

BIZTOSÍTÓTÁRSASÁGOK TARTALÉKKÉPZÉSI FOLYAMATÁNAK VIZSGÁLATA ADÓ- ÉS OSZTALÉKFIZETÉS MELLETT¹

SZABÓ TIBOR – MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA – MIHÁLYKÓ CSABA
Pannon Egyetem, Veszprém

Cikkünk biztosítótársaságok tartalékképzési folyamatának modellezésével foglalkozik, egy alkalmas célfüggvény optimalizálásán keresztül kontrollálva a biztosítótársaság működését. A biztosítási alapmodell lényege, hogy véletlen időpontokban véletlen nagyságú kárigények érkeznek be a biztosítóhoz, amit a tartalékból, azaz a kezdőtőkéből és a befizetett díjakból fedeznek. A tartalék mennyiségét így egy sztochasztikus folyamat adja meg. Ezt az alapmodellt a szakirodalomban részletesen vizsgálták, és többféleképpen módosították. A cikkben ismertetünk egy, az alapmodellt általánosító, általunk újonnan kidolgozott, az adó- és osztalékfizetést együttesen kezelő összetett modellt, és egy olyan új célfüggvényt, amely mind az állam, mind az ügyfelek, mind a biztosítótársaság tulajdonosainak érdekeit figyelembe veszi. Ez a célfüggvény a biztosítótársaság működése révén létrejött értéket, eredményességet hivatott mérni. Az összetett modellt a küszöb (threshold) osztalékfizetési stratégia alkalmazása esetén részletesebben elemezzük. A célfüggvény értékeit Monte-Carlo szimulációval számítottuk ki, optimalizálását a szimulációs eredmények alapján numerikus módszerek segítségével végezzük el. Végezetül megvizsgáljuk a működést egy másik szempontból, nevezetesen a jövedelmezőségi szempontból is, azaz meghatározzuk, hogy mennyi kezdőtőkét érdemes befektetni az optimális jövedelmezőségi index elérése érdekében.

1 Bevezetés

Az üzleti élet bármely területén működő vállalatok, így a biztosítótársaságok számára is fontos, hogy a működésüket veszélyeztető, üzleti környezetükből fakadó kockázatok felismerhetővé, kezelhetővé váljanak, a menedzsment, a tulajdonosok döntései tervezhetőek, kiszámíthatóak legyenek. A biztosítók kockázata az üzleti környezeten kívül természetesen az általuk kínált szolgáltatás, a biztosítás sztochasztikus természetéből is fakad. Kockázatokra többek között a portfóliójukon, áraikon, osztalékpolitikájukon keresztül lehetnek hatással, ezek révén tudják befolyásolni azt.

E kockázatok felmérése mind a társaságok számára, mind társadalmi szempontból kívánatos. A biztosítótársaságok szerte a világban kiterjedt ügyfélkörrel rendelkeznek, a lakosság szinte egésze rendelkezik valamiféle biztosítással, így a társaságok stabil működése nem csak a tulajdonosok érdeke,

¹Beérkezett: 2011. november 17. E-mail: orbane@almos.uni-pannon.hu.

hanem az ügyfeleké is. Számukra is fontos, hogy a megkötött szerződés érvényben maradjon; a biztosító, amennyiben a biztosítási esemény bekövetkezik, a keletkező kár egy részét vagy teljes egészét megtérítse.

Dolgozatunkban a biztosítótársaságok tartalékképzési folyamatát vizsgáljuk meg; matematikai, illetve számítógépes, ún. Monte Carlo szimulációval történő modellezési lehetőségeit kívánjuk bemutatni a teljesség igénye nélkül. A társaságok működését több jellemzőn keresztül fogjuk értékelni: tönkremenési valószínűség, tönkremenési idő, kifizetett diszkontált osztalék várható értéke, befizetett diszkontált adó várható értéke.

Először röviden bemutatjuk az alapmodellt, majd ezt követően ismertetjük az irodalomban általánosan elfogadott és általunk felhasznált adó-, illetve osztalékfizetés esetét. Jelen publikációban, bár a szakirodalomban az osztalékfizetés számos módja ismert, főleg az ún. küszöb stratégiával foglalkozunk. Ezután tárgyaljuk az általunk megfogalmazott, a továbbiakban összetett jelzővel illetett modellt, amely egyszerre kezeli az osztalék-, illetve az adófizetés problémáját, így egy, a valósághoz közelebb álló modellhez jutunk, amelyet ismereteink szerint a szakirodalomban eddig nem vizsgáltak. Az összetett modell azon esetével foglalkozunk, amikor a küszöb osztalékfizetési stratégia szerint történik az osztalékfizetés.

A modell további elemekkel is bővíthető lenne, például a tartalék pénzügyi befektetésének figyelembe vételével, viszontbiztosítás kötésével, a tartalék kritikus szint alá esése esetén a csőd elkerülése érdekében további tőkebefektetéssel vagy áthidaló kölcsön felvételével, de jelen dolgozatunkban ezeket nem építettük be a modellbe.

Az egyes modellek általános vizsgálati módszere az, hogy a megadott célfüggvényre egy integrálegyenletet illetve integro-differenciálegyenletet írunk fel, s ezt próbálják megoldani (Lin, S. et al., 2003, Gerber & Shiu, 2006, Albrecher & Hipp, 2007). Ezek az egyenletek azonban csak nagyon speciális esetekben oldhatók meg analitikusan (jellemzően exponenciális-exponenciális eloszláspár mellett), így az összetett modellben az elemzés eszközéül a Monte-Carlo szimulációt alkalmaztuk. A számítógépes szimuláció nagy előnye, hogy bármilyen idő- és kárigényeloszlás mellett alkalmazható, így akkor is képes kiszámolni a kérdéses várható értékeket, amikor rájuk vonatkozólag analitikus formula nem áll rendelkezésünkre. Szimulációval való megoldásra találhatunk a szakirodalomban is példát többek között az (Albrecher & Kainhofer, 2002) és az (Albrecher et al., 2005) publikációkban. Az elemzések elvégzéséhez szimulációs programokat készítettünk. A dolgozatban látható ábrákat, illetve az előállításukhoz felhasznált szimulációs programokat a MatLab R2007b verziójú matematikai programcsomag alkalmazásával készítettük el.

2 A modell

2.1 Az alapmodell

A modell a biztosítótársaság tartalékképzési folyamatából adódóan a tartalék mennyiségét adja meg bármely $t \geq 0$ időpontban. E tartalék három összetevő

eredőjeként áll elő: a biztosítótársaság tulajdonosai által induláskor rendelkezésre bocsátott kezdőtőkéből, a társaság működése során az ügyfelek által befizetett biztosítási díjakból, valamint a biztosítótársaság által az ügyfelek részére kifizetett kárösszegekből. A tartalék értékét az idő függvényében tehát a következőképpen írhatjuk fel (Gerber & Shiu, 1998, Albrecher & Thonhauser, 2007, Ming & Junyi, 2008):

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i. \quad (1)$$

A fenti képletben $0 \leq x$ jelenti a kezdőtőkét, amely a tulajdonosok által a biztosítótársaság alapításakor befektetett tőkemennyiség. A ct az ún. díjbevételi folyamat, amely során az egységnyi idő alatt befolyó biztosítási díjak összegét — a szakirodalomban általánosan elfogadottan — időben állandónak feltételezzük. A harmadik tag az ún. kárfolyamat, amely abból áll, hogy véletlen időpontokban véletlen nagyságú kárigények érkeznek be a biztosítóhoz, amelyek kifizetése csökkenti a tartalék értékét.

A képletben szereplő Y_i mennyiségek az i -edik beérkező kárigény nagyságát jelölik. Szokásos feltevés Y_i -kről, hogy azonos $G(y)$ eloszlású, nemnegatív értékű, egymástól független valószínűségi változók, μ_g véges várható értékkel. További szokásos feltevés, hogy az $i - 1$ -edik és az i -edik kárigény közt eltelt idők nagyságát t_i nemnegatív, független valószínűségi változók adják meg, amelyeknek $F(t)$ eloszlásfüggvénye azonos, μ_f várható értéke véges. $N(t)$ a következőképpen definiálható sztochasztikus folyamat:

$$N(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < t_1 \\ k, & \text{ha } \sum_{i=1}^k t_i \leq t, \text{ de } t < \sum_{i=1}^{k+1} t_i. \end{cases} \quad (2)$$

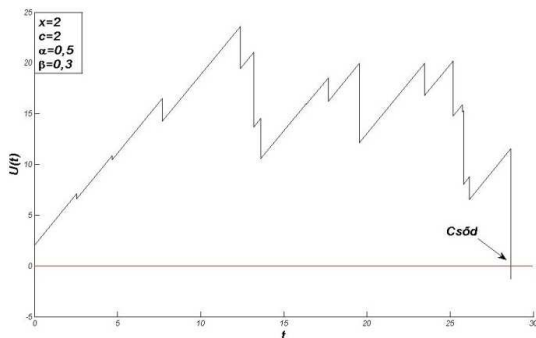
Azon esetben, amikor a károk közt eltelt időközök eloszlása tetszőleges, Sparre Andersen modellről beszélünk (Sparre Andersen, 1957).

