája a legkisebb a $\pi^{j_i}$ $i = 1, \ldots, n$ vektorok első koordinátái között) és ha $\pi^{j_{i}*}$ az a vektor, amelynek első koordinátája a *második* legkisebb, akkor $\pi^{j_1}$ vektor helyett a primitív halmazba az a $\pi^{l} \in P_k$ vektor lép be, amelyre

$$\max_{1 \le j \le k} \pi_{i^*}^{j} = \pi_{i^*}^{l} \tag{I.14}$$

$$\pi_{i^*}^{j} < \pi_{i^*}^{j_{i^*}} \tag{I.15}$$

$$\pi_1^{j} > \pi_i^{j_{i^*}} \tag{I.16}$$

$$\pi_1^{j} > \pi_i^{j_i} \quad \text{minden} \quad i \neq 1, i^*\text{-ra} \tag{I.17}$$

Mint az előző ábrán látható, az ott felrajzolt megoldás az (I.14—17) relációknak eleget tesz. A segédtétel pontos kimutatásához azonban egyrészt azt kell bebizonyítani, hogy az (I.14—17) relációkkal leírt feladat a kivételes esettől eltekintve tetszőleges elhelyezkedésű és méretű vektorok esetén egyértelműen megoldható, másrészt azt, hogy a $\pi^{j_\alpha}$ ($= \pi^{j_1}$) vektor helyettesítésére más lehetőség nincs.

Vegyük mindenekelőtt figyelembe, hogy a $\pi^{j_{i}^*}$ vektor $j_{i^*}$ indexe nagyobb $n$-nél, mert ha nem, akkor a kivételes esettel állunk szemben. Ha ugyanis $\pi^{j_{i}^*}$ $P_k$ első $n$ eleme közül volna az egyik, akkor — mivel feltételezésünk szerint $\pi^{j_{i}^*}$ első koordinátája a második legkisebb és így az nem lehet zéró — szükségképpen nagyobb volna az egységnél. Ekkor azonban — szintén a $\pi^{j_{i}^*}$vektor első koordinátájára kirótt feltevés alapján — minden egyes $\pi^{j_i}$ $i = 2, \ldots, n$ vektor elős koordinátája is egynél nagyobb volna. Ez vagy éppen azt jelentené, hogy a segédtételben említett kivételes esettel van dolgunk, vagy azt, hogy a $\pi^{j_i}$ $i = 1, \ldots, n$ vektorhalmazt $P_k$ első $n$ vektora adja. Utóbbi esetben azonban ez a halmaz csak akkor lehetne primitív, ha $P_k$ csupán a szóban forgó $n$ vektor halmaza volna ($k = n$), mivel ezek (I.13)-ban éppen az $S$ szimplexet generálják. Ettől az esettől nyilván eltekinthetünk.

Az elmondottakból következik, hogy a kivételes esettől eltekintve a $\pi^{j_i^*}$ vektor $j_{i^*}$ indexe nagyobb $n$-nél, így mindegyik koordinátájára: $0 < \pi_i^{j_i}{}^* < 1$; $i = 1, \ldots, n$. (Itt kihasználtuk a degeneráció-mentességre tett kikötést.)

Ebből azonnal következik, hogy *a kivételes esettől eltekintve az* (I.15—17) *egyenlőtlenségrendszernek mindig van megoldása*, például a

$$\pi^{i^*} = (M_{i^*}, \ldots, M_{i^*}, \underbrace{0}_{i^*}, M_{i^*}, \ldots, M_{i^*})$$

vektor. A degeneráció-mentesség kikötéséből folyik az is, hogy *az* (I.14—17) *feladatnak egy és csak egy megoldása van.* Könnyen látható, hogy így primitív halmazhoz jutunk.

