Kovács Géza

A hozzárendelési probléma megoldása nem degenerált lineáris szállítási feladatként

Az ún. hozzárendelési probléma az operációkutatás egyik klasszikus feladattípusa. Megfogalmazását tekintve lineáris szállítási feladat, ennek ellenére a lineáris programozás hagyományos módszereivel eddig gyakorlatilag nem volt kezelhető. A legismertebb megoldási algoritmusa a külön erre a célra kifejlesztett ún. magyar módszer, melyet H. Kuhn javasolt 1955-ben [3]; ez Egerváry Jenő egy mátrix-kombinatorikai tételén alapul [1]. (Részletes leírása [2]-ben) Az alábbiakban szintén egy kombinatorikai tételt bizonyítunk be a mátrixok egy osztályára. Ennek ismerete lehetővé teszi, hogy a hozzárendelési feladatot olyan lineáris szállítási feladattal helyettesítsük, amelynek mérete (és költségmátrixa) az eredetivel azonos, de ahol a hozzárendelési feladatra jellemző ún. degeneráció előfordulása kizárt. A transzformáció előnye, hogy az új modellen a hozzárendelési feladat esetleges alternatív optimumainak megkeresése és az érzékenységi vizsgálatok is egyszerűbben, a szállítási feladatoknál általában alkalmazott módon vihetők keresztül.

1. $\mathcal{K}$ osztályú mátrixok

A mátrixok alább vizsgált tulajdonságainál a mátrix elemei között elegendő aszerint különbséget tenni, hogy megjelöltek-e, vagy sem. A jelöletlen elemeket üres mezők, a megjelölt elemeket ponttal ellátott mezők (röviden pontok) ábrázolják.

Útvonalnak nevezünk egy elágazás nélküli, összefüggő tört vonalat, mely szigorúan váltakozó sorrendben vízszintes és függőleges szakaszokból áll, továbbá kezdő- és végpontja és minden irányváltozása jelölt mezőben van. Utóbbiak a kérdéses útvonal csúcspontjai. Az önmagába visszatérő útvonalat (ahol tehát a csúcsok és a szakaszok száma megegyezik), körútnak nevezzük.

Független rendszer a mátrix pontjainak olyan részhalmaza, melynek egyik eleme sincs ugyanezen halmaz más elemével egy sorban vagy oszlopban.

A $\mathcal{K}$ osztályú mátrixokat ezek után úgy definiáljuk, mint amelyekben

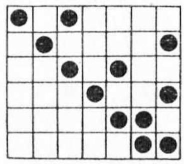
a) az oszlopok száma eggyel több a sorok számánál;

b) minden sor két pontot tartalmaz;

c) a pontok rendszerén körút nem rajzolható.

1.1 *Rendezett alakú mátrixok*

Ha egy $n\times(n+1)$ méretű mátrix minden sorában úgy helyezkedik el két pont, hogy egyik a bal felső sarokból induló főátlón, másik pedig attól jobbra van tetszőleges helyen, akkor a mátrixot „rendezett alakúnak" mondjuk (1. ábra). *Be fogjuk bizonyítani, hogy ez*

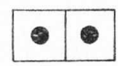


1. ábra

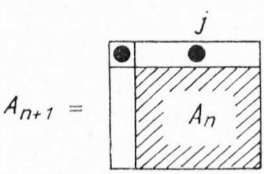
a) *mindig $\mathcal{K}$ osztályú:*

b) *bármely oszlopát elhagyva, a maradékrészben kiválasztható — mégpedig egyértelműen — egy* n *pontból álló független rendszer.*

