BOD PÉTER

A Wolfe-féle ún. általánosított lineáris programozásról

Ismeretes, hogy a lineáris programozás (röviden: LP) az operációkutatás egyik legelterjedtebb, a gyakorlatban legszélesebb körben alkalmazott matematikai módszere. Jól kidolgozott algoritmusrendszere és ezek különböző számítógépi realizációi lehetővé teszik jelentős méretű LP feladatok megoldását is. A modellalkotók ezért rendszerint komoly erőfeszítéseket tesznek, hogy saját problémáikat — hacsak lehetséges — mint LP feladatot fogalmazzák meg, vagy legalábbis ilyen természetű feladatok megoldására vezessék vissza.

Ezek a törekvések teljesen érthetők, de kétségtelenül magukban rejtik azt a veszélyt, hogy a modellek látják az igyekezet kárát. Ti. olyan egyszerűsítő feltevések kerülnek a modellekbe, amelyek azok valósághűségét erősen kétségessé teszik és így vitathatókká válnak a modellekből levont következtetések is.

Kétségtelen tény, hogy minden valóságos gazdasági folyamat matematikai modellezésénél bizonyos kompromisszumra van szükség. A gyakorlat szempontjából nyilvánvalóan csak olyan modelleknek van értelmük, amelyek számszerűsíthetők, megoldhatók és a megoldás a rendelkezésre álló számolóberendezéseken gyakorlati szempontból hasznos időn belül kiszámítható. Vagyis minden esetben össze kell egyeztetni a valósághűség és a megoldhatóság követelményeit.

Éppen ebből a szükséges kompromisszumnak a szempontjából van nagy jelentősége a matematikai programozás olyan eredményeinek, amelyek lehetővé teszik a LP technikailag jól kezelhető fegyverzetének a LP alapmodelljénél általánosabb problémák megoldására való eredményes felhasználását. Ilyen jellegű eredmény a Ph. Wolfe-tól származó „általánosított lineáris programozási" (röviden: ÁLP) eljárás [2].

I.

A LP alapfeladata ún. kanonikus alakjában megfogalmazva a következő:[1]

Meghatározandó az $x_1; x_2; \ldots; x_n$ nemnegatív változók olyan értékrendszere, amely eleget tesz a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{b} \tag{1}$$

lineáris egyenletrendszernek és amely mellett a

[1] A cikk olvasóitól feltételezzük a LP alapjainak az ismeretét. Az irodalomjegyzékben felsorolunk néhány magyar nyelvű tankönyvet, illetve tananyagot.

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

lineáris függvény maximális értéket vesz fel.

A feladatban szereplő $\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \ldots; \mathbf{a}_n$; $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok adott, valós számokat tartalmaznak; ezek a feladat numerikus paraméterei.

A feladat megoldása abban áll, hogy megkeressük a változók bizonyos tulajdonságokkal rendelkező (ti. megengedett és a megengedettség korlátain belül maximális célfüggvényértékű) értékeit és meghatározzuk az ehhez tartozó optimális célfüggvényértéket. Nyilvánvaló, hogy mind az optimális program, mind az ezzel elérhető maximális célfüggvényérték a paraméterek függvénye. Azonban adott konkrét LP feladatban a paraméterek értékei rögzítettek.

Fenti LP feladat Wolfe-féle általánosításában megszűnik a paraméterek számszerűen rögzített jellege. A paraméterek vagy egy részük, változókká lesz, amelyek vektoronként és egymástól függetlenül szabadon változhatnak bizonyos megadott korlátok között. Az ÁLP feladat megoldása tehát nem csak az LP-i értelemben vett változók optimális rendszerének meghatározására irányul, hanem a megengedett lehetőségek keretei között kiválasztja a maga számára a legkedvezőbb paraméterértékeket is. A feladat szempontjából természetesen azok a paraméterértékek a legkedvezőbbek, amelyek miközben megengedettek — a lehető legnagyobb célfüggvényérték elérését teszik lehetővé.[2]

