Forgó Ferenc

Egy módszer nemlineáris programozási problémák közelítő megoldására*

Bevezetés

A nemlineáris programozási problémák széles osztálya a következő formában fogalmazható meg:

$$f(\mathbf{x}) \to \min \tag{1}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

ahol $\mathbf{x}$ az n dimenziós euklideszi tér — a továbbiakban röviden E^n — vektora, $f, g_1, g_2, \ldots g_m$ függvények pedig az egész E^n felett értelmezett skalárértékű alulról félig folytonos függvények.

Az (1) probléma megnyugtató, számítástechnikailag is kivitelezhető megoldása csak speciális $f, g_1, g_2 \ldots g_m$ függvények esetén ismeretes. Számos módszer van arra az esetre, amikor az előforduló függvények mindegyike konvex, azonban ezek, kivéve a lineáris g_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ függvények esetét, gyakorlati méretű feladatok esetén számítástechnikailag nehezen kezelhetők.

Jelen dolgozat célja az (1) feladat bizonyos értelemben közelítő megoldását keresni. Az (1) probléma közelítő megoldását visszavezetjük egy nemlineáris függvény feltétel nélküli minimalizálására.

Amennyiben van olyan módszerünk, mely alkalmas egy többváltozós függvény feltétel nélküli globális minimumának meghatározására, akkor az (1) probléma egy globális optimumpontjának megkeresését is célul tűzhetjük ki.

Az (1) megoldásra általunk javasolt módszer alapgondolatát tekintve az ún. SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) módszerek közé tartozik [6].

Az általános eset

Az eddigi feltételezéseinken túl még két feltételezéssel fogunk élni. A világosság kedvéért foglaljuk össze az (1) problémára tett valamennyi kikötést.

I. $f, g_1, g_2, \ldots g_m$ alulról félig folytonos függvények[1]

* Ez a cikk a „Számítógépek alkalmazása" című, 1968—72. évi kutatási program keretében kidolgozott egyes eredményeket tartalmazza. A kutatás a Kohó- és Gépipari Minisztérium Műszaki Főosztályának megbízásából és a KGM Ipargazdasági, Üzemszervezési és Számítástechnikai Intézetének irányításával folyik.

[1] Ez a feltétel biztosítja azt, hogy a lehetséges megoldások halmaza zárt, és ha ez a halmaz korlátos is, akkor a célfüggvény felveszi a minimumát.

II. $L_0 = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0;\ i = 1, 2, \ldots m\}$ nem üres és van olyan $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ vektor, hogy $L_\lambda = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq \lambda_i;\ i = 1, 2, \ldots m\}$ korlátos $(\boldsymbol{\lambda}^* = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m])$.

III. $f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x} \in E^n$ esetén.

Tekintsük a következő függvényt:

$$\Phi(\mathbf{x}, a, b) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} \exp\,[a\, g_i(\mathbf{x})] \tag{2}$$

ahol a és b határozatlan pozitív paraméterek.

Definiáljuk feltétel nélküli minimumfeladatok sorozatát a következőképpen: k-ik probléma $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\Phi(\mathbf{x}, a_k, b_k) \to \min \tag{3}$$

ahol

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \qquad 0 < a_k < a_{k+1} \\ &\lim_{k\to\infty} b_k = \infty \qquad 0 < b_k < b_{k+1} \\ &\lim_{k\to\infty} \frac{\log b_k}{a_k} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Legyen $\{\varepsilon_k\}$ egy monoton csökkenő, 0-hoz tartozó sorozat, és $\hat{\mathbf{x}}\,(a_k, b_k, \varepsilon_k) = \hat{\mathbf{x}}_k$ (3)-nak egy ún. ε_k-közelítő megoldása, amelyen a következő értendő:

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}_k, a_k, b_k) \leq N_k + \varepsilon_k$$

ahol $N_k = \inf_{\mathbf{x}\in E^n} \Phi\,(\mathbf{x}, a_k, b_k) \geq 0$

1. tétel: $\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$ sorozat minden torlódási pontja (1)-nek optimális megoldása.