A tételt teljes indukcióval igazoljuk. A 2. ábra szerinti rendezett alak triviálisan $\mathcal{K}$ osztályú és eleget tesz tételünk *b* állításának. Tegyük fel most, hogy van egy rendezett alakú, $n\times(n+1)$ méretű mátrix, melyre állításaink igazak. Jelöljük ezt $\mathbf{A}_n$-el. Illesszünk eléje új oszlopot és fölé egy újabb sort. Az „északnyugati" sarokban (az új sor és oszlop közös mezőjében) helyezzünk el egy pontot, egy másikat pedig az új sor egy tetszőleges helyén, például a j oszlopban. Jelöljük a bővített mátrixot $\mathbf{A}_{n+1}$-el (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

A pontok fenti módon történő elhelyezése mellett nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{A}_n$ körút mentes volt, akkor $\mathbf{A}_{n+1}$ is körútmentes, minden sorában két pont van és eggyel több oszlopot tartalmaz, mint sorainak száma. Az új mátrix tehát szintén rendezett alakú és $\mathcal{K}$ osztályú.

Hagyjuk el $\mathbf{A}_{n+1}$-ből az új, bal szélső oszlopot. A kiinduló feltevés szerint $\mathbf{A}_n$-nek abban a részében, mely a j oszlopot nem tartalmazza, felvehető egy n pontból álló független rendszer. Ehhez az új sor j oszlopában álló pontot hozzávéve, az $\mathbf{A}_{n+1}$ maradékrészében egy $n+1$ elemű független rendszert kapunk.

Ha pedig $\mathbf{A}_{n+1}$-ből valamely másik oszlopot hagyunk el, akkor az $\mathbf{A}_n$ maradékrészében felvett n elemű független rendszerhez az „északnyugati" sarokpontot hozzávéve ismét $n+1$ elemű független rendszerünk van az $\mathbf{A}_{n+1}$ maradékrészében.

Figyeljük meg, hogy a független rendszer kiválasztása mindkét esetben egyértelmű volt. $\mathbf{A}_{n+1}$ tehát $\mathbf{A}_n$ minden tulajdonságával rendelkezik.

1.2 *A $\mathcal{K}$ osztályú mátrixok két tulajdonsága*

Egy n sort (illetve $n+1$ oszlopot) tartalmazó $\mathcal{K}$ osztályú mátrix

a) bármely oszlopát elhagyva, a maradékrészben kiválasztható — mégpedig egyértelműen — egy n pontból álló független rendszer;

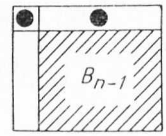
b) rendezett alakra hozható pusztán a sorok és oszlopok átrendezésével.

Elegendő a második állítást igazolni, mivel az elsőt rendezett alakú mátrixokra már bizonyítottuk és a kiválasztható független rendszer pontjainak maximális száma a sor- és oszlopcserékre nézve invariáns.

A második állítás igazolásához először azt kell belátnunk, hogy a $\mathcal{K}$ osztályú mátrixban mindig van olyan oszlop, melyben éppen egy pont van. Valahol ugyanis minden útvonalnak meg kell szakadnia (ellenkező esetben körutat lehetne képezni, ami ellentétben áll a definícióval). De egy útvonal csak olyan pontról nem folytatható, mely oszlopában egyedül áll, mivel (a definíció szerint) a saját sorában minden pontnak van párja.

Legyen most $\mathbf{B}_n$ egy tetszőleges $\mathcal{K}$ osztályú mátrix. Válasszunk ki egy, saját oszlopában egyedüli pontot, helyezzük ennek sorát legfelülre és oszlopát a bal szélső helyre. Így a kérdéses pont az „északnyugati" sarokba kerül (4. ábra).

Belátható, hogy a $\mathbf{B}_{n-1}$ részmátrix, mely az eredeti mátrixból az első sor és oszlop elhagyásával keletkezik, szintén $\mathcal{K}$ osztályú. Ha ugyanis az eredeti mátrix körút mentes, akkor nyilván a része is az; minden sorában két pontnak kell lenni, mert sorai előtt a $\mathbf{B}_n$ oszlopában nincsen pont és végül maga is eggyel több oszloppal bír, mint sorainak száma. Akkor pedig $\mathbf{B}_{n-1}$-ben is van olyan pont, mely oszlopában egyedül áll és az eljárás megismételhető. Így véges számú lépésben a teljes mátrixot rendezett alakra hozhatjuk.