Az ÁLP feladat most már precízebb megfogalmazásánál először abból indulunk ki, hogy az alapul szolgáló LP feladat kapacitásvektora és célfüggvény-együtthatói rögzítettek.[3] Feltételezzük, hogy adott annyi nemüres, konvex halmaz, ahány változója van az LP feladatnak. Legyenek ezek $K_i (i = 1, 2, \ldots, \ldots, n)$ és feküdjenek egy olyan dimenziós térben, ahány egyenlete van az LP feladat feltételrendszerének vagyis

$$K_i \subset R^m \qquad \forall\, i\text{-re}.$$

Meghatározandók ezek után az $x_1; x_2; \ldots; x_n$ nemnegatív változók és a $\mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2; \ldots; \mathbf{P}_n$ ismeretlen együtthatóvektorok úgy, hogy

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(a) \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i x_i = \mathbf{b} \\ &(b) \quad \mathbf{P}_i \in K_i \qquad \forall\, i\text{-re} \end{aligned}$$

teljesüljön és $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ maximális legyen.

Vegyük észre, hogy ha minden K_i halmaz egyetlen elemből áll csak $(\mathbf{a}_i)$, az ÁLP feladat közönséges LP feladatra redukálódik.

[2] Parametrikus programozásnak szokták nevezni az olyan jellegű számításokat, amelyekben az optimális program és az optimális célfüggvényérték változásait vizsgálják a paraméterek változásának a függvényében. Célszerű a parametrikus programozást az ÁLP kérdésfeltevésétől megkülönböztetni. Ez utóbbinál ismeretlen paraméterekkel való programozásról van szó.

[3] Ezt a feltevést később feloldjuk.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az ÁLP feladatban szereplő valamennyi halmaz olyan konvex poliéder, amely valamilyen lineáris egyenletrendszer nem negatív megoldásainak a halmazával jellemezhető. Ez annyit jelent, hogy minden K_i halmazhoz tartozik egy F_i feltételrendszer

(3) $$F_i = \{\mathbf{y}^i \mid \mathbf{D}_i\mathbf{y}^i = \mathrm{d}^i; \mathbf{y}^i \geq 0\}$$

és megadható az F_i halmaz és a K_i halmaz elemeinek egy kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendelése. $\mathbf{P}_i \in K_i$ akkor és csak akkor, ha

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m^i \end{bmatrix}$$

megoldása a

$$\sum_{j=1}^{S_i} y_j^i \mathbf{d}_j^i = d^i; \quad y_j^i \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m, \ldots S_i)$$

feltételrendszernek.

A továbbiakban bemutatjuk, hogyan lehet az ÁLP feladat megoldását LP feladatok megoldásának a sorozatára visszavezetni. Ebben a megoldássorozatban felváltva kell 3. típusú feltételekkel bíró LP feladatokat és 2. alakú LP feladatot megoldani. A könnyebb hivatkozás érdekében a 3. alakú feltételrendszerrel rendelkező LP feladatokat a továbbiakban együtthatóvektorokat generáló programoknak, a 2. alakú feladatot alapfeladatnak fogjuk nevezni.

Feltevéseink szerint $K_i \neq \emptyset$ minden i-re, ezért valamennyi generáló programnak van megengedett megoldása. Legyen $\mathbf{y}_0^i$ egy megengedett megoldása F_i-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és jelöljük e megoldás első m komponensét $\mathbf{P}_i^0$-val.

$$\mathbf{P}_i^0 = \begin{bmatrix} y_1^{i_0} \\ y_2^{i_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m^{i_0} \end{bmatrix}$$

A mondottak alapján $\mathbf{P}_i^0$ az i-ik alapfeladatbeli tevékenységi változó megengedett együtthatóvektora. (Vegyük észre, hogy $\mathbf{P}_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ már nem változókat tartalmaz.)

