Bródy András

Ciklus és mérlegegyensúly

Az utóbbi időben többen, így például Goldmann (1964), Hoch-Berényi (1965), Bródy (1967) rámutattak arra, hogy a szocialista gazdaság nem mentes bizonyos erőteljes ingadozásoktól, amelyek a tőkés konjunktúraciklus menetére emlékeztetnek.

Valószínűnek látszik, hogy az ilyen ingadozások fő oka a szocializmus sajátos körülményei közt nem a piaci viszonyokban vagy a pénzügyi mechanizmusban keresendő. Kézenfekvő tehát az ingadozásokat kiváltó mozzanatokat magában a tervezésben, a tervezéssel összefüggő kérdésekben kutatni. A tapasztalat ugyanis azt mutatja, hogy az ingadozások nemcsak a tényszámokban, hanem a tervszámokban is tükröződnek. Maguk a tervek is tartalmazzák tehát a ciklust.

Az alábbiakban a tervszámítások egy igen elvont matematikai modelljéről számolok be, amely képes némi fényt vetni az ilyen ingadozások kialakulásának körülményeire, lehetőségeire, sőt szükségszerűségére. Arra a következtetésre jutottam, hogy a terv mérlegeinek egyensúlya összefér a bennük szereplő mutatók ingadozásával. Ezt lényegében, bár más kontextusban, Erdős (1966) is kimutatta a marxi sémák elemzésekor. De ennél több is igaz az elvont modellban: *a ciklus éppen annak következtében alakul ki, hogy a tervek a mérlegek teljes egyensúlyára törekednek.*

Ez, másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy amikor a terv mérlegein belül a keresletet és a kínálatot (vagy a szaknyelven szólva: a forrásokat és az elosztást) az itt leírandó módon egyensúlyba hozzuk, akkor ez az eljárás olyan eredményhez vezet, amely a ciklusmentes fejlődés útjától eltávolít. Ez az eljárás csak akkor képes a ciklusmentes fejlődés útján tartani a tervszámokat és ezzel a gazdaságot, ha már a tervezés előtti időszak, a bázisidőszak idején is megfelelő arányok alakultak ki. Ha azonban ettől a sima fejlődési útvonaltól, illetve az ennek megfelelő arányoktól a bázisidőszakban a legkisebb eltérés is mutatkozott, akkor a mérlegek szokásos módon való kiegyensúlyozása az eltérést fokozni fogja. Az eljárás a netán fennálló feszültségeket, zavaró tendenciákat tovább erősíti.

A tárgyalt modell, a tervszámítások eszmei váza, a mérlegegyensúly megfogalmazása és a távlati, ciklusmentes fejlődési út meghatározása, mind igen elvont és leegyszerűsített. Csak arra törekszem, hogy a jelenség „logikai csontvázát" bemutassam, s matematikai levezetéssel, valamint egy kis számpéldával illusztráljam. Szeretném e modellt a jövőben valóságos statisztikai adatok fényében konkrétebben is kidolgozni. Ilyen adatok azonban, elsősorban a részletes beruházási matrix, csak a jövőben állanak majd rendelkezésre. Így helyesnek láttam az alapvető elgondolást — elsősorban tervezéselméleti fontossága miatt — már ebben az előzetes formájában is vitára bocsátani.

1. Problémafelvetés és modell

Egy adott időszak terve — első közelítésben — arra szolgál, hogy az illető időszak társadalmi anyagcseréjének egyensúlyát biztosítsa. Ez annyit jelent, hogy olyan bruttó termelési szinteket veszünk tervbe, amelyek a termelés pótlási alapjának fedezésén kívül lehetővé teszik a termelési kapacitások megfelelő bővítését.

Legyen k ($k = 0, 1, \ldots$) az egyes időszakaszok jele (ahol egy-egy időszakasz maga is egy vagy több év lehet.) Legyen a $k + 1$ időszak a tervidőszak, amelyre az x_{k+1} vektorral megadott bruttó termelési szinteket tervezzük. A folyó ráfordítások koefficiens-matrixát A, a beruházások koefficiens-matrixát B betűvel jelölve a fenti mérlegegyensúly keresése az alábbi matematikai feladat formájában vetődik fel:

Ismeretes az x_k bázisidőszaki (tényleges vagy várható) termelés. Keressük azon x_{k+1} tervidőszaki termelést, amely mellett

(1) $$x_{k+1} = A\, x_{k+1} + B(x_{k+1} - x_k).$$

A probléma világos áttekintése kedvéért elvonatkoztattam:

a) a külkereskedelem létezésétől
b) a végső fogyasztás egyéb elemeitől
c) a beruházások időbeli áthúzódásától.

Ezeket a kérdéseket, amelyek modellünket nyilván bonyolultabbá tennék (s ezért vizsgálatuk nem lehet elhanyagolandó), azért tartottam mellőzhetőknek az első megközelítéskor, mert ugyan enyhíthetik vagy erősbíthetik a számítás instabilitását, s így az ingadozásokat, de sem ki nem váltják, sem önmagukban megszüntetni nem képesek ezt a tárgyalandó sajátosságot.