Bizonyítás: Minthogy $f(\mathbf{x})$ alulról félig folytonos és L_0 nemüres, zárt és korlátos, $f(\mathbf{x})$ L_0-on felveszi a minimumát. Legyen

$$M = \min_{\mathbf{x}\in L_0} f(\mathbf{x})\,.$$

Válasszunk egy optimális megoldást, $\mathbf{x}^0$-t. Ekkor mivel $\hat{\mathbf{x}}_k$ a (3) feladatnak ε_k közelítő megoldása, fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\Phi\,(\hat{\mathbf{x}}_k, a_k, b_k) \leq \Phi\,(\mathbf{x}^0, a_k, b_k) + \varepsilon_k \leq f(\mathbf{x}^0) + \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k\,. \tag{5}$$

(Mivel $\mathbf{x}^0 \in L_0$ és $\exp\,[a_k\, g_i(\mathbf{x}^0)] \leq 1$). Az (5) egyenlőtlenség bal oldalát nemnegatív tagok elhagyásával nem növeljük, így kapjuk az

$$\frac{1}{b_k} \exp\,[a_k\, g_i(\hat{\mathbf{x}}_k)] \leq f(x^0) + \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

egyenlőtlenségeket. (Itt használtuk ki a III. kikötést.) Innen adódik

$$g_i(\hat{\mathbf{x}}_k) \leq \frac{1}{a_k} \log\,\{b_k f(\mathbf{x}^0) + m + b_k \varepsilon_k\} = c_k \qquad i = 1, 2, \ldots m \tag{6}$$

A (4) feltételek miatt

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0. \tag{7}$$

Ugyanis tetszőleges kis Θ pozitív számhoz van olyan k_0 küszöbszám, hogy minden $k > k_0$ esetén $b_k > 1$, és fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{a_k} \log \{b_k f(\mathbf{x}^0) + m + b_k \varepsilon_k\} \leq \frac{1}{a_k} \log \{b_k [f(\mathbf{x}^0) + \varepsilon_k + m]\} =$$

$$= \frac{\log b_k}{a_k} + \frac{\log [f(\mathbf{x}^0) + \varepsilon_k + m]}{a_k} < \Theta .$$

Így van olyan k_1 index is, hogy minden $k > k_1$ esetén $c_k \leq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, és így $\hat{\mathbf{x}}_k \in L_\lambda$. Mivel L zárt és korlátos, az $\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$ sorozatnak van torlódási pontja. Legyen $\bar{\mathbf{x}}$ egy torlódási pont. (7) miatt $\bar{\mathbf{x}} \in L_0$. Azt kell tehát még belátni, hogy $\bar{\mathbf{x}}$ optimális is. Könnyen belátható, hogy a következő egyenlőtlenségek fennállnak:

$$f(\hat{\mathbf{x}}_k) \leq \Phi(\hat{\mathbf{x}}_k, a_k, b_k) \leq f(\mathbf{x}^0) + \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k$$

ahonnan

$$f(\hat{\mathbf{x}}_k) - f(\mathbf{x}^0) \leq \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k = d_k . \tag{8}$$

Mivel $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$, $\bar{\mathbf{x}}$ optimális. Q.e.d.

Az 1. tétel alapján meg tudunk fogalmazni egy olyan feltétel nélküli szélsőértékfeladatot, melynek közelítő megoldása „jó közelítő megoldása" lesz (1)-nek is.

Az (1) probléma (δ, ϱ)-közelítő megoldásának $(\delta > 0, \varrho > 0)$ olyan $\mathbf{y} \in E^n$ pontot fogjuk nevezni, melyre fennáll

$$g_i(\mathbf{y}) \leq \delta \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \varrho .$$

Ez a közelítő megoldás, tekintve hogy δ és ϱ tetszőlegesen kicsi lehet, gyakorlati szempontból mindig kielégítő.