*A kivételes esetben* — könnyű belátni — *helyettesítés nem lehetséges.* A fentiekben használt, az általánosságot meg nem szorító jelölések mellett ekkor a $\pi^{j_i}$ $i = 2, \ldots, n$ vektorhalmaz azonos a $\pi^i$ $i = 2, \ldots, n$ vektorhalmazzal, míg $\pi^{j_1} \neq \pi^1$. (Ha $k > n$, akkor $\pi^{j_1} = \pi^1$ esetén $\pi^i$ $i = 1, \ldots, n$ nem szolgáltatna primitív halmazt.) Ekkor $\pi^{j_1}$ kirekesztésével azért nem kaphatnánk ismét primitív halmazt, mivel az újabb $\pi^l, \pi^2, \ldots, \pi^n$ halmaz $\pi^{j_1}$-et belsejében tartalmazná.

A segédtétel pontos kimutatásához még be kell bizonyítanunk, hogy *nem található az* (I.14)*-ben szereplő* $\pi^l$*-től különböző olyan vektor, amelyet* $\pi^{j_1}$ *helyére írva szintén primitív halmazhoz jutnánk.*

A bizonyítást két lépésben végezzük el. Először is megállapítjuk, hogy:
1. *Ha* $\pi^l, \pi^{j_2}, \ldots, \pi^{j_n}$ *egy primitív halmaz, akkor minden* $i$; $i \neq 1$, $i^*$*-ra* a $\pi^{j_i}$ *vektor az új alszimplexnek azon a korlátozó felületén lesz, amelyik i-edik koordinátája konstans.* Ha e primitív alszimplexnek azon a korlátozó felületén, amelyen az $i$; $i \neq 1$, $i^*$ koordináta konstans nem a $\pi^{j_i}$ vektor feküdne, akkor (I.13)-ra tekintettel ezen szükségképpen $\pi^l$ volna rajta. Mivel ekkor azon a korlátozó felületen, amelyen az első koordináta konstans csak $\pi^{j_{i^*}}$ feküdhetne, azt a korlátozó felületet, amelyen az $i^*$-odik koordináta konstans csak egy $\pi^{j_i}$, $i \neq 1$, $i^*$ vektor határozhatná meg. Ez azonban lehetetlen, mert (II.12) $i = i^*$-ra is vonatkozik.

E megfigyelés folyományaként látható, hogy az új primitív halmazra:

$$\pi_i^{j_i} = \min\,[\pi_i^l, \pi_i^{j_2}, \ldots \pi_i^{j_n}] \quad \text{minden} \quad i \neq 1, i^*\text{-ra}$$

Ez a reláció egyben azt is igazolja, hogy a primitív halmaz új elemének ki kell elégítenie az (I.17) egyenlőtlenséget.

A maradó két koordinátára két alternatíva állhat fenn. Vagy $\pi^l$ van a konstans első koordinátájú és $\pi^{j_{i^*}}$ a konstans $i^*$-odik koordinátájú felületen, vagy fordítva.

A következő 2. lépésben azt bizonyítjuk be, hogy *ha a* $\pi^l, \pi^{j_2}, \ldots, \pi^{j_n}$ primitív halmazban $\pi^l \neq \pi^{j_1}$, *akkor* $\pi^l$*-nek kell lenni az új primitív alszimplex konstans* $i^*$ *koordinátájú felületén és* $\pi^{j_{i^*}}$ *van azon a felületen, amelyen az első koordináta állandó.*