B_n = 

4. ábra

2. Egy speciális szállítási feladat

Tekintsük az alábbi szállítási feladatot:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n; \qquad j = 1, 2, \ldots n + 1$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = n + 1; \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Mint látható, az $[x_{ij}]$ mátrix formában felírt megoldásrendszer n sorból és $n + 1$ oszlopból áll, a változók összege minden sorban $n + 1$ és minden oszlopban n. A további vizsgálatokban felhasználunk néhány ismert fogalmat, ezek röviden a következők.

A lineáris szállítási feladat feltételi egyenletrendszerének rangja eggyel kevesebb a sorok és oszlopok számának összegénél. Így jelen esetben a rangszám $n + (n + 1) - 1 = 2n$.

Bázismegoldásnak nevezzük ezután azokat a megengedett megoldásokat, melyekben a pozitív értékű változók száma legfeljebb $2n$. (Ismeretes, hogy az optimális megoldást elegendő a bázismegoldások között keresni.)

Azokat a bázismegoldásokat, melyekben a pozitív értékű változók száma kisebb, mint $2n$, degeneráltnak nevezzük. (A hozzárendelési feladatban a gyakorlati nehézséget éppen az jelenti, hogy minden bázismegoldása degenerált.)

A rövidség kedvéért „kötött helyeknek" nevezzük az $[x_{ij}]$ megoldás-mátrixban azokat és csak azokat a mezőket, ahol a megfelelő változó értéke pozitív.

Be lehet mármost bizonyítani, hogy a szóban forgó szállítási feladat minden bázismegoldásának mátrixa — a kötött helyek elrendeződését tekintve — $\mathcal{K}$ osztályú.

a) A sorok és oszlopok száma eleve megfelel az 1. pontban adott definíciónak.

b) Mivel a mátrix bármely mezőjében a változó értéke legfeljebb n (az oszlopösszeg) lehet, a sorösszeg pedig mindenütt nagyobb: $n + 1$, ezért egy megengedett megoldás minden sorában legalább két kötött helynek kell szerepelnie.

Ebből következik viszont, hogy ha egy megengedett megoldásban van olyan sor, ahol a kötött helyek száma kettőnél több, akkor — mivel n db sorunk van — az összes kötött helyek száma nagyobb $2n$-nél. Az ilyen megoldás tehát nem bázismegoldás.

Eszerint minden bázismegoldás soronként pontosan két kötött helyet tartalmaz (így összesen $2n$ darabot).

c) A kötött helyek rendszere körút mentes. Ha ugyanis lenne olyan körút, melynek minden csúcspontja kötött helyen van, akkor ennek segítségével a pozitív értékkel programozott helyek száma eggyel csökkenthető lenne, holott láttuk, hogy ezek száma minden lehetséges megoldásban legalább $2n$.

Így a $\mathcal{K}$ osztály minden ismérvét kimerítettük. A bázismegoldások imént igazolt tulajdonsága alapján tehát a tárgyalt szállítási feladat

— degeneráció mentes (mint a *b)* pontból következik), ami garantálja, hogy bármely nem optimális megoldásból úgy térhetünk át egy következő programra, hogy a célfüggvény értéke véges mértékben javul;

— a megoldás mátrixának bármely oszlopát elhagyva, a megmaradó $n \times n$ négyzetes mátrix kötött helyein felvehető, mégpedig egyértelműen egy maximális (n pontból álló) független rendszer.