Oldjuk meg ezek után a 2. alatti feladatot $\mathbf{P}_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots. n)$ együtthatókkal. Ez már nem ÁLP, hanem LP feladat. Tételezzük fel, hogy ennek a feladatnak ti.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^0 x_i = \mathbf{b}$$

(4) $$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max!$$

van optimális megoldása.[4]

A 4. alatti feladat optimális megoldását szolgáltató bázist jelöljük $\mathbf{A}_{B^0}$-val. A bázisváltozók értéke az optimális megoldásban: $\mathbf{x}_{B^0} = \mathbf{A}_{B^0}^{-1}\mathbf{b}$ és a célfüggvény maximális értéke:

$$\hat{z}_0 = \mathbf{c}_{B^0}^{*}\mathbf{A}_{B^0}^{-1}\mathbf{b}\,,$$

ahol $\mathbf{c}_{B^0}^{*}$ a bázisváltozók célfüggvényegyütthatóit tartalmazó vektor. A bázis optimalitása miatt:

$$\mathbf{c}_k - z_k = c_k - c_{B^0}^{*}\mathbf{A}_{B^0}^{-1}\mathbf{P}_k^0 \leq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Az alapfeladat így nyert megoldása feltétlenül megengedett. Ugyanis 4.-ben megengedett együtthatóvektorokkal dolgoztunk és ezek választott értékei mellett $\mathbf{x}_{B^0}$ kielégíti az alapfeladat feltételeit, tehát maga is megengedett. Ugyanakkor $\mathbf{x}_{B^0}$ csak az együtthatók konkrétan választott értékeit figyelembevéve optimális. Elképzelhető az együtthatók más megengedett rendszerében ennél magasabb célfüggvényértékű program is.

Ennek a lehetőségnek a vizsgálata érdekében azt kell elemezni, hogy újabb együtthatók generálása kecsegtet-e ilyen lehetőségekkel. Itt használjuk fel azt a feltevést, hogy minden K_i konvex halmaz. Ismeretes ugyanis, hogy egy konvex halmaz tetszőleges véges sok elemének a konvex lineáris kombinációi is hozzátartoznak a halmazhoz. Ha tehát elemzésünkből az derül ki, hogy valamilyen x_i tevékenységnek egy a 4. alatti feladatban nem szereplő megengedett együtthatóvektora $\mathbf{P}_i^1$ révén a célfüggvény javítható, akkor ez azt jelenti, hogy az i-ik tevékenységet a $\mathbf{P}_i^0$ és a $\mathbf{P}_i^1$ valamilyen meghatározott konvex lineáris kombinációjával kell működtetni.

Vizsgáljuk meg, hogy a j-ik generáló program segítségével nyerhető együtthatókkal lehetséges-e az alap-feladat optimális megoldását javítani. Ehhez azt kell vizsgálni, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^0 x_i + \mathbf{P}_j x_j^1 = \mathbf{b}$$

$$(5) \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,; \qquad x_j^1 \geq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_j x_j^1\right) \to \max!$$

LP feladat optimális megoldása jobb-e a 4. alatti feladatáénál. Látható, hogy 4. és 5. egyetlen változóban különböznek csak. Az 5. feladat: kibővített alapfeladat; azonos feltételrendszert és eggyel több változót tartalmaz, mint a 4.

[4] Ez a feltételezés egyáltalán nem magától értetődő. Könnyen előfordulhat, hogy míg 2-nek van optimális megoldása, 4-nek nincs megengedett megoldása sem. Fentiekre ezért még visszatérünk.

alatti. Mivel 4. optimális bázisát ismerjük — egyszerűen eldönthető, hogy x_j^1 bevonása a bázisba hozhat-e javulást 4. optimális megoldásához képest. Ennek érdekében csak a $c_{n+1} - z_{n+1}$ különbség előjelét kell meghatározni. Ha

$$c_{n+1} - z_{n+1} = c_j - \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j \leq 0$$

akkor a 4. feladat optimális megoldása optimális az 5. feladatban is. Ahhoz, hogy 5. optimális megoldása jobb lehessen, mint $\hat{z}_0$, az szükséges, hogy