Ha ez nem volna igaz, akkor az előzőek alapján bármelyik $i = 2, \ldots, n$-re a $\pi^{j_i}$ vektor volna az új alszimplexnek azon a felületén, amelyiken az $i$-edik koordináta konstans. Ekkor azonban $\pi_\alpha^{j_1} < \pi_\alpha^l$ esetén a régi alszimplex tartalmazná belsejében $\pi^l$-t és így az nem lett volna primitív, vagy $\pi_1^l < \pi_1^{j_1}$ esetén az új alszimplex tartalmazná belsejében $\pi^{j_1}$-et és ezért ez nem volna primitív. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát indirekt feltevésünk hibás. Ez azt jelenti, hogy $\pi^l$-nek kell azon a felületen lennie, amelyiken az $i^*$ koordináta konstans. Így nyilvánvaló az is, hogy a $\pi^{j_{i^*}}$ vektor (amelynek első koordinátája a *második* legkisebb volt az eredeti primitív halmazban) lehet csak azon a felületen, amelyben az első koordináta konstans. Ez azonban azt jelenti, hogy $\pi^l$ eleget tesz az (I.15–17) relációknak $j = l$-re és nyilvánvaló, hogy (I.14)-nek is fenn kell állnia ahhoz, hogy primitív halmazt kapjunk. Ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

Most térjünk rá az 1. tétel bizonyítására. Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy a $P_k$ halmaz mindegyik vektorának megfeleltetünk egy, az $1, \ldots, n$ számok közül választott indexet. A tételben nincs szó arról, hogy ezt a megfeleltetést hogyan végezzük, ez önkényes, eltekintve attól, hogy $j = 1, \ldots, n$-re $\pi^j$-nek a $j$ indexet feleltetjük meg. (A tételnek a Brouwer tétel bizonyításához való felhasználásánál — mint ahogyan arról a tétel kimondásánál már szó volt — az indexek kiválasztása függ a leképzéstől, azokat nem választhatjuk meg tetszés szerint.)

Az a célunk, hogy egy olyan primitív halmazt határozzunk meg, amelynek elemei különbözőképpen vannak indexelve. Erre egy véges algoritmust mutatunk be az alábbiakban. Az algoritmus egy olyan primitív halmazzal kezdődik, amelynek mindegyik tagja eltérően van indexelve azzal a lehetséges kivétellel, hogy egyetlen vektorpár rendelkezhet azonos indexeléssel.

Tekintsük a $\pi^2, \ldots, \pi^n, \pi^{j*}$ vektorhalmazt, ahol $\pi^{j*}$ az első $n$ vektor után következőkből van kiválasztva úgy, hogy maximálja az első koordinátát. Világos, hogy

$$\min\,[\pi_i^{j*}, \pi_i^2, \ldots, \pi_i^n] \tag{I.18}$$

$i = 1$-re $\pi_1^{j*}$-gal egyenlő és zéró $i > 1$-re. Ez a vektorhalmaz (az (I.11) definíció alapján) primitív, mivel nincs olyan vektor $P_k$-ban, amelynek összes koordinátái nagyobbak lennének, mint a $(\pi_1^{j*}, 0, \ldots, 0)$ vektor koordinátái.

Ha a $\pi^{j*}$ vektort az 1-es indexnek feleltettük volna meg, akkor a probléma már meg volna oldva, mivel ez esetben a primitív halmaz összes eleme különböző indexszel rendelkezne. Általában nem ez a helyzet, és ilyen esetben $\pi^{j*}$-nak ugyanaz az indexe, mint a $\pi^2, \ldots, \pi^n$ vektorok valamelyikének. Az algoritmus mindegyik lépésében (kivéve a végállapotot) olyan primitív halmazunk lesz, amelynek indexei a következő tulajdonsággal rendelkeznek.

(i) Az 1 index egyik vektornak sem fog megfelelni.
(ii) A primitív halmaz mindegyik vektora különbözően lesz indexelve, kivéve egy vektorpárt, amelyek azonosan.

Az algoritmus a két azonos indexszel rendelkező vektor egyikét hagyja ki a primitív halmazból. Ezáltal vagy kap egy ugyanilyen tulajdonságú új primitív halmazt, vagy befejeződik az algoritmus azzal, hogy a primitív halmaz mindegyik vektora különbözőképpen lesz indexelve. Ez esetben megkaptuk a kívánt megoldást. Eltekintve a kiinduló és a végső helyzettől, az algoritmus mindegyik lépésnél tehát a közös indexű két vektor egyike került éppen bevezetésre, hogy a konkrét helyzetbe jussunk. Az algoritmus azzal megy tovább, hogy kirekeszti a pár *másik* tagját.