Ha tehát ismerjük (1) egy lehetséges megoldását, $\bar{\mathbf{x}}$-t, és (δ, ϱ)-közelítő megoldást keresünk, akkor Φ függvény a és b paraméterét a következőképpen határozzuk meg:

A (6) és (8) összefüggések alapján

$$\frac{m}{b} + \varepsilon \leq \varrho ,$$

ahonnan

$$b \geq \frac{m}{\varrho - \varepsilon,} \qquad (\varepsilon < \varrho) \tag{9}$$

valamint

$$\frac{1}{a} \log \{b\, f(\mathbf{x}^0) + m + \varepsilon\, b\} \leq \frac{1}{a} \log \{b\, f(\bar{\mathbf{x}}) + m + \varepsilon\, b\} \leq \delta$$

ahonnan

$$a \geq \frac{1}{\delta} \log \{b\, f(\bar{\mathbf{x}}) + m + \varepsilon\, b\} \tag{10}$$

Ha tehát a és b paramétereket a fenti formuláknak megfelelően választjuk, akkor a

$$\Phi\,(\mathbf{x}, a, b) \to \min$$

egyetlen szélsőértékfeladat ε-közelítő megoldása egyúttal (1) probléma (δ, ϱ)-közelítő megoldása.

Konvex függvények esete

Az előzőekben az (1) problémát visszavezettük a Φ függvény feltétel nélküli minimalizálására. A (10) probléma megoldása azonban egyes speciális, kevés változójú feladatok kivételével számítástechnikailag csak akkor kezelhető hatásosan, ha $f, g_1, g_2, \dots g_m$ függvények konvexek. Könnyű belátni, hogy ekkor Φ is konvex. Egy konvex függvény minimalizálására számos módszer ismert (lásd [4]). Vizsgáljuk meg, hogyan lehet Φ-nek ε-közelítő megoldását kapni, ha feltesszük, hogy $f, g_1, g_2, \dots g_m$ folytonosan differenciálható konvex függvények.

Tegyük fel, hogy ismerünk egy $\bar{\mathbf{x}} \in L_0$ megoldást. Legyen

$$c = \frac{1}{a} \log \{b f(\bar{\mathbf{x}}) + m + \varepsilon b\} \tag{11}$$

és $L_c = \{\mathbf{x} \mid g_i\,(\mathbf{x}) \leq c;\ i = 1, \dots m\}$. Az a megfelelő választásával II. kikötés értelmében mindig elérhető, hogy $c \leq \lambda_i\ (i = 1, \dots m)$, s így L_c korlátos legyen. Mivel Φ folytonos, L_c-n felveszi a minimumát. Viszont minden közelítő megoldás eleme L_c-nek, így Φ feltétel nélküli minimumát is felveszi L_c-ben.

Ágyazzuk be L_c-t egy egyszerű T tartományba, ahol könnyen ki tudjuk számítani a maximális távolságot:

$$D = \max_{\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in T} \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\,.$$

A feltétel nélküli minimumpont stacionárius pont, melyre fennáll

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)^2 = 0\,.$$

Tegyük fel, hogy Φ minimalizálása során megállunk, ha $\Psi(\mathbf{x}) \leq \Delta$. Φ folytonos differenciálhatósága miatt

$$|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})| \leq \sqrt{\Psi(\mathbf{x})}\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sqrt{\Delta}\, D$$

ahol $\mathbf{y}$ Φ-nek minimumpontja.

E közelítő megoldás nyerése érdekében teljesülni kell a

$$D \sqrt{\Delta} \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenségnek, vagyis előre megadott ε-hoz, Δ-t a

$$\Delta \leq \frac{\varepsilon^2}{D^2} \tag{12}$$

egyenlőtlenségnek megfelelően kell megválasztani.