$$c_j - \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j > 0$$

legyen, vagyis

$$c_j > \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j ,$$

$\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} P_j$ azonban a $\mathbf{P}_j$ vektor ismeretlen komponenseinek lineáris kifejezése. Ahhoz, hogy létezzék olyan további megengedett együtthatóvektor az x_j^1 tevékenységhez, amely mellett 5. optimális megoldása jobb, mint 4.-é — az szükséges, hogy legyen K_j-ben olyan $\mathbf{P}_j$, amelyre

$$\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j < c_j .$$

Vizsgáljuk tehát a $\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j$ lineáris függvény minimumát a j-ik generáló program feltételrendszerén. Ez egy LP feladat. Ha

$$\min (\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j) \geq c_j$$

$$\mathbf{P}_j \in K_j$$

akkor a j-ik generáló program nem képes javításra alkalmas újabb együttható oszlopot generálni. Legyen ezzel szemben

$$\min (\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j) < c_j \quad \mathbf{P}_j \in K_j$$

és alkossa $\mathbf{P}_j^1$ a generáló program optimális megoldását. Ekkor

$$c_j - \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j^1 > 0$$

lévén az

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^0 x_i + \mathbf{P}_j^1 x_j^1 = \mathbf{b}$$

(5′) $$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} ; \qquad x_j^1 \geq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_j x_j^1 \right) \to \max !$$

feladat optimális megoldása (degeneráció mentes esetben) jobb lesz, mint a 4. feladaté.

Legyen az 5′ feladat optimális megoldását meghatározó bázis $\mathbf{A}_{B^1}$ és a megfelelő optimális megoldás bázisváltozói:

$$\mathbf{x}_{B^1} = \mathbf{A}_{B^1}^{-1}\mathbf{b}\,.$$

Ezek között x_j^1 biztosan szerepel; x_j vagy szerepel, vagy az 5′ feladat megoldása során kikerült a bázisból. Ha ez történt, akkor x_j szerepét x_j^1 veszi át. Ha mind x_j, mind x_j^1 szerepelnek a bázisváltozók között, akkor – mivel ezek azonos tevékenységre vonatkozó változók – a tevékenység tényleges szintje $x_j + x_j^1$ lesz és ez a tevékenység az

$$\frac{x_j}{x_j + x_j^1}\mathbf{P}_j^0 + \frac{x_j^1}{x_j + x_j^1}\mathbf{P}^1$$

átlagos együtthatóvektorral kell hogy működjék.

Fenti megfontolásokat természetesen minden j-re ki kell terjeszteni, hiszen valamennyi generáló program adhat további javító hatású paraméter vektorokat.

A 4. feladat megoldása után tehát n közönséges LP feladatot kell megoldani. Ezek

$$\mathbf{D}_i\mathbf{y}^i = \mathbf{d}^i$$

$$\mathbf{y}^i \geq \mathbf{0}$$

$$t_i = \mathbf{c}_{B^0}^*\mathbf{A}_{B^0}^{-1}\begin{bmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^i \end{bmatrix} \to \min!$$

Jelöljük $\mathcal{J}_1$-vel azon indexek halmazát, amelyekre

$$\min t_i < c_i$$

és legyenek a megfelelő optimális megoldások

$$\mathbf{P}_i^1 \quad i \in \mathcal{J}_1$$

ebben az esetben a következő kibővített alapfeladatot kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i^0 x_i + \sum_{j\in J_1}\mathbf{P}_j^1 x_j^1 = \mathbf{b}$$

(5″)

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \qquad \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j\in J_1} c_j x_j^1\right) \to \max!$$

Az 5″ feladat ugyanannyi feltételt tartalmaz, mint 4., de lényegesen több változót. Nem nehéz azonban belátni, hogy az 5″ alatt felírt feladatban sok felesleges változó is szerepel és ezek elhagyásával a feladat mérete jelentősen csökkenthető. Nem kell ugyanis tovább szerepeltetni azokat az eredeti x_{i_1}; x_{i_2}; ... változókat, amelyek az $\mathbf{A}_{B^0}$ bázisra nézve nem bázisváltozók. A számítás későbbi lépéseinél mindig kihagyhatók a további számításokból azok a változók, amelyek az alapfeladat valamelyik megoldása során nem szerepelnek a megfelelő optimális bázisban. Az eljárásnak ugyanis az a logikája, hogy minden ilyen fázis után azt vizsgálja, hogy a még nem szerepelt pótlólagos változók segítségével érhető-e el további javítás. Ennek során egyetlen korábban már szerepelt és az optimális bázisba be nem került változó sem jöhet vissza valamelyik későbbi optimális megoldásba.