Ami a kezdeti primitív halmazt illeti, abból csak egy olyan $\pi^j$ ($j = 2, \ldots, n$) vektor hagyható ki, amelynek ugyanaz az indexe, mint $\pi^{j*}$-nak. A második lehetőség, vagyis $\pi^{j*}$ kizárása annak a kivételes esetnek felel meg, amelyről a segédtételben volt szó.

Világosan kell látni, hogy az algoritmus sohasem térhet vissza egy előző primitív halmazhoz. Ellenkező esetben ugyanis, ha az *első* visszatérés a *kezdeti* primitív halmaztól *eltérő*höz vezetne, akkor ettől az „előző" primitív halmaztól az algoritmus folytatásának három (és nem két) módja volna. Ha az első visszatérés a kezdeti primitív halmazhoz vezetne, akkor ebből a halmazból az algoritmus folytatására két mód állna rendelkezésre és nem egy.

Az algoritmus csak akkor áll le, ha egy olyan primitív halmazhoz jutott, amelynek összes vektora különbözőképpen van indexelve. Ha ilyen tulajdonságú primitív halmaz nem létezne, az algoritmus végtelenné válna, miközben mindegyik lépésben más-más primitív halmazt állítana elő. Mivel azonban a különböző primitív halmazok száma *véges*, ez nem fordulhat elő. Ez a tény, amikor bizonyítja a kívánt tulajdonságú primitív halmaz egzisztenciáját, arra is rávilágít, hogy ilyen primitív halmazhoz az algoritmus véges számú lépésben jut el. Ezzel tételünk bizonyítását befejeztük.

A II. fejezet elején volt arról szó, hogy a Sperner lemme garantálja olyan alszimplex létezését, amelynek minden csúcsa különbözőképpen van indexelve. A Sperner lemma azonban nem ad más ötletet ahhoz, hogy hogyan találjunk egy ilyen tulajdonságú alszimplexet, minthogy sorra vizsgáljuk az alszimplexeket, amíg egy kívánt tulajdonságút nem találunk. Scarf eljárása ennél többek között azzal nyújt többet, hogy nála elégséges olyan alszimplexet sorra venni, amelyben csupán két csúcs indexe lehet azonos, és így a szükséges számítások mennyiségét igen nagy mértékben csökkenti.

## I.2. *A számítási technikáról*

Az algoritmus programozásakor mindenekelőtt azzal a feladattal találkozunk, hogy hogyan válasszunk ki egy megfelelő $P_k$ vektorhalmazt. Az algoritmus mindegyik lépésében ezekből a vektorokból kiválasztott $n$ tagból álló primitív halmazzal van dolgunk. Ezekből az egyiket kihagyjuk a primitív halmazból és helyére egy másik vektort helyettesítünk, azáltal, hogy meghatározunk egy $\mathbf{a}$ vektort és egy $i^*$ koordinátát, majd megvizsgáljuk $P_k$ azon összes vektorát, amelyre $\pi_i^j > a_i$ $i \neq i^*$ és azt a vektort választjuk ki, amelynek $i^*$-odik $\pi_{i^*}^j$ koordinátája a legnagyobb, de kisebb, mint $\pi_{i^*}^{j_{i^*}}$. Az $\mathbf{a}$ vektor első koordinátája — a 3. ábrával kapcsolatos jelölések esetén (lásd az (I.13) és az (I.15—17) relációkat) — $\pi_1^{j_{i^*}}$, az $i$-edik ($i \neq i^*$) $\pi_i^{j_i}$, míg az $i^*$-odik koordinátája érdektelen.