A Sparre Andersen modell egy speciális esete, ha a károk közt eltelt idők exponenciális eloszlásúak α paraméterrel. Ebben az esetben $N(t)$ α paraméterű Poisson-folyamat, s ekkor klasszikus kockázati folyamatról beszélhetünk (Lundberg, 1909).

Általában fel szokták tételezni, hogy $N(t)$ és Y_i egymástól független. E korlátozás feloldása azt jelentené, hogy a beérkező kárigény nagysága függ annak időpontjától, például természeti károk esetén (árvíz, földrengés, tornádó) általában több és nagyobb kárigényt nyújtanak be. A továbbiakban megmaradunk a függetlenség feltételezése mellett, hiszen ez mind analitikusan, mind szimulációval könnyebben kezelhető.

Mint a bevezetőben említettük, vizsgálni fogjuk a tönkremenés valószínűségét is. Ez annak az eseménynek a valószínűségét jelenti, hogy valamely rögzített x kezdőtőke esetén elfogy a biztosítótársaság tartalékja, s így a biztosítótársaság tönkremegy, vagyis

$$\psi(x) = P(x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i < 0 \text{ valamely } 0 \leq t \text{ esetén}). \quad (3)$$



1. ábra. A tartalék változása az idő függvényében

Természetesen érdekes a tönkremenés ideje is, amelyet a következőképpen írhatunk fel:

$$T_U = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : u(t) < 0\}, & \text{ha létezik } 0 \leq t, \text{ amelyre } U(t) < 0 \\ \infty, & \text{ha } 0 \leq U(t) \text{ minden } 0 \leq t \text{ esetén,} \end{cases} \quad (4)$$

vagyis ha a biztosítótársaság tönkremegy, akkor a tönkremenés idejének a legelső olyan időpillanatot tekintjük, amikor a tartalék értéke 0 alá csökken, azaz tartozása lesz az ügyfelek felé. Ha ez sosem történik meg, akkor a tönkremenés idejét végtelennek definiáljuk.

Az 1. ábrán bemutatjuk a fent definiált kockázati folyamat egy lehetséges realizációját.

Az ábrán a folyamatot $x = 2$ kezdőtőkérőlről indítottuk. A tartalék értéke egyenletesen, $c = 2$ intenzitással nőne (2 meredekségű szakaszok), amennyiben nem érkeznének be véletlen időpontokban véletlen nagyságú kárigények (függőleges ugrások). A realizáció során mind az időközök, mind pedig a kárigények generálására exponenciális eloszlást használtunk, $\alpha = 0,5$ és $\beta = 0,3$ paraméterrel. Az ábráról leolvasható a csőd időpontja, ami $T_U(2) = 28,66$ időegység.

2.2 Osztalékfizetés

2.2.1 Az osztalékfizetés általános leírása

Módosítsuk az alapmodellt oly módon, hogy a tulajdonosok számára osztalékot fizetnek a társaság tartalékából a kockázati folyamatok irodalmában általánosan elfogadott módon (Gerber & Shiu, 2006, Ming & Junyi, 2007, Avanzi, 2007).

Jelölje $D(t)$ a t ideig kifizetett nominális, vagyis az inflációval nem kiigazított osztalék értékét. Ekkor a tartalék értéke a t időpontban $D(t)$ értékével csökken, vagyis

$$R_D(t) = U(t) - D(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

A tulajdonosok által megkapott osztalék jelenértékét a következő Stieltjes-integrállal számíthatjuk ki:

$$K_D(x) = \int_0^{T_D(x)} e^{-\delta t} dD(t). \quad (6)$$

A képletben szereplő δ az inflációs ráta. Kizárólag a $0 \leq \delta$ esetekkel fogunk foglalkozni, vagyis amikor az árszínvonal változatlan, illetve infláció van. Mivel folytonos esetről van szó, ezért t időpillanatban a diszkonttényező értékét az $e^{-\delta t}$ kifejezés adja meg. Bár a valóságot nyilván nem írja le tökéletesen, a kockázati folyamatok elemzésénél általánosan elfogadott a konstans inflációs ráta feltételezése (Albrecher et al. 2005, Gerber & Shiu, 2006, Avanzi, 2007).

Az integrál felső határában szereplő $T_D(x)$ a tönkremenési idő osztalékfizetés mellett, amely a korábbiakhoz hasonlóan definiálható. Az integrálban a $D(t)$ folyamat szerint végezzük az integrálást, mert az osztalékfizetési stratégia során osztalékként újonnan kifizetett összegek ($D(t)$ változásainak) jelenértékére vagyunk kíváncsiak.

Osztalékot, mint korábban említettük, többféle stratégia szerint fizethetnek. Ha megadunk egy osztalékfizetési szabályt, vagyis, hogy mely esetben mi módon fizetnek osztalékot a tulajdonosok részére, azzal meghatározzuk $D(t)$ -t. A szakirodalomban, hogy az optimális stratégia meghatározásának kérdése matematikailag kezelhető legyen, a vizsgált stratégiák halmazát leszűkítik az ún. megengedett stratégiák halmazára. Ezt jelölje C , és legyen $D = \{D(t)\}_{t \geq 0}$ olyan osztalékfizetési folyamat, amelyre $D \in C$. E C halmazba tartozó stratégiákra az alábbi három feltételnek kell teljesülnie:

1. $D(t-) = D(t)$,
2. $D(t)$ növekvő függvény,
3. $D(t+) - D(t) \leq R_D(t)$.

Az első tulajdonság pusztán a matematikai kezelhetőség miatt fontos; a második feltétel szerint a tulajdonosok nem fizethetnek vissza a társaság kasszájába a kapott osztalékból; míg a harmadik azt fejezi ki, hogy az újonnan kifizetett osztalék nem lehet több, mint a tartalék mennyisége, vagyis osztalékfizetés miatt közvetlenül nem mehet csődbe a biztosítótársaság.

Mivel $D(t)$ értéke a sztochasztikus alapmodelltől függ, valamint $T_D(x)$ is egy véletlentől függő mennyiség, ezért $K_D(x)$ értéke egy valószínűségi változó, így $K_D(x)$ várható értékét érdemes figyelembe venni.

Ugyan a tulajdonosok érdeke az is, hogy a vállalat értéke minél nagyobb legyen, azonban jelen publikációban ezt a részérdeket figyelembevételének modellbeli bonyolultsága miatt elhagyjuk. Így a szakirodalomban általánosan elfogadott módon, az osztalék jelenértéke várható értékének maximalizálását vizsgáljuk mi is (Asmussen & Taksar 1997, Lin et al. 2003, Avanzi, 2007). Az

összes megengedett stratégia halmazán optimalizálandó célfüggvény matematikailag tehát a következő:

$$V_D(x) = E(K_D(x)) = E\left(\int_0^{T_D(x)} e^{-\delta t} dD(t)\right). \quad (7)$$

Jelen esetben azonban csupán a küszöb stratégiák halmazán kívánjuk a maximumot megkeresni a stratégia paramétereinek optimális kiválasztásával.

2.2.2 Küszöb osztalékfizetési stratégia

Küszöb stratégián a biztosítótársaság olyan osztalékfizetési stratégiáját értjük, amely során a befolyó díjak egy részét kifizetik osztalékként, ha a tartalék értéke eléri egy meghatározott szintet, illetve afelett van, a beszedett díjak másik része viszont a tartalék szintjét növeli. Ezzel szemben, ha a tartalék értéke nem éri el ezt a korlátot, a díjak teljes egészében a tartalékhoz kerülnek. Matematikailag ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

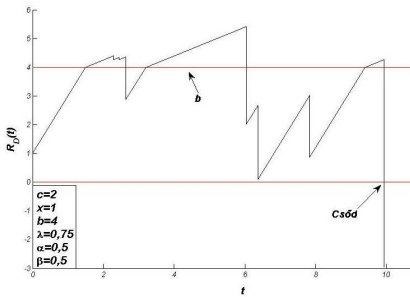
$$dD(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq R_D(t) < b \\ \lambda c dt, & \text{ha } b \leq R_D(t), \end{cases} \quad (8)$$

vagyis ha a tartalék szintje 0 és a korlát értéke között van, a nominális osztalék értéke nem változik, ellenkező esetben $\lambda \in [0, 1]$ részét a c intenzitással befolyó díjaknak kifizetik a tulajdonosok részére (Gerber & Shiu, 2006, Avanzi, 2007, Ming & Junyi 2008). Tehát a küszöb stratégiának két szabadon megválasztható paramétere van, a b küszöb és a λ intenzitás.