Azt tapasztaljuk tehát, hogy az alapfeladat mérete az induláskor $(m \times n)$ és minden további fázisban legfeljebb $[m \times (m+n)]$.

Mivel minden K_i halmaz feltevéseink szerint konvex poliéder, minden egyes generáló program csak véges számú különböző együtthatóoszlopot hozhat létre. Így az egész eljárás véges sok lépés után feltétlenül befejeződik.

Minden LP feladatnál elvben fennáll annak a lehetősége, hogy a célfüggvény a megengedett megoldások halmazán nem korlátosnak bizonyul. Gyakorlati jellegű feladatoknál ez a körülmény arra utal, hogy a modell felállításánál nem vettünk figyelembe létező és aktívnak bizonyuló korlátokat. ÁLP feladat esetében a modell szerkesztő aligha tudja eleve áttekinteni, hogy a megengedett együtthatók különböző lehetséges kombinációi milyen irányban vihetik irreálisan félre a programot. Célszerű ezért az alapfeladatba előre olyan korlátot beépíteni, amely az alapfeladat megengedett megoldásainak a halmazát eleve korlátossá teszi — bármilyen együttható kombniáció is alakuljon ki. Ezt a célt éri el pl. egy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M$$

alakú korlát felvétele, ahol M célszerűen választott elég nagy szám.

Ezzel az eljárás véges voltát beláthattuk. Röviden vissza kell azonban térni arra a feltevésünkre, hogy a 4. alatti alapfeladat optimális megoldása létezik. Ez eleve nem biztos, mert nem könnyű általános esetben elérni, hogy a generáló feladatok egymástól függetlenül talált megengedett megoldásai alapján összehozott együtthatómátrix oszlopvektoraiból a kapacitásvektornak létezzék nem negatív előállítása. A megoldhatóság eldöntése és az induló alapfeladat meghatározása ezért itt is az LP kétfázisos eljárásához hasonló megoldást követel.

A 2. feladatot először mesterséges változókkal kiegészítve kell tekintenünk és meg kell határoznunk a mesterséges változók összegének a minimumát. Ez egy teljes ÁLP feladat. Ha ennek a feladatnak a megoldása során az derül ki, hogy ez a minimum zérus, csak akkor állíthatjuk, hogy a feladatnak van megengedett megoldása. Ebben az esetben persze optimális megoldás is lesz, hiszen a korlátosságról már előzetesen gondoskodtunk. Amennyiben azonban a mesterséges változók összegének a minimuma pozitívnak bizonyul, akkor a 2. feladat inkonzisztens.

Ha viszont a konzisztencia fennáll, akkor a mesterséges változókat zérus minimális összegre redukáló program tartalmazza a 4. feladat érdemleges megoldásához szükséges $\mathbf{P}_1^0$; $\mathbf{P}_2^0$; ... $\mathbf{P}_n^0$ együtthatóvektoroknak egy olyan megengedett rendszerét, amelyre ennek a feladatnak már van optimális megoldása.

II.

Az ÁLP feladat bemutatásánál abból indultunk ki, hogy az alapfeladat kapacitásvektora és célfüggvényegyütthatói adott értékek. Nem nehéz azonban a feladatot olyan formában megfogalmazni, hogy a kapacitásvektor is egy adott konvex halmaz tetszőleges eleme legyen és hogy a célfüggvényegyütthatók is változókként legyenek kezelhetők.