A $P_k$ halmazt hasznos úgy megkonstruálni, hogy a primitív halmazba belépő új vektorokat $P_k$ összes vektorának megvizsgálása nélkül tudjuk kiválasztani. Például, ha $P_k$ vektorait (eltekintve az első $n$-től) a $(k_1/D, \ldots, k_n/D)$ szám $n$-esek összes lehetséges kombinációi adják (ahol $k_i > 0$; $k_1 + \ldots + k_n = D$), továbbá, ahol a $k_i$ és a $D$ számok egészek), akkor az előbb említett vektor komponensei egy egészszámnak és $D$-nek hányadosai lesznek. Az új belépő $\boldsymbol{\pi}^j$ vektor komponenseit ekkor vagy

$$\pi_i^j = a_i + 1/D \quad (i \neq i^*)\,; \quad \pi_{i^*}^j = 1 - \textstyle\sum_{i \neq i^*} (a_i + 1/D) \tag{I.19}$$

adja, vagy ha nem, akkor $P_k$ első elemének egyike.[3]

[3] Tegyük fel, hogy a folytonosság definíciójában szereplő $\delta = \delta(\varepsilon)$ függvény $\varepsilon > 0$-hez és tetszőleges $\pi : \pi \in S$-hez olyan *maximális* $\delta$ környezetet rendel, amelyre $\| \mathbf{f}(\pi') - \mathbf{f}(\pi'') \| \leq \varepsilon$ ha $\| \pi' - \pi'' \| \leq \delta$. Tegyük fel továbbá, hogy létezik a $\boldsymbol{\delta} = \delta(\varepsilon)$ függvény inverze is. Mivel ekkor $\delta$ választható az $S$ felosztásában szereplő alszimplexek maximális átmérőjének, ez a fenti felosztásban $1/D$-vel egyenlő. A $\boldsymbol{\delta} = \delta(\varepsilon)$ függvény inverzéből meghatározható a $\delta^0 = 1/D$ értékhez tartozó *minimális* $\varepsilon^0$. Az approximáció hibáját $S$ fenti felosztása esetén (I. 1) alapján $\gamma = (n-1)\,(1/D + \varepsilon^0)$ adja meg.

Ha tehát $P_k$-nak megvan ez a speciális szerkezete, akkor igen egyszerű számítással kaphatjuk meg a mindenkor belépő új vektorokat. Megjegyzendő azonban, hogy a $P_k$ halmaz fenti megválasztása nem elégíti ki az előző pontban, a degenerációmentességre tett feltevést (miszerint $P_k$-ban *nincs* olyan két vektor, amelyeknek valamely $i$-re koordinátájuk azonos lenne). Ez pedig egy olyan kikötés, amely elengedhetetlen a segédtételben leírt szabály alkalmazásához. A célból, hogy Scarf elkerülje a degeneráció okozta nehézséget, az algoritmus mindegyik lépésnél megkonstruál egy

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & M_n & \pi_1^{n+1} & \dots & \pi_1^{\varrho} \\ M_1 & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1 & & 0 & \pi_n^{n+1} & & \pi_n^{\varrho} \end{bmatrix} \tag{I.20}$$

mátrixot, amely tartalmazza $P_k$ első $n$ elemét és még azokat, amelyek előzőleg kerültek bevezetésre a primitív halmazba. A sorrend a bevezetés sorrendje. Ekkor, ha a mátrix valamely két oszlopának komponensei egy $i$ sorban megegyeznek, akkor az előzőt tekintjük nagyobbnak. Hasonlóan, ha a mátrix valamely vektora és egy mátrixon kívüli vektor valamely eleme azonos, akkor is az előbbit tekintjük nagyobbnak. Belátható, hogy ez az eljárás véges algoritmust eredményez.

A belépő $\boldsymbol{\pi}^j$ vektor meghatározása céljából csak azokat a vektorokat kell megvizsgálni, amelyeket valamely előző lépésben már felhasználtunk; ezenkívül csupán egyetlen számítás szükséges. E szerint azoknak a vektoroknak a száma, amelyeket kifejezetten meg kell vizsgálni, nem lehet nagyobb, mint az iterációk száma plusz $n$. Ha az iterációk száma viszonylag kicsi, ez a vizsgálat könnyen elvégezhető. (Az ilyen nehézségek feloldására más módszerek is lehetségesek. Ezek között valószínűleg olyanok is találhatók, amelyek még kevesebb számítást igényelnek.)