(10) megoldása során tehát az adott minimalizálási eljárást (például gradiens módszert) addig folytatjuk, míg L_ε-be érve $\Psi(\mathbf{x}) \leqq \Delta$ teljesül.

Az alkalmazott feltételezésekről

Először a II. feltétel közgazdasági realitását, ill. teljesíthetőségét vizsgáljuk meg. A II. feltétel implicite tartalmazza azt az állítást, hogy L_0 korlátos. Mit jelentene, ha L_0 nem lenne korlátos? Tekintsünk egy olyan modellt, amelyben $\mathbf{x}$ termelésvektor, a $g_i(\mathbf{x}) \leqq 0$ feltételek pedig a kapacitáskorlátozásokat fejezik ki. Ekkor L_0 nemkorlátossága miatt

$$\sup_{\mathbf{x} \in L_0} [\max_{1 \leq j \leq n} |x_j|] = \infty,$$

más szóval legalább egy olyan termék van, melyből korlátlan mennyiséget lehet termelni véges erőforrás felhasználásával. Ez irreális, tehát a $\sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq K$ feltétel csatolása, ahol K egy alkalmas nagy pozitív szám, a gyakorlati esetekben közgazdaságilag mindig indokolt.

Mit jelent a II. feltétel azon része, mely megköveteli olyan $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ létezését, hogy L korlátos legyen? Tegyük fel, hogy nincs ilyen. Ez azt jelentené, hogy a kapacitásokat bármilyen kis mértékben növelve, legalább egy termék termelését korlátlanul növelni lehetne. Egybevetve ezt L_0 korlátos voltával, azt a következtetést vonhatnánk le, hogy a kapacitások („termelési tényezők") együttes határtermelékenysége végtelen. Ez pedig nyilvánvaló közgazdasági képtelenség.

A III. feltétel pedig olyan természetű, melynek teljesülését mindig biztosítani lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy eredeti problémánk

$$\varphi(\mathbf{x}) \to \min \tag{13}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \dots m$$

volt és $\varphi(\mathbf{x})$ nem teljesíti a III. kikötést. Ha $\varphi(\mathbf{x})$ alulról korlátos E^n-en, vagyis $\varphi(\mathbf{x}) \geqq R$, $\mathbf{x} \in E^n$, akkor $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + R$ célfüggvény már teljesíti a III. kikötést. Ha $\varphi(\mathbf{x})$ nem korlátos, akkor legyen $f(\mathbf{x}) = \exp\{\varphi(\mathbf{x})\}$ a célfüggvény. Minthogy az exponenciális függvény monoton, az optimális pontok ugyanazok maradnak; ha $\varphi(\mathbf{x})$ konvex és differenciálható volt, $f(\mathbf{x})$ is az. Változik azonban az optimális célfüggvényérték.

Az előzőekben leírt (δ, ϱ)-közelítő megoldás, $\mathbf{y}$ olyan, hogy

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \varrho$$

Ez így is írható:

$$\exp\{[\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}^0)] + \varphi(\mathbf{x}^0)\} - \exp\{\varphi(\mathbf{x}^0)\} \leq \varrho$$

továbbalakítva

$$[\exp\{\varphi(\mathbf{x}^0)\}]\,[\exp\{\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}^0)\} - 1] \leq \varrho \tag{14}$$

Tegyük fel, hogy ismerjük $\exp\{\varphi(\mathbf{x}^0)\}$ egy pozitív alsó korlátját, α-t (ez mindig létezik L_0 korlátossága miatt, és gyakorlatilag mindig könnyen meghatározható). Ekkor (14)-ből következik

$$\alpha[\exp\{\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}^0)\} - 1] \leq \varrho$$

továbbalakítva

$$\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}^0) \leq \log\left(1 + \frac{\varrho}{\alpha}\right).$$

Ha tehát a (13) feladatnak szeretnénk (δ, ω)-közelítő megoldást választani, akkor fenn kell állni a

$$\log\left(1 + \frac{\varrho}{\alpha}\right) \leq \omega$$

vagy másképpen a

$$\varrho \leq \alpha[(\exp\omega) - 1)$$

egyenlőtlenségnek. ϱ-t így választva biztosak lehetünk abban, hogy az $f(\mathbf{x})$ célfüggvénnyel rendelkező feladat (δ, ϱ)-megoldása a (13) probléma (δ, ω)-megoldása is.