A független pontok kijelölésével kapcsolatban megjegyezzük, hogy ez teljesen mechanikus, egyszerű művelet. Először az oszlopukban egyedül álló kötött helyeket karikázzuk be a sorukban levő másikat áthúzva. Így újabb olyan pontokat kapunk, melyek oszlopukban vagy sorukban már egyedül állanak. Ezeket bekarikázva a velük egyvonalban lévő összes többi pontot kihúzzuk és ezt folytatva végül csak a keresett pontok maradnak meg.

		2	5				7
	1			6			7
		4				3	7
					6	1	7
6			1				7
	5					2	7
6	6	6	6	6	6	6	

a)

		5			
	1		6		
					3
				6	1
6		1			
	5				2

b)

5. ábra

Az elmondottak illusztrálásaképpen az 5/a ábra $n = 6$ esetén mutat be egy bázismegoldást; az 5/b ábrán az a független rendszer látható, amit a harmadik oszlop elhagyásakor kapunk.

3. A hozzárendelési probléma

A hozzárendelési probléma megfogalmazása a következő:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad j = 1, 2, \ldots n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad i = 1, 2, \ldots n;$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

Ismeretes, hogy a hozzárendelési feladat bázismegoldásaiban a változók nulla vagy egységnyi értékűek, az utóbbiak $[x_{ij}]$-ben független rendszert alkotnak.

A 2. pontban definiált szállítási feladat optimális megoldásaira most igazolni fogjuk, hogy ha azokban bármelyik oszlopot elhagyjuk, akkor a maradékrészben kijelölt független rendszer az illető maradékrészben kitűzött hozzárendelési feladat optimális megoldását jelenti.

A szóban forgó szállítási feladat duálisának feltétel-rendszere — mint ismeretes — :

$$u_i + v_j \leq c_{ij},$$

$$i = 1, 2, \ldots n \text{ és}$$

$$j = 1, 2, \ldots n+1,$$

melyet a duális változók optimális megoldáshoz tartozó u_i^* és v_j^* értékei oly módon elégítenek ki, hogy valahányszor $x_{ij}^* > 0$, az $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ egyenlőség áll fenn. (x_{ij}^*-al a primál feladat optimális megoldásának értékeit jelöltük.)

A bizonyítás gondolatmenete kedvéért most alakítsuk át a költségmátrixot úgy, hogy az új költségelem:

$$c'_{ij} = c_{ij} - (u_i^* + v_j^*).$$

Ez a költségmátrix az eredeti költségmátrixszal optimalizálás szempontjából egyenértékű, hiszen nem tettünk mást, mint hogy minden sorából és oszlopából levontunk egy konstanst.

Az elmondottakból következik, hogy a redukált költségmátrixban a kötött helyek költségelemei zérusok, az egyéb helyeké pedig nem negatívok lesznek. Mivel pedig a kötött helyeken biztosan ki tudunk jelölni maximális számú független pontot, az ide írt egyesek optimális hozzárendelési programot reprezentálnak.

3.1 *A hozzárendelési probléma megoldása nem degenerált lineáris szállítási feladatként*

A hozzárendelési feladat megoldására az eddigiek alapján kézenfekvően kínálkozik az a lehetőség, hogy a költségmátrixot kibővítjük egy új, $n + 1$-edik segédoszloppal, megoldjuk a 2. pont szállítási feladatát, majd a hozzáírt oszlopot a segédváltozókkal együtt ismét elhagyva megkeressük a független pontokat. Mivel azonban a segédoszlop költségelemei tetszőlegesek lehetnek, azokat egy (például a $c_{1,\,n+1}$) kivételével végtelennek vesszük. Ezáltal $x_{1,\,n+1}$ értékét is rögzítettük ($x_{1,\,n+1} = n$). Így a segédoszlop hozzáírása is feleslegessé válik.