Az algoritmus egy olyan primitív halmazzal fejeződik be, amelynek vektorai mind különbözőképpen vannak indexelve. A primitív alszimplexnek bármely pontja a fixpont approximációjaként szolgál.[4]

A célból, hogy e kívánt tulajdonságú $\sigma^0$ alszimplex pontjai közül egyetlen pontot válasszunk ki, célszerű ezt úgy tenni, hogy ezzel minimalizáljuk az

$$\|\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\| \tag{I.21}$$

normát — vagy a közelség valamely más mértékét — a $\boldsymbol{\pi} \in \sigma^0$ pontokra.

A számítás megkönnyítése érdekében — de a kívánt pontosságot megkövetelve — általában megengedhető és célszerű csupán az $f_i(\boldsymbol{\pi})$ függvények lineáris közelítését — Taylor soruknak első két tagját — figyelembe venni. Ha a $\sigma^0$ alszimplex csúcsait a $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ $i = 1, \dots, n$ vektorok adják, akkor célszerű a sorbafejtést az $1/n \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\pi}^{j_i}$ vektor körül elvégezni. Jelöljük az $f_i(\boldsymbol{\pi})$ $i = 1, \dots, n$ függvény lineáris közelítését $\varphi_i(\boldsymbol{\pi})$ -vel, ekkor a feladatunkat az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg:

[4] Lásd az (I.1) egyenlőtlenséget, vagy a 3. lábjegyzetet.

Keresendő az a $\gamma_0$ érték, melyre

$$\min \gamma = \gamma_0 \tag{I.22}$$

alávetve a következő feltételeknek:

$$-\gamma \leq \varphi_i(\boldsymbol{\pi}) - \pi_i \leq \gamma \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.23}$$

és $\boldsymbol{\pi} \in \sigma^0$, vagyis (I.12) alapján:

$$\pi_i \geq \min [\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.24}$$

valamint

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1 \, ; \pi_i \geq 0 \, ; \qquad \gamma > 0 \tag{I.25}$$

(I.22—25) egy lineáris programozási feladatot ad. E feladat mindig megoldható és nagyban fokozza az (I.1) relációval jelzett értelmű approximáció pontosságát.

## I.3. *Egy érdekes tétel*

Az előző fejezetben ismertetett algoritmus alapgondolatát nemcsak az előzőkben megkívánt tulajdonságú primitív halmaz megkeresésére használhatjuk fel, hanem egy általánosabb probléma megoldására is. Ahogyan az előző fejezetben, legyen a $\boldsymbol{\pi}^{n+1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorhalmaz az $S$ szimplexen, és a $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorok legyenek szintén az előzőkkel azonosak.

Tekintsük a

$$\mathbf{Bz} = \boldsymbol{\omega} \tag{I.26}$$

egyenletrendszert, ahol $\mathbf{B}$ egy $n \times k$ mátrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,n+1} & \cdots & b_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n,n+1} & \cdots & b_{n,k} \end{bmatrix}$$

és $\boldsymbol{\omega}$ egy szigorúan pozitív vektor. A (II.1) egyenletrendszer megengedhető bázisának — a lineáris programozásban használatos értelemben — az $n$ számú $j_1, \ldots, j_n$ oszlopból álló vektorrendszert nevezzük, ha azok lineárisan függetlenk és ha a

$$\sum_{\nu=1}^n b_{i \cdot j_\nu} z_{j_\nu} = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.27}$$

egyenletrendszer megoldása nemnegatív.