Egy numerikus példa

Tekintsük a következő konvex programozási problémát:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) = 0{,}3\,x_1 + x_1^2 + 0{,}3x_2 + x_2^2 + 0{,}0450 &\to \min \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -1 + 2x_1^2 + 3x_2^2 &\leq 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Keressük meg a (15) feladat egy (δ, ϱ)-közelítő megoldását, ahol $\delta = 0{,}125$, $\varrho = 0{,}1$. Könnyen igazolható, hogy a (15) probléma eleget tesz az I—III. kikötéseknek. Válasszuk ε-t (9)-nek megfelelően, $\varepsilon = 0{,}05$. Mivel $m = 3$

$$b = \frac{3}{0{,}1 - 0{,}05} = 60\,.$$

Az $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (15)-nek egy lehetséges megoldása, $Q(0{,}0) = 0{,}0450$. Ekkor (9)-nek megfelelően[2]

$$a \geq \frac{1}{0{,}125}\log\{60 \cdot 0{,}0450 + 3 + 3\} = 7{,}516\,.$$

Legyen $a = 8$.

[2] A példa során log tizes alapú, ln pedig természetes alapú logaritmust jelent.

Ekkor a minimalizálandó függvény:

$$\Phi(x_1, x_2) = 0,3x_1 + x_1^2 + 0,3x_2 + x_2^2 + \frac{1}{60}[\exp\{-8x_1\} + \exp\{-8x_2\} +$$
$$+ \exp\{8(2x_1^2 + 3x_2^2 - 1)\}].$$

A gradiens abszolút értékének négyzete pedig

$$\Psi(x_1, x_2) = [0,3 + 2x_1 - \frac{8\ln 10}{60}\Big) \exp\{-8x_1\} - 4x_1 \exp\{8(2x_1^2 +$$
$$+ 3x_2^2 - 1)\})]^2 + [0,3 + 2x_2 - \frac{8\ln 10}{60}\Big) \exp\{-8x_2\} - 6x_2 \exp\{8(2x_1^2 +$$
$$+ 3x_2^2 - 1)\})]^2$$

$$(11) \text{ szerint } c = \frac{1}{8}\log\{60 \cdot 0,0450 + 3 + 3\} = 0,1174$$

L_c tehát a következő egyenlőtlenségek által leírt tartomány:

$$-x_1 \leq 0,1174$$
$$-x_2 \leq 0,1174$$
$$2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 1,1174$$

Könnyű belátni, hogy L_c a következő csúcspontkoordinátákkal rendelkező négyszögtartományba esik: (—0,2; —0,2) (—0,2; 0,8), (0,8; —0,2), (0,8; 0,8). Ebben a tartományban a maximális távolság $\sqrt{2}$. Tehát (12) szerint

$$\Delta = \left(\frac{0,05}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,00125.$$

Ezek után könnyen igazolhatjuk, hogy induló lehetséges megoldásunk $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (δ, ϱ)-közelítő megoldás. Ugyanis

$$\Psi(0,0) = 0,000098 < \Delta. \tag{16}$$

A példa a rövidség kedvéért leegyszerűsített volt. Amennyiben a kiinduló megoldás nem elégítette volna ki a (16) egyenlőtlenséget, $\Phi(x_1, x_2)$-t valamilyen gradiensmódszerrel minimalizálni kellene, és minden lépésnél ellenőrizni a (12) egyenlőtlenség teljesülését.