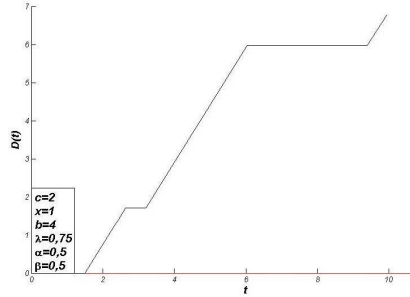
A $\lambda = 1$ szélső esetben az ún. konstans korlát (constant barrier) stratégiáról beszélhetünk, amikor is, ha a tartalék értéke eléri az osztalékfizetési korlátot, a teljes befolyó díjat kifizetik osztalékként, így a tartalék értéke nem változik (Lin et al., 2003, Avanzi, 2007). E stratégiára még a későbbiekben hivatkozunk. Ha $\lambda = 0$, akkor nem történik osztalékfizetés, így az alapmodellhez jutunk.

A küszöb stratégia optimális az összes megengedett stratégia körében, ha az osztalék növekedési üteme korlátos (Asmussen & Taksar, 1997). Ez esetben létezik a szakirodalomban a diszkontált osztalék várható értékére, illetve az optimális korlát szintjére analitikus formula abban a speciális esetben, amikor mind az időközök, mind a kárigények eloszlása exponenciális. A megoldásokat Gerber és Shiu dolgozták ki (Gerber & Shiu, 2006). Ebben az esetben a szakirodalomban megtalálható a tönkremenés valószínűségének explicit megadása is, amelyet Ming és Junyi publikáltak (Ming & Junyi, 2008). Mindezek miatt kiemelten érdekes ez a típusú stratégia.

Az alábbi ábrákon a küszöb osztalékfizetési stratégia mellett a tartalék és a tulajdonosok számára kifizetett osztalék alakulásának egy realizációját szemléltetjük.



2. ábra. A tartalék időbeli változása küszöb osztatélfizetési stratégia szerinti osztatélfizetés esetén



3. ábra. A nominális osztaték alakulása küszöb osztatélfizetési stratégia szerinti osztatélfizetés esetén

A 2. ábrán a küszöb osztatélfizetési stratégiával módosított folyamatot tüntettük fel. Látható az ábrán, hogy amikor $b \leq R_D(t)$, akkor $\lambda \cdot c$ intenzitással fizetnek osztatéket (a tartalék értéke $(1 - \lambda) \cdot c$ intenzitással nő), így a 3. ábrán látható nominális osztaték értéke növekszik, ellenkező esetben változatlan marad.

2.3 Adófizetés

Az általunk vizsgált adófizetési módot először Albrecher és Hipp vezették be, és vizsgálták a tönkremenés valószínűségének és a diszkontált adó várható értékének tulajdonságait (Albrecher & Hipp, 2007).

Cikkünkben olyan adófizetési modellt tekintettek, amely során, ha a biztosító tartalékának értéke elér egy meghatározott szintet, adókötelessé válik, és ezután olyan esetekben fizet az államnak adót, amikor a tartalék értéke eléri, illetve meghaladja a korábbi maximumát, vagyis amikor a korábbiakhoz képest nyereséges helyzetben van. Ellenkező esetekben nem történik adófizetés.

Jelölje $\gamma \in [0, 1]$ az adókulcsot, amely azt adja meg, hogy adófizetés esetén a c intenzitással befolyó díjak mekkora hányadát fizeti be a társaság adóként, illetve R^Γ a tartalék azon szintjét, amelynek elérésétől már adóköteles a biztosítótársaság. Erre a továbbiakban adózási szintként hivatkozunk. $\Gamma(t)$ -vel jelöljük a t ideig befizetett nominális adó értékét. Ekkor a tartalék értéke adófizetés esetén:

$$R_\Gamma(t) = U(t) - \Gamma(t), \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Adófizetés abban az esetben történik, ha a biztosítótársaság tartalékának értéke elérte az adózási szintet, illetve e szint felett nyereséges helyzetben van, vagyis amikor

$$R_\Gamma(t) = \max\{R_\Gamma(u) : u \leq t; R^\Gamma\} \tag{10}$$

Ekkor a befolyó díjak γ hányadát befizetik adóként, vagyis időegységenként az állam $\gamma \cdot c$ bevételre tesz szert és a fennmaradó $(1 - \gamma) \cdot c$ rész kerül a biztosítótársaság kasszájába. Ellenkező esetben a tartalék értéke a befolyó díjak teljes intenzitásával növekszik, és az állam adóbevétele ekkor nem változik.

Az effajta adóztatási politika, ha nem is pontosan az ismertetett módon, de az üzleti életben megtalálható, hiszen a társaságok veszteségeiket számviteli eljárások során elszámolhatják későbbi bevételük terhére, így adót csak a kiegyenlítés után keletkező bevételeikből fizetnek.

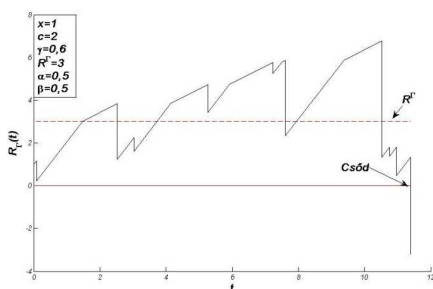
A fent definiált adóztatás során a befizetett adó értéke a sztochasztikus alapfolyamattól, illetve a véletlentől függő $T_{\Gamma}(x)$ -től, vagyis az adófizetés melletti tönkremenési időtől függ, így egy sztochasztikus folyamat, emiatt az inflációval kiigazított várható értékét vizsgáljuk, amely a következőképpen írható fel (Albrecher & Hipp, 2007):

$$\nu(x, \gamma, R^{\Gamma}) = E\left(\int_0^{T_{\Gamma}(x)} e^{-\delta t} d\Gamma(t)\right). \quad (11)$$

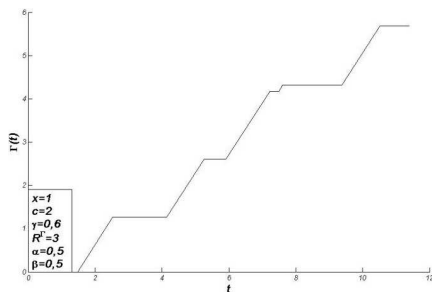
A korábbiakhoz hasonlóan a tönkremenés valószínűsége azon esemény bekövetkezésének az esélye, hogy adófizetés mellett elfogy a tartalék. E valószínűsége Albrecher és Hipp analitikus formulát adtak azon esetben, amikor mind az időközök, mind a kárigények eloszlása exponenciális, valamint $R^{\Gamma} = x$, vagyis a társaság az indulásától kezdve a nyereséges helyzetekben adót fizet (Albrecher & Hipp, 2007).

A 4-5. ábrákon az adófizetéssel bővített kockázati folyamat egy realizációját mutatjuk be. Az ábrák egyazon realizáció különböző részfolyamatait mutatják. A paraméterek a következők voltak: a kezdőtőke értéke $x = 1$, a befolyó díjak mértéke időegységenként $c = 2$, az exponenciális eloszlások paraméterei $\alpha = 0,5$ és $\beta = 0,5$ volt. A szimuláció során 60%-os adókulcsot alkalmaztunk, vagyis γ értékét 0,6-ra állítottuk a jobb illusztráció érdekében. Az adózási szint $R^{\Gamma} = 3$ volt.

A 4. ábrán az adófizetés melletti kockázati folyamatot tüntettük fel. Látható, hogy adófizetés esetén, amint a tartalék eléri az adózási szintet, illetve ezután a korábbi maximális értékét, a következő káreseményig a tartalék $(1 - \gamma) \cdot c$ -vel nő időegységenként. Ekkor az 5. ábrán látható nominális adó értéke $\gamma \cdot c$ meredekséggel nő. Ha a tartalék a korábbi maximuma alatt marad, akkor nincs adófizetés.