2. *Tétel. Ha az* (I.26) *rendszer nemnegatív megoldásainak halmaza korlátos, akkor létezik olyan* $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ *primitív halmaz, hogy a* $\mathbf{B}$ *mátrix* $j_1, \ldots, j_n$ *oszlopai megengedhető bázist alkotnak.*

*Bizonyítás.* Tekintsük a $\boldsymbol{\pi}^2, \ldots, \boldsymbol{\pi}^n, \boldsymbol{\pi}^{j*}$ vektorhalmazt, ahol a $\boldsymbol{\pi}^{j*}$ vektor $P_k$ első $n$ vektora után következőkből úgy van kiválasztva, hogy ezek között $\boldsymbol{\pi}^{j*}$ első koordinátája a legnagyobb. Ez a halmaz primitív mint ahogyan azt az (I. 18) relációval kapcsolatban már megállapítottuk.

Az 1, …, $n$ oszlopok a $\mathbf{B}$ mátrixnak megengedhető bázisát alkotják. Hajtsunk végre egy elemi bázistranszformációt azáltal, hogy a $j^*$-nak megfelelő oszlopot vezetjük be. Nincs további probléma, ha ezzel az 1-es oszlop marad ki a bázisból, mivel $2, \ldots, n, j^*$ primitív halmaz és a $\mathbf{Bz} = \omega$ rendszernek is egy megengedhető bázisa. Általában nem ez lesz a helyzet és valamely más, nem az első sozlop marad ki a bázisból. Az algoritmus következő lépése abból áll, hogy a primitív halmazból eltávolítjuk azt a vektort, amelyik annak az oszlopnek felel meg, amelyet éppen kivettünk a $\mathbf{Bz} = \omega$ egyenletrendszer megengedhető bázisából.

Az algoritmus alternál a $\mathbf{B}$ mátrixra vonatkozó lineáris transzformáció és a primitív halmazon végzendő analóg operáció között. $\mathbf{B}$ megengedhető bázisába belevesszük annak a $\pi^{j_{k0}}$ vektornak megfelelő oszlopot, amelyiket éppen belevettünk a primitív halmazba; ezt követően kivesszük a primitív halmazból azt a $\pi^{j_{k1}}$ vektort, amelyik annak az oszlopnek felel meg, amelyiket éppen elhagytunk $\mathbf{B}$ megengedhető bázisából.

A számítás bármelyik közbülső lépésében $\mathbf{B}$ megengedhető bázisa az 1-es oszlopot és $n-1$ másikat, mondjuk a $j_2, \ldots, j_n$ oszlopokat tartalmazza, amíg a primitív halmaz a $\pi^{j_1}, \pi^{j_2}, \ldots, \pi^{j_n}$ vektorokból áll, ahol $j_1 \neq 1$. Az algoritmusra végig érvényes az az összefüggés, hogy a primitív halmaz vektorainak és a bázisban szereplő oszlopoknak indexei között $n-1$ azonos. Ez azért van így, mert *mindig két lehetséges operáció egyikét hajtjuk végre.* Ha a $\mathbf{B}$ mátrix bázisán hajtunk végre elemi transzformációt, akkor az e bekezdésbeli jelölések szerint a $j_1$ oszlopot kell bevezetnünk a bázisba, míg ha a primitív halmaz egy elemét helyettesítjük, akkor $\pi^{j_1}$-et kell kizárni. Eltekintve attól a kezdeti helyzettől, amikor a primitív halmazt $\pi^2, \ldots, \pi^k, \pi^{j*}$ adja és a megengedhető bázis az első $n$ oszlopból áll, mindkét operáció alkalmazható. Kezdeti helyzetben csak egy operáció hajtható végre, mivel $\pi^{j*}$ kizárása azt a kivételes helyzetet teremti meg, amiről az előző fejezet segédtételében volt szó.