(Beérkezett: 1968. X. 10.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Hadley, G.: Nonlinear and dynamic programming. Addison Wesley, London 1964
2. Künzi, H. P.: Zum heutigen Stand der nichtlinearen Optimierungstheorie. Unternehmensforschung, Band 12. 1968 Heft 1. (1—22)
3. Kleibohm, K.: Äquivalenz eines Optimierungsproblems mit Restriktionen und einer Folge von Optimierungsproblemen ohne Restriktionen. Unternehmensforschung, Band 11. 1967 Heft 2. (111—118)

4. KEMPTHORNE et. al.: Some algorithms for minimizing a function of several variables. SIAM Journal on Applied Mathematics, 12. 1964 (74—92)
5. HUARD, P.: Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centres. Nonlinear Programming (NATO Summer School, Menton 1964) (207—219) North Holland, Amsterdam 1967.
6. FIACCO, A. V. and MC CORMICK, G. P.: Extension of SUMT for nonlinear programming: Equality constraints and extrapolation. Management Science, Vol 12. July 1966 (816—828)

A METHOD FOR THE APPROXIMATIVE SOLUTION OF NON-LINEAR PROGRAMING PROBLEMS

Solve the non-linear programing problem:

$$f(\mathbf{x}) \to \min$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

with the following assumptions:

I. $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ are lower semi-continuous scalar-valued functions

II. $L_0 = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0;\ i = 1, \ldots, m\}$ is non-empty and there exists a $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ vector such that

$L_{\boldsymbol{\lambda}} = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq \lambda_i;\ i = 1, \ldots, m\}$ is bounded $\boldsymbol{\lambda}' = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m])$

III. $f(\mathbf{x}) \geq 0$ for all $\mathbf{x} \in E^n$

We will consider as (δ, ϱ)-approximate solution $(\delta > 0, \varrho > 0)$ of problem (1) the point $\mathbf{y} \in E^n$ satisfying:

$$g_i(\mathbf{y}) \leq \delta \qquad i = 1, \ldots, m$$
$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \varrho,$$

where $\mathbf{x}^0$ is an optimal solution of (1).

Our principal result is the following: The unconditional minimum point of the function

$$\Phi(\mathbf{x}, a, b) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m}{}' \exp[a\, g_i(\mathbf{x})]$$

where parameters a and b are suitably constructed from the initial data, will be (δ,ϱ)-approximate solution of problem (1).

The article also contains the application of the method in the case of convex functions, the economic motivation of assumptions (I—III), the comparison of the method to KLEIBOHM's procedure [3], as well as a numerical example.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель заключается в решении следующей проблемы нелинейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) \to \min$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

при следующих предположениях:

I. $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$— функции, скалярное значение которых является снизу наполовину непрерывным

II. $L_0 = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \ldots, m\}$ является непустым и имеется такой вектор $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$, гто $L_{\boldsymbol{\lambda}} = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq \lambda_i; i = 1, \ldots, m\}$ является ограниченным ($\lambda^* = | \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m]$)

III. $f(\mathbf{x}) \geq 0$ в случае любого $x \in E^n$

(δ, ϱ) — приближенным решением ($\varrho > 0, \varrho > 0$) проблемы (I) будем считать точку $\mathbf{y} \in E^n$, для которой действительно, что

$$g_i(\mathbf{y}) \leq \delta \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$f(\mathbf{y}) - r(\mathbf{x}^\circ) \leq \varrho$$

где $\mathbf{x}^0$ является одним из оптимальных решений проблемы (I).

Основной результат заключается в следующем. Точка безусловного минимума функци

$$\Phi(\mathbf{x}, a, b) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} \exp\,[a\; g_i(x)]$$

построенной при помощи подходящим образом выбранных параметров a и $б$, является (δ, ϱ) — приближенным решением задачи (I).

Статья содержит еще и применение метода в случае выпуклых функций, экономическую мотивацию предположений (I—III), сопоставление метода с методом Клейбома [3], а также нумерический пример.