Ennek érdekében a kiinduló 1. alatti LP feladatot átalakítjuk vele egyenértékű alakra a következő módon: keresendő az x_1; x_2; . . .; x_n; x_{n+1} nem negatív változók és az x_0 előjelkötetlen változó olyan értékrendszere, amely eleget tesz a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i x_i - \mathbf{b} x_{n+1} = \mathbf{0}$$

$$x_{n+1} = 1$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$$

egyenletrendszernek és amely mellett

$$z = x_0$$

lineáris függvény maximális értéket vesz fel.

Ebben az ekvivalens alakban az eredeti feladat kapacitásvektora az x_{n+1} változó együtthatóvektoraként jelenik meg és a célfüggvényegyütthatók a tevékenységek együtthatóvektorainak komponenseivé válnak. Ha tehát azt akarjuk elérni, hogy változókként kezelhessük a kapacitásvektort és a célfüggvényegyütthatókat is: tekintjük az alábbi ÁLP feladatot:

$$\mathbf{Q}_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{Q}_i x_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_i \in \mathrm{K}_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n, n+1)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1)$$

$$x_0 \text{ előjelkötetlen}$$

$$x_0 \to \max!$$

Az ÁLP feladat, mint láthattuk, az LP modell lényeges általánosítását tartalmazza. Alkalmazási szempontból abban áll a legnagyobb jelentősége, hogy lehetővé teszi bizonyos ,,külső'' hatásoknak az együtthatókra való olyan érvényesítését, amely konzisztens az alapmodellel és alá van vetve az alapmodell optimumkritériumának.

Nem nehéz észrevenni, hogy az ÁLP modell ebben az értelemben „kétszintűen" működik. Az alapfeladatban tevékenységi változókat programoz, a generáló programokban megengedett együtthatókat állít elő. Ezen a szinten veszi az eljárás figyelembe az együtthatókra érvényesülő „külső" — ti. modellen kívülről eredő — hatásokat. Az ÁLP modell igen szoros rokonságban van a Dantzig—Wolfe-féle ún. dekompozíciós eljárással. Lényegét tekintve nem más, mint a dekompozíciós módszer alapgondolatának alkotó adaptálása az LP feladat általánosítására.

Az ÁLP modell csak formálisan lineáris, mert explicit módon tartalmazza változók szorzatait is. Azonban csak bizonyos típusú változók szorzatai szerepelhetnek benne. Így a modell — legalábbis a kidolgozottságának jelenlegi fokán — nem képes olyan összefüggéseket figyelembe venni, amelyek különböző tevékenységek együtthatói között állanak fenn; és olyanokat sem, amelyekben a tevékenység színvonalának hatása fejeződik ki az együtthatóira.

Az ismeretlen együtthatókkal kapcsolatban figyelembe vett összefüggések lehetőleg lineárisak kell hogy legyenek, vagy legalább is lineáris függvényekkel jól közelíthetők. Így a modell gyakorlati alkalmazásának természetes területe olyan alapjában véve lineáris termelési (és egyéb) rendszerek optimalizálása, amelyeknél a tevékenységek technológiai együtthatói, tevékenységenként, külső vezérlőváltozók (kontrolparaméterek) segítségével befolyásolhatók és minden egyes tevékenységre külön-külön a megengedett technológiai együtthatóvektorok halmaza konvex.

Adott ÁLP megoldása, mint láttuk, LP feladatok sorozatának megoldását teszi szükségessé. A számítási többlet mértéke ÁLP feladat és vele azonos méretű LP feladat között attól függ, hogy hány generáló programmal kell dolgozni, vagyis hány együttható oszlopvektor tartalmaz nem rögzített paramétereket is. Ha a generáló programok száma alacsony — a megoldandó számítástechnikai többletfeladat nem jelentős és sem memóriatartalom, sem futási idő tekintetében nem okoz különösebb gondot.

Joggal felvethető azonban a kérdés, hogy a gyakorlatban találhatunk-e olyan problémákat, amelyek ÁLP feladat formájában megfogalmazva ilyen számítástechnikailag viszonylag kényelmes tulajdonságokkal rendelkeznek. Ilyen típusú feladatok szép számmal vannak mind az operációkutatás, mind a matematikai közgazdaságtan területén. Hadd hivatkozzunk itt csak egyetlen modelltípusra, amely a népgazdasági tervezés területén széles körben alkalmazásra kerül.