4. ábra. A tartalék időbeli változása adófizetéssel bővített folyamat esetén



5. ábra. A nominális adó időbeli változása adófizetéssel bővített folyamat esetén

3 Összetett modell

3.1 Az összetett modell és a többszempontú biztosítási célfüggvény

A továbbiakban olyan modellt vizsgálunk, amelyben mind adó-, mind osztalékfizetés történik. Bár az irodalomban külön-külön mind az adófizetést, mind az osztalékfizetést vizsgálták, nincs tudomásunk olyan modellről, amely az adó- és az osztalékfizetést egyszerre kezelné.

Jelölje továbbra is $D(t)$ a nominális osztalék, míg $\Gamma(t)$ a nominális adó értékét. Ekkor az összetett modell esetében a pénzügyi tartalék értéke a t időpontban:

$$R_{(\Gamma,D)}(t) = U(t) - D(t) - \Gamma(t), \quad t \geq 0. \quad (12)$$

A tönkremenési idő alatt — amelyet $T_{(\Gamma,D)}(x)$ -szel jelölünk — az eddigiekhez hasonlóan azt a legkorábbi időpontot értjük, amikor a tartalék értéke negatívvá válik; a tönkremenés valószínűsége pedig ezen esemény bekövetkezésének a valószínűsége.

A továbbiakban főként a következő célfüggvényt vizsgáljuk, s ennek keressük a maximumát:

$$W(x, D, \gamma, R^\Gamma) = E \left(\Lambda_1 \int_0^{T_{(\Gamma,D)}(x)} e^{-\delta t} dD(t) + \Lambda_2 \int_0^{T_{(\Gamma,D)}(x)} e^{-\delta t} d\Gamma(t) + \Lambda_3 \int_0^{T_{(\Gamma,D)}(x)} e^{-\delta t} dt \right). \quad (13)$$

A tulajdonosok számára kifizetett osztalék várható értékét Albrecher és Thonhauser 2007-ben vizsgálták (Albrecher & Thonhauser, 2007) és az általuk elemzett függvény $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ speciális esete $\gamma = 0$, $\Lambda_3 \in R_0^+$, $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = 0$ választás mellett. $\gamma = 0$ biztosítja, hogy nem történik adófizetés.

A $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ célfüggvényben a biztosítási piac három főbb szereplőjének érdekét megtestesítő mennyiségek várható értéke szerepel súlyozva, ahol a nemnegatív súlyokra igaz, hogy összegük egy, azaz $0 \leq \Lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = 1$. A súlyok egymáshoz viszonyított aránya az egyes szereplők érdekeinek fontosságát mutatja. A célfüggvényben az első tag a vizsgált biztosítótársaság tulajdonosai részére kifizetett diszkontált osztalék várható értékének Λ_1 -szerese. Az összeg második tagja az államnak befizetett diszkontált adó várható értéke Λ_2 -vel súlyozva. Mivel az állam a beszedett adókból közjavakat állít elő, közjavakat biztosít, amelyből mind az ügyfelek, mind a tulajdonosok részesülnek, ezért ez mindenki számára valamekkora előnnyel jár. Másrészt azonban a biztosítótársaság megadóztatása a tulajdonosokat és az ügyfeleket negatívan érinti, hiszen az állam pénzt von el a biztosító tartalékából, így hamarabb történik esetlegesen csőd, illetve az osztalék értéke is csökken mind az adózás, mind a korábban bekövetkező esetleges csőd miatt. Az adó effajta hatása megjelenik a diszkontált osztalék és a tönkremenési idő várható értékében is, csökkentve azt. A célfüggvény utolsó tagja a biztosítótársaság működését méri oly módon, hogy a társaság későbbi

időben történő működtetését egyre kisebb mértékben veszi figyelembe. Ezt értelmezhetjük úgyis, mintha minden időegység alatt a társaság működése 1 pénzegység hasznot jelentene az ügyfelek számára, és ennek az összegnek a diszkontált értékét szerepeltetjük a célfüggvényben súlyozva. Megjegyezzük, hogy diszkontálás miatt a harmadik tag akkor is végessé válik, ha a tönkremenési idő végtelen. Mivel jelen esetben a biztosítási piac szereplőinek érdekeit egyesítjük, az így értelmezett $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ függvényt többszem-pontú biztosítási célfüggvénynek nevezzük.

Mivel nem ismerünk analitikus formulákat $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ értékeire, cik-künk következő részében Monte-Carlo szimuláción alapuló, általunk kidolgozott programok segítségével mutatjuk be az adófizetés és a küszöb stratégia szerinti osztalékfizetés esetében az egyes függvények alakját, értelmezzük a kapott eredményeket, valamint szimulációs módszeren alapuló numerikus eljárás felhasználva elvégezzük bizonyos paraméterekben az optimalizálást.

3.2 Küszöb osztalékfizetési stratégia adófizetés mellett

Ebben a részben a küszöb osztalékfizetési stratégia melletti adófizetés kérdését elemezzük. Miután definiáltuk és bemutattuk a folyamatot, megvizsgáljuk egyes változók hatását, értelmezzük a kapott eredményeket, végül néhány példát mutatunk a $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ függvény maximalizálására.

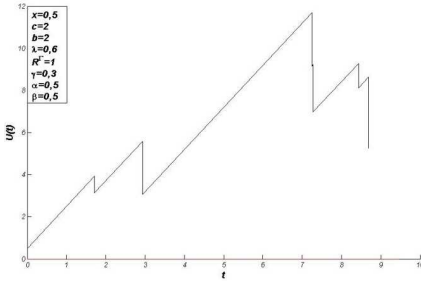
Küszöb stratégia esetén a tartalék szintjétől függően több esetet is meg kell különböztetnünk. Ha $R_{(\Gamma, D)}(t) < b$ és $R_{(\Gamma, D)}(t) < \max\{R_{(\Gamma, D)}(u) : u \leq t; R^\Gamma\}$ teljesül, a befizetett biztosítási díjak teljes egésze a pénzügyi tartalék értékét növeli, a biztosítótársaság sem adó-, sem osztalékfizetési helyzetben nincs, így a kárrendezéseken felül egyéb kifizetés nem történik. Ha a társaság adókötelessé vált és nyereséges helyzetben van, de a tartalék értéke nem éri el az osztalékfizetési korlátot, azaz a $\max\{R_{(\Gamma, D)}(u) : u \leq t; R^\Gamma\} = R_{(\Gamma, D)}(t) < b$ eset áll fenn, akkor az adófizetés miatt a biztosítónak csak a befolyó díjak $(1 - \gamma)$ hányada jut, a befizetett adó nominális értéke időegységenként $\gamma \cdot c$ -vel nő.

Ha $b \leq R_{(\Gamma, D)}(t) < \max\{R_{(\Gamma, D)}(u) : u \leq t; R^\Gamma\}$, vagyis a tulajdonosok részére osztalékot fizetnek, de adófizetés nem történik, akkor a tulajdonosok időegységenként nominálisan $\lambda \cdot c$ osztalékhoz jutnak, emiatt a kasszában lévő tartalék értéke csak $(1 - \lambda) \cdot c$ -vel nő. Azonban, ha $b \leq R_{(\Gamma, D)}(t)$ és az $R_{(\Gamma, D)}(t) = \max\{R_{(\Gamma, D)}(u) : u \leq t; R^\Gamma\}$ eset áll fenn, vagyis egyszerre történik adó- és osztalékfizetés, nem egyértelmű a változás. Feltesszük, hogy az állam megkerülhetetlenül tudja érdekeit érvényesíteni, így először adófizetés történik. Emiatt vizsgálnunk kell, hogy ezen kötelezettség teljesítése után a befolyó díjak meghaladják-e az osztalékfizetés esetén érvényes tartaléknövekedési ütemet, vagy sem. Ha az $(1 - \lambda) \leq (1 - \gamma)$ eset áll fenn, az államnak befizetett nominális adó értéke $\gamma \cdot c$ -vel, az osztaléké $(\lambda - \gamma) \cdot c$ -vel, míg a biztosítótársaság tartaléka időegységenként $(1 - \lambda) \cdot c$ -vel növekszik. Ellenkező esetben (vagyis ha $(1 - \gamma) < (1 - \lambda)$) az adó befizetése után a biztosítótársaság nem jut annyi szolgáltatási díjhoz, hogy annak egy részét kifizethetné osztalékként. Ekkor az eddig kifizetett osztalék értéke változatlan

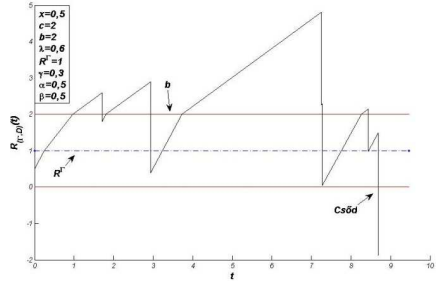
marad, az adó nominális értéke azonban $\gamma \cdot c$ -vel, míg a pénzügyi tartalék értéke $(1 - \gamma) \cdot c$ -vel nő.