Az algoritmus mindegyik közbülső lépésében két folytatás lehetséges. Visszatérünk az előző állapotba — amit nyilván kizárunk — vagy az előző bekezdésben tárgyaltak alapján a másik lehetséges operációt hajtjuk végre. Ebből következik, hogy az algoritmus nem lehet ciklikus. Ellenkező esetben ugyanis, ha az első állapot, amelyre az algoritmus visszatér, nem a kezdeti helyzet, akkor ebből a helyzetből három és nem két folytatásnak kellene lennie. Ha az első olyan állapot, amelyikhez az algoritmus visszatér, a kezdeti helyzet, akkor ebből két és nem egyetlen folytatási lehetőségünk volna.

Mivel az algoritmus nem ciklikus és a lehetséges helyzetek száma véges, az algoritmusnak be kell fejeződnie, ami csak akkor történhet meg, ha a konkrét $\pi^{j_1}, \ldots, \pi^{j_n}$ halmaz primitív halmazt alkot és ugyanakkor a tételben megadott módon felel meg a $\mathbf{Bz} = \omega$ megengedhető bázisának. Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

## IRODALOM


1. ARROW, K. J.: An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics in J. Neyman (ed.): Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles, 1951. Univ. of California Press. 503—532.
2. ARROW, K. J.—BLOCK, D.—HURWICZ L.: „On the Stability of the competitive equilibrium II." — Econometrica, *27* (1959) 82—109.
3. ARROW, K. J.—DEBREU, G.: „Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy" — Econometrica, *22* (1954), 265—290.

4. ARROW, K. J.—HURWICZ, L.: „Decentralization and Computation in Resource Allocation". Essays in Economics and Econometrics, 1960. (pp. 34—104) University of North Carolina Press.
5. DEBREU, G.: „Valuation Equilibrium and Pareto Optimum" Proc. Nat. Acad. Sci., *40* (1954) 588—592.
6. DEBREU, G.: Theory of Value. An axiomatic analysis of economic equilibrium. New York 1959 Wiley.
7. DEBREU, G.: „New Concepts and Techniques for equilibrium analysis" — International Economic Review, *3* (1962), 257—273.
8. FISHER, I.: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices. Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, Vol. 9., New Haven 1892.
9. GALE, D.: „The Law of Supply and Demand" — Mathematica Scandinavia, *3* (1955) pp. 155—169.
10. GRAVES, L. M.: The Theory of Functions of Real Variables. New York, 1956. McGraw.
11. KARLIN, S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics Vol. I. London—Paris, 1959. Addison-Wesley.
12. KONDOR GY.: Az értékelés és a piac egyes kérdései nemlineáris modellekben. Kandidátusi disszertáció. Budapest, 1967. Soksz. anyag.
13. LEMKE, C. E.—HOWSON J. T.: „Equilibrium Points of Bi-Matrix Games" SIAM Journal, *22* (1959), 54—71.
14. LEMKE, C. E.: „Bimatrix equilibrium ponts and mathematical programming" —Management Sci., *11* (1965) 681—689.
15. MCKENZIE, L.W.: „On the Existence of a General Equilibrium for a Competite Market" — Econometrica *27* (1959), 54—71.
16. NASH, J. F. JR.: „Equilibrium States in N-Person Games". Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. Vol. 36, 1960 pp. 48—49.
17. QUIRK, J.—SAPOSNIK, R.: Introduction to general equilibrium theory and welfare economics. New York 1968. McGraw.
18. SCARF, H. E.: „The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping" — SIAM Journal on Applied Math, *15* (1967), 1328—1343.
19. SCARF, H. E.: „On the Computation of Equilibrium Prices". Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher. New York, 1967. Wiley (pp. 207—230).
20. SCARF, H. E.: „The Core of an N-Person Game" — Econometrica, *35* (1967), 50—69.
21. SZÉP J.: Analízis. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
22. WALD, A.: „On Some Systems of Equations of Mathematical Economics" — Econometrica, *19* (1951) pp. 368—403.
23. WALRAS, L.: Elements of Pure Economics. London, 1954. George Allen and Unwin.