Végezetül tehát a

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n; \qquad j = 1, 2, \ldots n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \qquad i = 1, 2, \ldots n;$$

$$x_{ij} \geqq 0;$$

$$\sum_{o=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

degenerációtól mentes szállítási feladatot oldjuk meg, ahol $a_1 = 1$; $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = n + 1$. Ennek minden optimális megoldásához egy közvetlenül kijelölhető független rendszer tartozik, ezek a hozzárendelési feladat alternatív optimumait szolgáltatják. (Megjegyezzük, hogy a szállítási feladat különböző megoldásaihoz nem szükségképpen tartozik különböző független rendszer.)

5	2	5	4	6	1
2	1	1	2	1	6
4	1	4	2	4	6
2	1	2	2	3	6
4	2	3	2	4	6
5	5	5	5	5	

	v_j	4	2	4	3	4
u_i	0		1			
	−3			1		5
	−1		4		2	
	−2	5		1		
	−1			3	3	

6. ábra

Megemlítjük végül, hogy az előző pontban szereplő költségmátrix-redukció, mint könnyen igazolható, minimalizálja az új költségelemek összegét, miközben legalább $2n - 1$ költségelem zérus lesz. Ez a tény némely alkalmazásban hasznos lehet.

(Beérkezett: 1969.I.18.)

IRODALOM

[1] Egerváry, J.: Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól. Matematikai és Fizikai Lapok, 1931. 38., sz. 16—28 p.

[2] Krekó, B.: Lineáris programozás. Budapest, 1966. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[3] Kuhn, H. W.: The Hungarian Method for the Assignment Problem. Naval Research Logistics Quarterly 1955. 2, 83—98 p.

THE SOLUTION OF THE ASSIGNMENT PROBLEM AS A NON-DEGENERATE LINEAR TRANSPORT PROBLEM

The article deals with the classical assignment problem, the formulation of which as a linear programming problem is the following:

$$(*)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; \qquad j = 1, 2, \ldots n \\ \sum\limits_{j=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; \qquad i = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqq 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n}{}' c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

It is known that this linear model does not afford a possibility of the practical solution of the problem, the difficulty being due to the fact that all its basic solutions are degenerate.

To overcome this difficulty, the author proposes a method which consists simply in substituting for constraints (*) the following:

$$\sum_{i=1}^{n}{}' x_{ij} = n\,; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n}{}' x_{ij} = a_i\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

where

$$a_1 = 1 \text{ and}$$

$$a_1 = n + 1 \text{ for } i = 2, 3, \ldots, n.$$

The author proves that in this linear transport problem

a) none of the basic solutions is degenerate, a fact that ensures the passing from any non-optimal solution to a subsequent program in a way that the objective function value improves to a finite extent;

b) in matrix $[x_{ij}]$ belonging to the basic solution, over the set of positive variables there can always be determined one and only one maximal independent system (composed of n points);

c) the independent system belonging to the optimum solution constitutes also an optimum solution for the original assignment problem.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СООТВЕТСТВИЯ КАК НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ

Автор статьи занимается классической проблемой соответствия, которая может быть сформулирована как задача линейного программирования следующим образом:

$$(*)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n}{}' c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Известно, что эта модель линейного программирования не предоставляет возможности для практического решения задачи; трудность заключается в том, что все ее опорные решения являются вырожденными.

Для преодоления этой трудности автор предлагает метод, состоящий попросту в том что условия (*) заменяются следующими:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

где

$$a_1 = 1 \text{ и}$$

$$a_i = n + 1; \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Автор доказывает, что в этой линейной задаче транспортирования

а) ни одно из опорных решений не является вырожденным. Этим фактом обеспечивается условие, что от любого неоптимального решения можно перейти к следующей программе так, чтобы значение целевой функции улучшалось в *конечномерной* степени.

б) На множестве положительных переменных матрицы $[x_{ij}]$, относящейся к опорному решению, всегда можно выявить одну и только одну максимальную (состоящую из n элементов) независимую систему.

в) Независимая система, относящаяся к оптимальному решению, представляет собой оптимальное решение и для первоначальной задачи соответствия.