Glattfelder Péter

Mit is mutat a inverzmatrix?

Közismert, hogy a gazdasági élet különböző területein dolgozó szakemberek, akik számára az ágazati kapcsolati mérleg a mindennapi munka segédeszközévé vált, még ma is némi fenntartással kezelik a rendelkezésükre álló képleteket, számításokat, illetve táblákat. Véleményem szerint ez részben azzal magyarázható, hogy a szóban forgó eredmények közgazdasági értelmezése nem egy helyen pontatlan, sőt egyenesen félreérthető.

Úgy tűnik, hogy e problémák alapvetően az inverzmatrixszal kapcsolatosak. Néhány — helytálló, bár a kérdést összetetten vizsgáló — kivételtől eltekintve a szerzők az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ matrix r_{ij} elemét úgy definiálják, mint egységnyi végsőfelhasználásra kerülő termék (netto output) kibocsátásához szükséges *halmozott* (közvetlen plusz közvetett) ráfordítást az adott i, j relációban. Ha ez így van, úgy jogos a kérdés, hogy vajon nem hibázunk-e akkor, amikor a közvetett ráfordítások vizsgálatához szembeállítjuk a bruttó output (össztermelés) egységére vetített közvetlen és a nettó kibocsátás egységére jutó halmozott ráfordításokat. A statisztika elmélete helyteleníti ezt az összevetést (hiszen különbözőek a viszonyítási alapok), mégis igen gyakran megtettük anélkül, hogy az említett dimenzióbeli eltéréssel számoltunk volna.

Hogyan lehetne feloldani a közvetlen és a halmozott ráfordításoknak ezt az ellentmondását? Néhány szerző már felvetette, hogy valamiféle „közös alapra" kellene hozni a kétféle együtthatót, hogy ily módon kiszűrhessük a halmozott ráfordításokból azt a növekedést, melyet a bruttó és a nettó kibocsátás nagyságrendi eltérése okozott.

Megítélésem szerint nincs szükség semmiféle „nettósításra", mivel az inverz-együtthatók — mint halmozott mutatók — ugyancsak a „bruttó" output egységére vonatkoznak. (Az idézőjelet a későbbi gondolatmenet igazolja.) Ha ez igaz — márpedig hogy az, azt a következőkben bizonyítani is fogom —, úgy ezáltal már automatikusan megszűnik a különböző viszonyítási alapok problémája, s a halmozott és a közvetlen ráfordítások közti eltérés kizárólag a közvetett ráfordításokkal magyarázható. (Szándékosan beszélek halmozott és nem teljes ráfordításokról. Nálunk e két kifejezést hosszú ideig azonos értelemben használták, napjainkban azonban „teljes" alatt inkább a népgazdasági szintű ráfordításokat értjük.[1]

A megfelelő külföldi és hazai szakirodalmat tanulmányozva azt láthatjuk, hogy az inverz-együtthatók olyan értelmezése, miszerint azok egységnyi nettó output előállításához szükséges *halmozott* ráfordítások lennének, a következő matematikai eredményekhez kapcsolódik:

[1] Lásd pl. Balsay Éva: Népgazdasági szintű ráfordítások meghatározása. — Statisztikai Szemle — 1965/11.

— az ún. „Neumann-sor"
— a bruttó és a nettó output leontiefi összefüggése.

A Neumann-sor az $\mathbf{R} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ matrixot írja fel egy olyan végtelen mátrix-polinom alakjában, melyben az egyes tagok az **A** technológiai mátrix fokozatosan növekvő hatványai. Eszerint

$$(1) \qquad (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 \ldots + \mathbf{A}^n + \ldots$$

A fenti, matematikai szempontból kifogástalan összefüggésből még egyáltalán nem derül ki, hogy miként került az inverzmátrix definíciójába a nettó output mint vetítési alap. Ez utóbbi kérdésre az

$$(2) \qquad \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

képlet adja meg a választ, mely szerint a Leontief-inverz és a nettó output (**y**) szorzataként mindig előállítható a bruttó kibocsátás vektora (**x**). Az itt leírt azonosságot, mely a nettó outputra való vetítettségre utal, a továbbiakban összekapcsoltuk a halmozódást „szuggeráló" Neumann-sor értelmezésével. S éppen itt vélem felfedezni az ellentmondást, ugyanis ez utóbbi kizárólag az **A** mátrix hatványaiból képzi az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$-et, mely **A**-ról köztudott, hogy nem az **y**, hanem az **x**, a bruttó termelés egységére vonatkozik.[2] Az az igazság — és a továbbiakban erre szeretnék rámutatni —, hogy kétféle „jelentése" van az inverz-együtthatóknak, s mi ezt a kettőt kissé összekevertük. Nevezetesen: ezek tekinthetők egységnyi *bruttó termelés halmozott* ráfordításainak (1), illetve a *közvetlen ráfordítások* egységnyi nettó outputra vetített értékének (2).[3]