A küszöb stratégia azon eseteiben, amikor $\lambda \neq 1$, bár közgazdaságilag nem logikus, matematikai szempontból akár meg is engedhetjük, hogy az osztalékfizetési korlát kisebb legyen, mint az adózási szint. Ekkor a későbbiek során történhet adófizetés, hiszen osztalékfizetés mellett is növekszik a tartalék értéke, s elérheti az adófizetési korlátot.

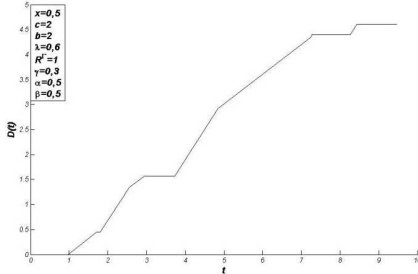
A 6-9. ábrákon bemutatjuk a folyamat egy lehetséges realizációját.



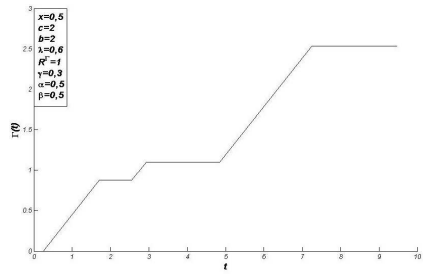
6. ábra. A tartalék alakulása adó- és osztalékfizetés nélkül



7. ábra. A tartalék alakulása adó- és osztalékfizetés esetén



8. ábra. A nominális osztalék alakulása



9. ábra. A nominális adó alakulása

A fenti ábrák mindegyike egy realizáció különböző részfolyamatait mutatja. A beállított paraméterek a következők voltak: $x = 1$, $c = 2$, $b = 2$, $\lambda = 0,6$, $\gamma = 0,3$, $R^\Gamma = 1$. Az exponenciális eloszlások paramétereit $\alpha = 0,5$ és $\beta = 0,5$ -nek választottuk.

A 7. ábrán a biztosítótársaság tartalékának változását ábrázoltuk. Mivel az adózási szint alacsonyabban van, mint az osztalékfizetési korlát, így azt hamarabb éri el a tartalék értéke. A $t = 0,25$ időpillanattól kezdve történik adófizetés, így a 9. ábrán feltüntetett $\Gamma(t)$ függvény értéke $\gamma \cdot c$ -vel, míg $R_{(\Gamma,D)}(t)$ értéke $(1 - \gamma) \cdot c$ -vel növekszik időegységenként $t = 0,9643$ -ig, amikortól is osztalékfizetés is történik. Az időegységenként befolyó díjak adófizetés után fennmaradó részéből, mivel annak értéke nagyobb, mint osztalékfizetés mellett a tartalék növekedési üteme, $(\lambda - \gamma) \cdot c$ összeget kifizetnek osztalékként, amelynek alakulását a 8. ábrán láthatjuk. A $t = 3,731$ időponttól

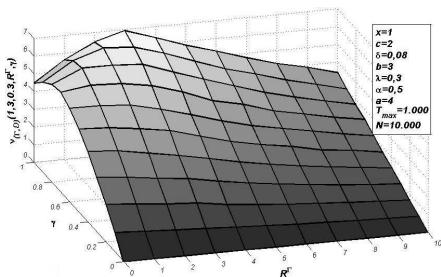
ismét történik osztalékfizetés, ám mivel a tartalék értékének korábbi maximuma az e pontbeli tartalék értékénél magasabban van, így adófizetés nem történik. Ez csak $t = 4,854$ -től történik meg ismét, amikor eléri a tartalék értéke annak korábbi maximumát, így a nominális osztalék növekedési üteme lecsökken, azért látható az ábrán a törés. A csőd $t = 8,685$ -nél következik be. A 6. ábrán az alapfolyamatot tüntettük fel, amikor sem adó-, sem osztalékfizetés nem történik.

A továbbiakban az adózási szint és az adókulcs változásának hatását járjuk körbe. A bemutatásra kerülő ábrák egyazon futtatás eredményei, amelyek paraméterei a következők voltak: $x = 1$, $c = 2$, $\delta = 0,08$, $b = 3$, $\lambda = 0,3$, $T_{\max} = 1000$, $N = 10000$. Itt T_{\max} jelöli azt az időt, ameddig az egyes realizációkat maximálisan vizsgáljuk, s N darab realizációból számítottuk ki az egyes függvényértékeket. Az időközök eloszlása exponenciális volt $\alpha = 0,5$ paraméterrel, míg a kárigények $a = 4$ paraméterű Pareto-eloszlásból származtak, azaz

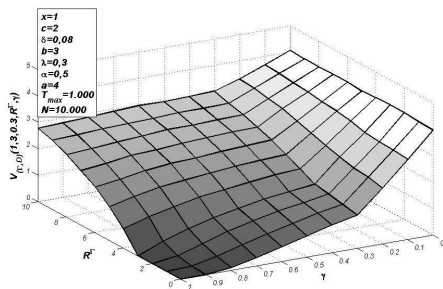
$$G(y) = \begin{cases} 1 - \frac{a^4}{(y+a)^3}, & \text{ha } 0 \leq y \\ 0, & \text{ha } y < 0. \end{cases}$$

A 10. ábrán az összetett modell esetén a diszkontált adó várható értékét megadó $\nu_{(\Gamma, D)}(1, 3, 0, 3, \gamma, R^\Gamma)$ függvényt ábráztuk R^Γ és γ függvényében. Látható, hogy a $\gamma = 1$ és $R^\Gamma = 3$ pontban a függvénynek maximuma van. Ennek oka, hogy a $3 = b < R^\Gamma$ esetekben a tartalék értéke előbb éri el az osztalékfizetési korlátot, mint az adózási szintet, illetve a korábbi maximális értékét, így az osztalékfizetési korlát elérése után annak értéke csak $(1 - \lambda) \cdot c$ intenzitással növekszik az osztalékfizetés miatt. A tartalék értékének lassabb növekedési üteme miatt így kevesebbszer és átlagosan időben később történik adófizetés. A vizsgált esetben a diszkontált adó jelenértéke 100%-os adókulcs mellett maximális, azonban ez nem jelenti azt, hogy a társadalom számára is ez lenne az optimális.

A diszkontált osztalék várható értékét megadó $V_{(\Gamma, D)}(1, 3, 0, 3, \gamma, R^\Gamma)$ függvényt a 11. ábrán tüntettük fel az adókulcs és az adózási szint függvényében. Megállapíthatjuk, hogy ennek értéke γ -ban szigorúan monoton csökkenő, vagyis több osztalék kerül jelenértékben kifizetésre, ha csökken az adókulcs.



10. ábra. A diszkontált adó várható értéke az adózási szint és az adókulcs függvényében



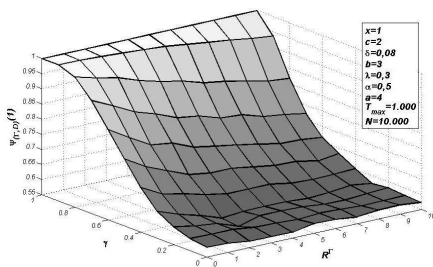
11. ábra. A diszkontált osztalék várható értéke az adózási szint és az adókulcs függvényében

Ekkor a befizetett díjak egysége γ értékének csökkenése miatt kisebb adókulcs alá esik, így egyidejű adó- és osztalékfizetés esetén az állam kevesebbet von el a társaságtól, a befizetett díjak nagyobb részét fizethetik ki a tulajdonosok számára. Megállapíthatjuk továbbá az ábra alapján, hogy $\gamma \in (0, 1)$ esetén az osztalék jelenértéke az adózási szint növekedésével monoton nő, hiszen így csak magasabb tartalékszint elérése után válik a biztosító adókötelessé. A $\gamma = 0$ esetben nem történik adófizetés, így a $V_{(\Gamma, D)}(1, 3, 0, 3, \gamma, R^\Gamma)$ függvény értéke változatlan. Amennyiben $\gamma = 1$, az $R^\Gamma \leq b = 3$ esetekben nem fizetnek sosem osztalékot, hiszen előbb éri el a biztosítótársaság tartaléka az adózási szintet (amelyet $\gamma = 1$ miatt nem haladhat meg), mint az osztalékfizetési korlát értékét.