Ez pedig az ún. „Kantorovics típusú" optimalizálás. A hazai szakirodalomban Kantorovics professzor nevéhez fűződik az olyan típusú lineáris termelési modellekkel való optimalizálás, amelyekben a cél adott anyagi összetételű végső kibocsátás volumenének a maximalizálása. A gyakorlatban ezt az optimumelvet úgy szokták alkalmazni, hogy nem a végső kibocsátás volumenét magát, hanem egy előírt végső kibocsátási minimum feletti többletnek adott anyagi összetétel szerint való volumenmaximalizálását tekintik optimálisnak. Ilyen típusú célfüggvény került alkalmazásra (legalábbis más célfüggvényekkel együtt) az ex post árprogramozásban, az ún. összevont népgazdasági programozásban, a harmadik ötéves tervvel kapcsolatos ún. „kétszintű programozásban". Ilyen típusú modellel szándékozik az O. T. Távlati Tervezési Főosztálya és a Tervgazdasági Kutató Intézet a cseh—lengyel—magyar gazdasági együttműködés elemzését végrehajtani.

A jelzett feladat tömören így fogalmazható meg:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} + \lambda\mathbf{d}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \qquad \lambda \geq 0,$$

$$\lambda \rightarrow \max!,$$

ahol **b** a minimális végső kibocsátás vektora és a **d** vektor rögzíti a többletkibocsátás előírt anyagi összetételét.

Az ilyen típusú modellek előnyösen szolgálják az anyagi egyensúly biztosításának a követelményeit, de optimumkritériumuk igen merev. A **d** vektor elemeinek rögzítése teljesen kívülről történik és az ebből származó merevségen csak keveset csökkent az, ha különböző egymástól függetlenül megállapított, különböző gazdaságpolitikai koncepciókat tükröző **d** vektorral variánsokat határozunk meg. Ezek összehasonlítható elemzése meglehetősen problematikus. A fő hiányosság azonban abban van, hogy a különböző többletkibocsátási szerkezetek modellen kívüli megállapítása nincs kapcsolatban az alapfeladat adottságaival.

Meg kell ugyanakkor jegyezni, hogy a „kívánatos többletkibocsátási" szerkezet problémája nemcsak akkor merül fel, ha kifejezetten ennek a volumenét akarjuk maximalizálni. Minden kombinált népgazdasági célfüggvénynél felmerül a kérdés: milyen legyen az összetétele az optimalizálás révén realizálható anyagi tartalékoknak. Kétségtelennek tűnik, hogy előnyösebb, gazdaságilag megalapozottabb, ha e kérdést nem helyezzük teljesen a modellen kívülre; hanem külsődlegesen csak az érvényesítendő struktúrák bizonyos korlátait rögzítjük. E korlátok keretei között azonban a modell saját optimumkritériumának rendeljük alá a választást. Ebben az esetben nem kell mást tenni, mint ÁLP feladatként fogalmazni meg modellünket. Természetesen csak a többletkibocsátási szerkezet (esetleg szerkezetek) elemeit kezeljük változókként. Így — ha nem is érjük el a probléma közgazdasági szempontból kifogástalan kezelését — jelentőset lépünk előre a modell komplexitásának a tekintetében.

(Beérkezett: 1969. I. 10.)

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Bod, P.: Bevezetés a gazdasági programozásba. Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem jegyzete. Budapest, 1965. Tankönyvkiadó,

[2] Dantzig, G. B.: Linear Programming and Extensions. 22. fejezet. Princeton. University Press 1963.

[3] Krekó, B.: Lineáris programozás. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 1966.

[4] Prékopa, A.: Lineáris programozás I. Az operációkutatás matematika módszerei c. tanfolyam jegyzete. Bólyai János Matematikai Társulat, 1968.