Félreértés ne essék: az számomra is világos, hogy elvileg nincs semmi különbség a kétféle kibocsátás *egysége* között. (A gyakorlatban persze lehet, hiszen — sajnos — még nem minden esetben azonos „egység" a termelő fogyasztásra és pl. az exportra átadott nyersanyag vagy félkésztermék.) Emiatt ezen „egység" előállításához — eltekintve a rendszer belső összefüggéseitől — azonos ráfordítás-igény tartozik. Csakhogy jogtalan ez az eltekintés, s így én sem az ellen protestálok, hogy ne kellene nagyobb termékráfordítás egységnyi végsőfelhasználási *kibocsátásához*, mint a bruttó output egységéhez (hiszen az előbbi egy meghatározott termelő fogyasztással párosul, s így az abból való igények kielégítéséhez az utóbbit terhelő ráfordításokat is meg kell „fizetni"). Arról van szó, hogy a halmozódás mint az input-output közismert és már tövéről hegyére elmagyarázott kategóriája nem ide tartozik, nem a nettó outputtal kapcsolatos. Azt sem szabad elfelejteni, hogy matematikai oldalról tekintve az inverzegyütthatók kizárólag azért nagyobbak az **A** megfelelő elemeinél, mivel ugyanazt az összráfordítást kisebb outputra vonatkoztattuk. Ebből az aspektusból tehát nincs itt semmiféle halmozódás: csupán az **x** helyett az **y**-ra végeztünk egy lineáris transzformációt (ahol is $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$)[4]. Így lehet azután —

[2] Megjegyzendő, hogy egymással belső, termelési kapcsolatban nem álló szektorok esetében ez a különbség nem jelent problémát (hiszen ekkor azonos az összes és a végsőfelhasználási kibocsátás, az **A** pedig egy null-mátrix), ellenkező esetben viszont igen.

[3] Ezt az oldalt — elméletileg talán a legtisztábban — Szabó László fogta meg. (Az inverzmátrix értelmezése — Statisztikai Szemle 1963/4.)

[4] Más ez a transzformáció, mint ami az **A** képzésekor történt: ott a **T** sakktábla-mérleg oszlopait rendre elosztottuk a hozzájuk tartozó bruttó termeléssel, míg itt az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ az $\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}$ egyenletrendszer megoldásából adódott.

ismétlem: ebben a vonatkozásban — az $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ elemeit *közvetlen* ráfordításként értelmezni.

Külön kérdés — s az eddigieknek nem mond ellene — hogy a Neumann-sorral való értelmezés lehetővé teszi, hogy ugyanezeket az elemeket egységnyi össztermék (bruttó output) *halmozott* ráfordítás-igényeként is interpretáljuk.[5] Ebből pedig logikusan következik, hogy határozott közgazdasági értelme van a halmozott ráfordítási együtthatók és a hozzájuk tartozó bruttó termelés szorzatának. (Képletszerűen az $\mathbf{R}_x = (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\cdot\hat{\mathbf{X}}$-nek, ahol $\hat{\mathbf{X}}$ az $\mathbf{x}$-ből képzett diagonális mátrix.) Valóban, így hiszem, s ez nem fából vaskarika, még ha ily módon ki is jutunk az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$ korlátozta rendszerből. Ezek az abszolút értékű (tehát nem fajlagos!) halmozott ráfordítások, pontosabban ezek és a tényleges (halmozatlan) értékek különbségei azt a közvetett ráfordítás-tömeget mutatják, melyet a szóban forgó szektor a többitől — relációnként vagy összesen — a saját outputja érdekében, indirekte megkívánt, illetve feltételezett. A halmozott import-koefficiensek és a megfelelő bruttó termelés szorzata például kimutatja azt a szektoronkénti importanyag-*volument* is, melyet e szektor a többitől kapott termékekbe „ágyazva", már mint hazai eredetű erőforrást fogyasztott el.

A magam részéről a Neumann-sor és a többször idézett leontiefi összefüggés közgazdasági-matematikai jelentőségét éppen abban látom, hogy rámutatnak az inverz-együtthatók fentiekben vázolt kettős természetére. Ebből kifolyólag szerintem helyesebb lenne a továbbiakban az „egységnyi végsőfelhasználás halmozott . . . ráfordításai" címmel ellátott, illetve értelmezett számítási eredményeknél mindig egységnyi *termelés* halmozott . . . ráfordításai"-ról beszélni.

(Beérkezett: 1969. I. 16.)

WHAT DOES THE INVERSE MATRIX ACTUALLY SHOW?

The article aims not so much at describing new scientific achievements as rather at clearing a theoretical misinterpretation assumed by the author to persist. It deals, indeed, with the interpretation of the traditional Leontief inverse which is defined in practice as the matrix of total (direct and indirect) inputs required to bring about one unit of net output. This definition is challenged by the author who claims that his proposed interpretation opens new possibilities for the further theoretical and practical development of input-output analysis.

ЧТО ЖЕ ПОКАЗЫВАЕТ ПО СУЩЕСТВУ ОБРАТНАЯ МАТРИЦА?

Цель данной статьи заключается не столь в представлении новых научных результатов, как в выяснении — как это предполагает автор — теоретического недоразумения. Конкретно, речь идет о трактовке традиционной обратной матрицы Леонтьева, которую на практике принято определять как матрицу кумулированных (прямых плюс косвенных) затрат, требующихся для создания единицы «чистого выпуска». Автор спорит с этим определением, открывая предлагаемой им трактовкой новые возможности для принципиального и практического развития анализов «затраты-выпуск».

[5] Nem tévedtek tehát a külföldi és hazai kutatók (W. Leontief, R. Stone, Bródy A., Kondor Gy., Simon Gy., Rácz A. stb.), amikor definíciót adtak, hanem inkább adósok maradtak — megítélésem szerint — a Leontief-inverz két oldalának észrevételével, s így könnyen létrejöhetett az a logikai zavar, mely megingatta jónéhány gyakorlati közgazdánk inverzmátrixba vetett hitét.