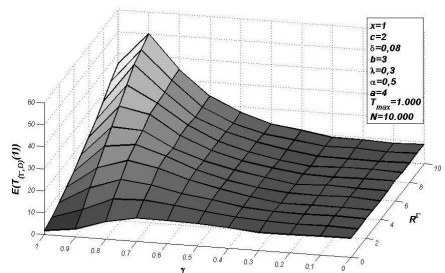
A 12. ábrán a tönkremenés valószínűségét megadó $\Psi_{(\Gamma, D)}(1)$ függvényt ábrázoltuk. Adott paraméterek mellett a tönkremenés valószínűsége monoton növekvő γ -ban, vagyis nagyobb adókulcs mellett nagyobb valószínűséggel megy csődbe a társaság, valamint az adózási szint növekedésével $\Psi_{(\Gamma, D)}(1)$ értéke monoton csökken, hiszen magasabb tartalék felhalmozása után válik a társaság adókötelessé, így kisebb eséllyel fog el a tartalék.

Az $E(T_{(\Gamma, D)}(1) \cdot 1_{T_{(\Gamma, D)}(1) < \infty})$ függvényt, vagyis a véges tönkremenési idő várható értékét ábrázoltuk a 13. ábrán az adókulcs és az adózási szint függvényében egységnyi kezdőtőke mellett. A tönkremenési idő várható értéke egészen $\gamma = 0, 9$ -ig növekvő az adókulcs függvényében. Ennek oka, hogy ezekben az esetekben a tönkremenés valószínűsége különbözik egytől, és a csőd várhatóan akkor történik meg, amikor még nem halmozódott fel akkora tartalék, hogy a nagyobb kárigényeket is ki tudja a társaság elégténi. Ha azonban $\gamma = 1$, a tönkremenés valószínűsége 1. Ekkor az előző esetekhez képest a tartalék értéke nem nőhet R^Γ fölé, és emiatt a csőd átlagosan korábban következik be. $E(T_{(\Gamma, D)}(1) \cdot 1_{T_{(\Gamma, D)}(1) < \infty})$ értéke az adózási szint monoton növekvő függvénye.

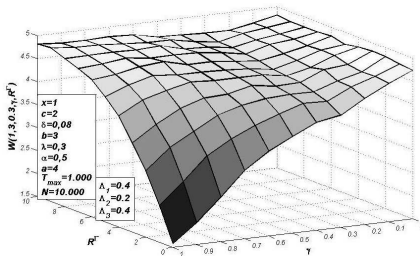
Ezen szimulációból származó utolsó két bemutatásra kerülő ábránk a $W(1, 3, 0, 3, \gamma, R^\Gamma)$ függvényt mutatja eltérő súlyok esetén (14. a-b ábrák).



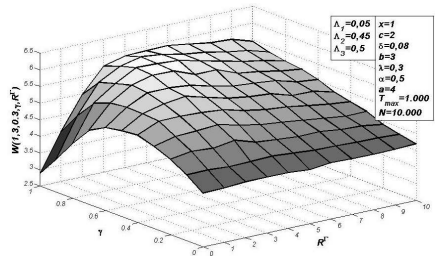
12. ábra. A tönkremenés valószínűsége az adózási szint és az adókulcs függvényében



13. ábra. A tönkremenési idő várható értéke az adózási szint és az adókulcs függvényében



14.a ábra. A többszemontú biztosítási cél-függvény az adózási szint és az adókulcs függvényében $\Lambda_1 = 0,4$, $\Lambda_2 = 0,2$, $\Lambda_3 = 0,4$ súlyok alkalmazásával



14.b ábra. A többszemontú biztosítási cél-függvény az adózási szint és az adókulcs függvényében $\Lambda_1 = 0,05$, $\Lambda_2 = 0,45$, $\Lambda_3 = 0,5$ súlyok alkalmazásával

A 14.a ábrán a súlyok a következők voltak: $\Lambda_1 = 0,4$, $\Lambda_2 = 0,2$, $\Lambda_3 = 0,4$. Az alkalmazott súlyoknak köszönhetően az ábra alakjában hangsúlyos a diszkontált osztalék várható értékének alakja. A 14.b ábrán látható, hogy a megadott súlyok miatt, amelyek rendre $\Lambda_1 = 0,05$, $\Lambda_2 = 0,45$ és $\Lambda_3 = 0,5$ voltak, a $W(1,3,0,3,\gamma,R^\Gamma)$ függvénynek az ábrázolt változóiban belső optimuma van. Ez azzal magyarázható, hogy legnagyobb súllyal az ügyfelek érdekét vettük figyelembe.

Legvégül bemutatunk három példát a többszemontú biztosítási cél-függvény értékét maximalizáló b^* , λ^* , R^{Γ^*} és γ^* változók értékére, amelyeket —analitikus megoldások hiányában— szimulációs eljárás alapján szimplex módszerrel kerestünk meg.

Az optimalizálás során különválasztottuk a $\lambda \neq 1$ és a $\lambda = 1$ eseteket. Az utóbbinál csak olyan eseteket vizsgáltunk, amikor az osztalékfizetési korlát nagyobb, mint az adófizetési korlát, mert csakis ilyen esetekben történhet adófizetés. Emiatt az optimalizálást két részben végeztük el: megkerestük $\lambda \neq 1$ és $\lambda = 1$ esetén az optimumot, majd a kapott eredmények közül a nagyobb cél-függvény-értékhez tartozó maximumhelyet tekintettük a megoldásnak.

A bemutatásra kerülő három példában a közös paraméterek a következők voltak: $x = 1$, $c = 2$, $\delta = 0,08$, $T_{\max} = 1000$, $N = 100000$. Az alkalmazott eloszláspárok várható értéke azonos volt, ám a többszemontú biztosítási cél-függvényben szereplő súlyokon változtattunk. A kapott eredményeket az 1. táblázatban láthatjuk. A bemutatott eredmények alapján látható, hogy az optimális paraméterértékek a többszemontú biztosítási cél-függvény súlyainak változtatásával jelentősen módosulnak.

Időközök eloszlása	Kárigények eloszlása	Λ_1	Λ_2	Λ_3	λ^*	b^*	γ^*	R^{Γ^*}
Exp(0,5)	Exp(0,5)	0,35	0,35	0,3	1	8,6276	0,4168	4,9352
Exp(0,5)	Pareto(4)	0,35	0,35	0,3	1	7,5139	0,3505	1,5107
Exp(0,5)	Pareto(4)	0,05	0,05	0,9	0,8699	19,7875	0,9096	18,6219

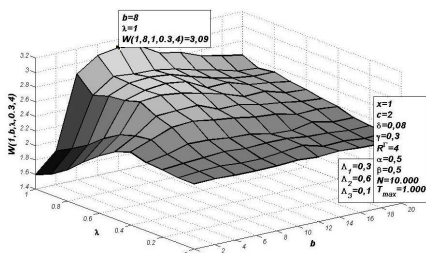
1. táblázat. Az optimális paraméterek közelítő értéke adófizetés és küszöb osztalékfizetési stratégia esetén

4 Osztalékfizetési stratégiák összehasonlítása a többszemponútú biztosítási célfüggvény segítségével

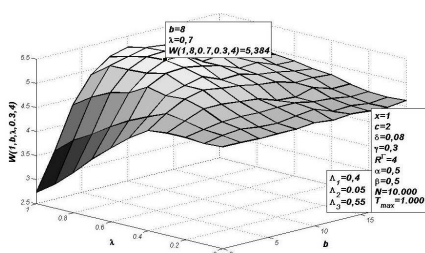
Ebben a részben a többszemponútú biztosítási célfüggvény segítségével szemléletesen is megvizsgáljuk, hogy az állam adott adópolitikája mellett a konstans korlát (amikor $\lambda = 1$) vagy a küszöb osztalékfizetési stratégia az optimális $\lambda < 1$ értékkel.

A következőkben ugyanazon szimulációból származó ábrák segítségével mutatjuk be, hogy milyen hatása van a célfüggvényben szereplő súlyok megválasztásának az optimális osztalékfizetési stratégia típusára, valamint a többszemponútú biztosítási célfüggvény értékére.

A szimuláció során exponenciális eloszlást használtunk $\alpha = 0,5$ és $\beta = 0,5$ paraméterrel, illetve az egyéb paraméterek a következők voltak: $x = 1$, $c = 2$, $\delta = 0,08$, $\gamma = 0,3$, $R^F = 4$, $N = 10000$, $T_{\max} = 1000$.



15.a ábra. A többszemponútú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0,3$, $\Lambda_2 = 0,6$, $\Lambda_3 = 0,1$ súlyok alkalmazásával

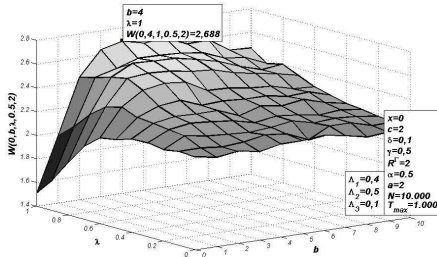


15.b ábra. A többszemponútú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0,4$, $\Lambda_2 = 0,05$, $\Lambda_3 = 0,55$ súlyok alkalmazásával

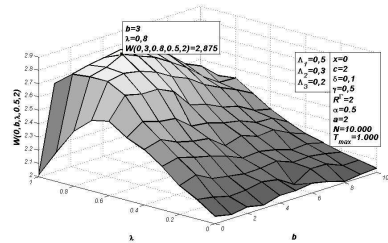
A 15.a ábrán a többszemponútú biztosítási célfüggvényben szereplő súlyok $\Lambda_1 = 0,3$, $\Lambda_2 = 0,6$, $\Lambda_3 = 0,1$. Ekkor az optimum $\lambda = 1$ -ben található, vagyis konstans korlát osztalékfizetési stratégia szerint történik az osztalékfizetés. A 15.b ábrán a következő súlyok mellett tüntettük fel a $W(1, b, \lambda, 0,3, 4)$ függvény értékét: $\Lambda_1 = 0,4$, $\Lambda_2 = 0,05$, $\Lambda_3 = 0,55$. Mivel a Λ_i súlyok egymáshoz viszonyított értékei az előzőekhez képest változtak, eltolódott a többszemponútú biztosítási célfüggvény optimuma. Ebben az esetben már nem optimális a konstans korlát stratégia, hiszen $\lambda \neq 1$, így a küszöb osztalékfizetési stratégiához jutunk $\lambda < 1$ -gyel. Az ábrákon feltüntettük az optimumok közelítő értékeit is.

A kapott eredmény azért különösen érdekes, mert exponenciális eloszlású időközök és kárigények mellett a kizárólag osztalékfizetési modell esetében a konstans korlát osztalékfizetési stratégia a megengedett stratégiák halmaza optimális (Gerber, 1969), míg az összetett modell esetén ez nem mindig igaz, mint a példa is mutatja, hiszen a többszemponútú biztosítási célfüggvényt maximalizáló optimális osztalékfizetési stratégia típusa függ a

súlyok megválasztásától. A megállapításunk más eloszláspárokra is igaz, például exponenciális időközök és Pareto-eloszlású kárigények esetén az alábbi ábrákon is látható ez.



16.a ábra. A többszemponútú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0,4$, $\Lambda_2 = 0,5$, $\Lambda_3 = 0,1$ súlyok alkalmazásával Pareto-eloszlású kárigények esetén



16.b ábra. A többszemponútú biztosítási célfüggvény az osztalékfizetési korlát és az osztalékfizetési hányad függvényében $\Lambda_1 = 0,5$, $\Lambda_2 = 0,3$, $\Lambda_3 = 0,2$ súlyok alkalmazásával Pareto-eloszlású kárigények esetén

5 A jövedelmezőségi index vizsgálata

A tulajdonosok érdekeinek vizsgálata során nem csak a diszkontált osztalék várható értéke lehet a vizsgálat tárgya, hanem annak a befektetett tőkéhez viszonyított aránya is. Ez esetben nem a diszkontált osztalék várható értékét maximalizáljuk, hanem a tőkeráfordításokat is figyelembe vesszük. Ezt végezhetjük a jövedelmezőségi index segítségével, amely a befektetett tőke egységére jutó diszkontált osztalék nagyságát adja meg. E mutatóban való maximalizálással meghatározhatjuk a befektetett tőke azon szintjét, amely a legnagyobb megtérülési értékkel bír.

Feltételezünk egy, a biztosítótársaság létrehozásához minimálisan szükséges pénzmennyiséget, amit a továbbiakban FC-vel jelölünk (PSZÁF, 2010), amelyen felül még a tulajdonosok további tőkét fektetnek be, ez utóbbi a kockázati folyamat x kezdőtőkéje.

Az adófizetést is figyelembe vevő összetett modellünk esetén a diszkontált osztalék várható értékét a többszemponútú biztosítási célfüggvény a $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$ súlyok esetén adja meg. Jelöljük ezen súlyok esetén a $W(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ értékét $W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ -val. Ekkor a jövedelmezőségi index (profitability index, PI) az alábbi módon számítható (Clayman et al. 2008, p. 57.):

$$PI = \frac{W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)}{x + FC}.$$

Eszerint a részvényesek szempontjából kívánatos a biztosítótársaság létrehozása, ha $PI > 1$, vagyis ha az egységnyi befektetésre egységnyinél több osztalék jut.

Rögzítsük az adófizetési szintet és az adókulcsot, mivel ezeket az állam határozza meg, és vizsgálódjunk most is a küszöb osztalékfizetési stratégiák

halmazán. Mivel a tulajdonosok a λ osztalékfizetési ráta, valamint a b osztalékfizetési korlát és az x kezdőtőke megválasztásába szólhatnak csupán bele, ezért vizsgáljuk a PI mennyiség függését λ -tól, b -től és x -től.

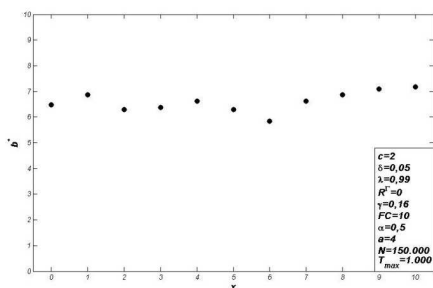
Az első megjegyzésünk az, hogy rögzített x érték mellett PI viselkedését $W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ viselkedése határozza meg. Bár az osztalékfizetési ráta növelése általában növeli a diszkontált osztalék várható értékét, $\lambda = 1$ -ben a $W^1(x, D, \gamma, R^\Gamma)$ függvénynek szakadása, ugrásszerű csökkenése van, és vele együtt természetesen a jövedelmezőségi indexnek is. Ennek illusztrálására mutatjuk a 2. táblázatot. A folyamat paraméterei az alábbiak voltak: $\gamma = 0,16$, $R^\Gamma = 0$, $\delta = 0,05$, $c = 2$, $b = 6$, $\alpha = 0,5$, $a = 4$, $x = 1$, $T_{\max} = 1000$, $FC = 5$, $N = 100000$.

λ	0,9	0,99	0,999	1
PI	1,4254	1,4276	1,4286	1,2847

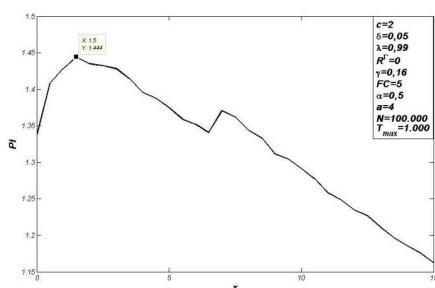
2. táblázat. A jövedelmezőségi index az osztalékfizetési hányad függvényében adófizetés és küszöb osztalékfizetési stratégia szerinti osztalékfizetés esetén

Ez az érdekes jelenség az alábbi gondolatmenettel támasztható alá: $\lambda = 1$ esetén a tartalék nagysága b fölé nem megy, viszont a b szintet elérve az adófizetési kötelezettség újra jelentkezik, ezáltal a tulajdonosoknak kifizethető pénzösszeg kevesebb, mint ha adófizetési kötelezettség nem lenne. Ha viszont $\lambda < 1$, de közel van 1-hez, akkor a tartalék b fölé tud kerülni, s ha valaha b fölé került, akkor mivel az osztalékfizetési hányad közel 1, ezért amint a tartalék a b értéket eléri, csaknem az összes díjbefizetés az osztalék értékét gyarapítja, adót viszont a korábbi maximális tartalék eléréséig nem kell fizetni.

Adófizetés nélküli modellt vizsgálva Gerber és Shiu bebizonyították, hogy a küszöb osztalékfizetési stratégia esetén exponenciális eloszlású kárigények és Poisson kárfolyamat esetén az optimális b osztalékfizetési korlát értéke nem függ a kezdőtőke értékétől (Gerber & Shiu, 2006). Ezen speciális esetben a szerzők analitikusan meg tudták adni a diszkontált osztalék várható értékét, és azt tapasztalták, hogy a megadott formula nem függ a kezdőtőkétől. Mivel esetünkben (adó- és osztalékfizetés mellett) analitikus formula nem áll rendelkezésre a diszkontált osztalék várható értékére, ezért szimulációs vizsgálatokat végeztünk arra vonatkozólag, hogy az optimális osztalékfizetési korlát hogyan függ a kezdőtőkétől. Azt tapasztaltuk, amennyiben az osztalékfizetési rátát rögzítjük, akkor az optimális osztalékfizetési korlát (b^*) a szimuláció pontatlanságából származó hibától eltekintve állandó. Ennek illusztrálására mutatjuk be a 17. ábrát. A kárfolyamat Poisson-folyamat volt $\alpha = 0,5$ paraméterrel, a kárigények eloszlását Pareto-eloszlásnak választottuk $a = 4$ paraméterrel, az adófizetési ráta $\gamma = 0,16$, az adófizetési szint $R^\Gamma = 0$, $\lambda = 0,99$, $\delta = 0,05$, $c = 2$, $FC = 5$, $T_{\max} = 1000$, a szimulációk száma $N = 150000$.



17. ábra. Az optimális osztalékfizetési korlát a kezdőtőke függvényében



18. ábra. A jövedelmezőségi index a kezdőtőke függvényében

Figyelembe véve a jövedelmezőségi index megadására vonatkozó formulát, ugyanez mondható el a jövedelmezőségi indexről is rögzített osztalékfizetési ráta mellett, azaz az optimális osztalékfizetési korlát értéke nem függ a kezdőtőkétől. Vagyis az osztalékfizetési ráta rögzítése után a két változóban történő optimalizálás két lépcsőben is elvégezhető: rögzített kezdőtőke (pl. $x = 0$) esetén megkeressük az optimális b^* korlátot, majd ezen b^* rögzítése mellett egy változóban (x -ben) maximalizáljuk PI értékét. A jövedelmezőségi indexet x függvényében a $b = 6,5$ (ami a fenti b^* értékek átlaga) választás és az egyéb paraméterek változatlanul hagyása mellett a 18. ábra mutatja.

Az előző paraméterértékek esetén $b = 6,5$ választással az optimális x értéke közelítőleg $x^* = 1,5$ -nak adódott, a maximális jövedelmezőségi index értéke pedig $PI = 1,444$.

A λ , x , b változókból háromváltozós optimalizálás eredménye a szimplex módszer alkalmazásával $N = 100000$ szimuláció esetén a következő lett: az optimális paraméterértékek $\lambda^* = 0,98$; $b^* = 6,4$; $x^* = 1,68$ -nak adódtak, és az optimum értéke $PI = 1,438$. A csekély eltérést a szimuláció hibája indokolja.

6 Összefoglalás

Dolgozatunk témája a biztosítótársaság tartalékképzési folyamatának vizsgálata volt adó- és osztalékfizetés mellett. Kiindulópontunk egy olyan alapmodell volt, amely szerint a biztosítóhoz véletlentől függő időpontokban szintén véletlentől függő kárigények érkeznek be, amelyek kifizetését az időben állandó intenzitással beérkező bevételekből fedez. Bemutattuk, hogy az alapmodell — a szakirodalom alapján — miként bővíthető adó- vagy osztalékfizetéssel. Ezt követően összevontuk az adó- és az osztalékfizetést egyetlen modellbe. Ezáltal egy, a valósághoz közelebb álló modellhez jutottunk, amelyet a szakirodalomban eddig még nem vizsgáltak. E modell esetén bevezettünk egy új célfüggvényt, amely mind az állam, mind az ügyfelek, mind a biztosítótársaság tulajdonosainak érdekeit figyelembe veszi. Ez a célfüggvény így a biztosítótársaság működése révén létrejövő, több szereplő érdekét figyelembe vevő függvény, emiatt többszemponútú biztosítási célfüggvénynek neveztük.

Az összetett modell esetében —mivel nem ismerünk analitikus megoldást— az optimum meghatározására számítógépes szimuláción alapuló numerikus eljárásokat használó programokat dolgoztunk ki, amelyek rendelkeznek a szimuláció azon előnyével, hogy bármely eloszlás esetén alkalmazhatóak.

Összehasonlítottuk adott adópolitika mellett a konstans korlát és a küszöb osztalékfizetési stratégiát az újonnan definiált célfüggvény segítségével. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a többszempontú biztosítási célfüggvény értékét maximalizáló osztalékfizetési stratégia függ az alkalmazott súlyoktól, így nincs általánosan jó választás az optimális stratégiát illetően.

Végezetül megvizsgáltuk a tulajdonosok számára érdekes jövedelmezőségi indexet a tulajdonosok által változtatható paraméterek függvényében és szimuláción alapuló eljárást adtunk a jövedelmezőségi index optimalizálására. Megállapítottuk, hogy a diszkontált osztaléknak és vele együtt a jövedelmezőségi indexnek $\lambda = 1$ -ben ugrásszerű csökkenése van.

Összefoglalásképp elmondható, hogy az új modellel és az új célfüggvénnyel a valósághoz közelebb álló, több szempontot figyelembe vevő, megbízható vizsgálati eszközhöz jutottunk, amit a kapott eredmények egyértelműen igazoltak, így akár egy leendő szakértői rendszer alapjait is képezhetik az általunk kidolgozott programok, elemzési szempontok.

A modell tovább is bővíthető lenne, például a tartalék befektetésével, viszontbiztosítások figyelembe vételével vagy fenyegető csőd esetén tőkebefektetés vagy áthidaló kölcsön alkalmazásával, esetleg bevezethető többkulcsos adórendszer is. Mivel ezeket a tényezőket mi nem építettük be a modellünkbe, ezért a levont következtetések a gyakorlati életben (pl. életbiztosítások esetén) csak korlátozottan alkalmazhatóak.

Irodalom

1. Albrecher, H., Hartinger, J., Tichy, R. (2005). On the Distribution of Dividend Payments and the Discounted Penalty Function in a Risk Model with Linear Dividend Barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*, 103–126.
2. Albrecher, H., Hipp, C. (2007). Lundberg's risk process with tax. *Blätter der DGVM*, 28(1): 13–28.
3. Albrecher, H., Kainhofer, R. (2002). Risk Theory with a Nonlinear Dividend Barrier. *Computing*, 68(4): 289–311.
4. Albrecher, H., Thonhauser, S. (2007). Dividend maximization under consideration of the time value of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41: 163–184.
5. Asmussen, S., Taksar, M. (1997). Controlled Diffusion Models for Optimal Dividend Pay-Out. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20: 1–15.
6. Avanzi, B. (2007). Strategies for Dividend Distribution: A Review. *North American Actuarial Journal*, 13 (2) 217–251.
7. Clayman, M. R., Fridson, M. S., Troughton, G. H. (2008). *Corporate Finance: A Practical Approach*. John Wiley & Sons Inc., New Jersey.
8. Gerber, H. U. (1969). Entscheidungskriterien für den Zusammengesetzten Poisson-Prozess. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaire*s, 2: 185–228.

9. Gerber H. U., Shiu, E. S. W. (2006). On Optimal Dividend Strategies in the Compound Poisson Model. *North American Actuarial Journal*, 10(2): 76–93.
10. Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1): 48–78.
11. Lin, S., Willmot, G.E., Dreikic, S. (2003). The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33 (3) 551-556.
12. Lundberg, F. (1909). *Über die Theorie der Rückversicherung*. Transactions of the VIth International Congress of Actuaries 1: 877–948.
13. Ming, Z., Junyi, G. (2008). Classical risk model with threshold dividend strategy. *Acta Mathematica Scientia*, 28(2): 355–362.
14. Sparre Andersen, E. (1957). On the Collective Theory of Risk in a Case of Contagion between Claims. *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 12: 275–79.
15. PSZÁF (2010). *Biztosító részvénytársaság alapítása*. http://www.pszaf.hu/data/cms548124/Biztos_t__alap_t_s_nak_enged_lyez_se.pdf (2011. október).

INVESTIGATION OF THE SURPLUS PROCESS OF AN INSURANCE COMPANY WITH TAX AND DIVIDEND PAYMENT

The paper deals with modelling of the surplus process of insurance companies. The basic model contains only two elements: the income of the company paid by insured and the outcome paid to the insured on the basis of the claims. Claims occur at random time points and their amounts are random, as well, hence surplus processes are stochastic processes. This basic model has been generalized by taking into account further factors, for example tax or dividend payment. In our paper we present a generalized model which has been developed by us and handles together both tax payment and dividend payment. We introduce a new target function, which respects the interest of the government, the insurance company and the insured people, as well. We analyze this model applying threshold strategy concerning dividend payment. We calculate the values of the investigated functions by Monte-Carlo simulation and we maximize the target function numerically. We also investigated the profitability index and a method is given to find its maximum in the function of the initial surplus and the level of dividend payment.