Ugyancsak igen elvontan határozom meg a távlati, ciklusmentes fejlődési útvonal termelési arányait, mint amelyek az $\bar{x} = A\bar{x} + \lambda\, B\bar{x}$ egyenletnek tesznek eleget, tehát egyöntetű, egyenletes, λ ütemű fejlődést tesznek lehetővé. Adott A és B matrixok esetén ezek az arányok szabatosan és egyértelműen meghatározhatók. (Lásd pl. Bródy (1968). Természetesen, ha a technika érezhetően és gyorsan változik, akkor az A és B matrixok, s így a sima fejlődés útvonala is módosul. Feltesszük azonban, hogy a tervszámítások idején kellő pontossággal ismeretesek ezek az adatok. Miután most nem azt vizsgáljuk, hogy a technikai változást milyen szabatosan vagyunk képesek tervezni, a jelen probléma szempontjából adottnak, ismertnek és pontosnak tekintjük mindezeket az adatokat. Tehát nem azokat a *véletlen* eltéréseket és ingadozásokat vizsgáljuk, amelyeket a koefficiensváltozás (norma- és normatívaváltozás) pontatlan tervezése idéz elő, hanem azt a *szisztematikus* hibát, amelyet a mérlegek kiegyensúlyozásának fent megadott 1. egyenlete okoz.

A ciklusmentes, egyenletes (sőt bizonyos értelemben maximális) fejlődésnek ilyen elvontan megfogalmazott $\bar{x}$ arányai természetesen mindig kielégítik az 1. egyenletet, amiről behelyettesítés révén meg is győződhetünk, ha figyelembe vesszük, hogy ez esetben $\bar{x}_{k+1} = (1 + \lambda)\bar{x}_k$.

Dolgozatunk alapvető kérdése mármost az, hogy ha az x_k bázisidőszaki arányok nem azonosak ezekkel a ciklusmentes fejlődést biztosító $\bar{x}_k$ arányokkal, akkor a tervezett x_{k+1} termelési arányok általában *közelebb* vagy *távolabb* visznek-e ezekhez az arányokhoz? Nagyobb vagy kisebb lesz-e az eltérés, a feszültség a tervidőszak végére, mint amekkora az elején fennállt?

2. A megoldás és tárgyalása

Az 1. egyenlet könnyen átrendezhető, ha az invertálandó matrix regularitását feltételezzük (erről még lesz szó) az

$$(2) \qquad x_{k+1} = -(1 - A - B)^{-1} B x_k$$

alakban.

E megoldás sajátságait a $K = -(1 - A - B)^{-1}$ B matrix elemzésével adhatjuk meg. $(1 - A)$ kiemelésével és a Leontief-inverz szokásos $(1 - A)^{-1} = Q$ jelölésével élve.

$$(3) \qquad -K = (1 - A - B)^{-1} B = [(1 - A)(1 - QB)]^{-1} B = (1 - QB)^{-1} QB.$$

Az x_k vektorból tehát a K matrix-szal való szorzással jutunk el a tervidőszak adataihoz: $x_{k+1} = K x_k$.

Tudvalevő, hogy a matrix-vektor szorzatot úgy is felfoghatjuk, hogy a matrix a szorzott vektornak a matrix saját-vektorai irányába eső komponenseit a sajátértékeknek megfelelően nyújtja vagy rövidíti meg. Tanulmányozhatjuk tehát, hogy á K matrix-szal való szorzás az x_k vektornak milyen összetevőit erősíti és milyen összetevőit gyengíti.

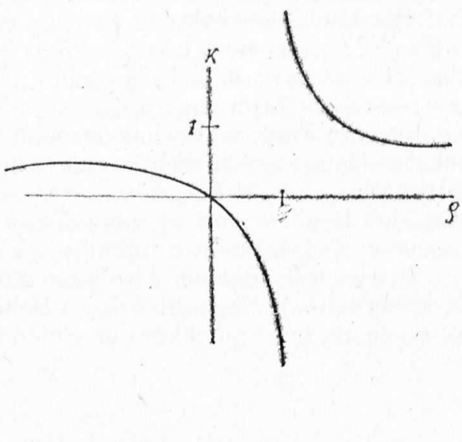
Tudjuk mármost, hogy a távlati, ciklusmentes egyensúly $\bar{x}$ vektora a QB matrix legnagyobb abszolút értékű pozitív sajátértékéhez tartozó pozitív sajátvektor, s e matrixnak nincs is több pozitív sajátvektora. Mivel K a QB matrix racionális függvénye, ezért sajátvektoraik azonosak. (Lásd pl. Bodewig (1962). *K domináló* sajátértéke azonban általában nem QB imént említett domináló sajátértékéből ered. Ha ugyanis QB sajátértékei rendre $\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots > \varrho_n$ (ahol $\frac{1}{\varrho_1} = \lambda$ a ciklusmentes fejlődés már említett üteme), akkor K sajátértékeit 3. alapján a

$$(4) \qquad \varkappa_i = -\frac{\varrho_i}{1 - \varrho_i} = \frac{\varrho_i}{\varrho_i - 1}$$

összefüggés adja meg.

Ismeretes az, hogy QB maximális sajátértéke gyakorlatilag az $5 < \varrho_1 < 40$ számközben található (azaz az éves növekedési ütem 2,5 és 20% közt lehet). Ennek megfelel K-nak egy a $\frac{40}{39} < \varkappa_1 < \frac{5}{4}$ számközben található sajátértéke.

$\varkappa_i$ és ϱ_i összefüggését a 4. egyenlet alapján az alábbi ábra adja meg:



Ha tehát ϱ_i kisebb, mint ϱ_1, de nagyobb, mint 0,6, akkor a megfelelő $\varkappa_i$-k nagyobbak $\varkappa_1$-nél, s ez azt jelenti, hogy ha x_k-nak van komponense a megfelelő sajátvektorok irányában, akkor ez az összetevő a K matrix-szal való szorzás folyamán erősödni fog a ciklusmentes $\bar{x}$ fejlődés irányába mutató összetevő terhére. A K-val való szorzás tehát jelentősen eltéríthet a ciklusmentes fejlődéstől abban az esetben, ha már x_k-ban is volt ilyen feszültséget keltő összetevő.

Érdekes annak az esetnek vizsgálata is, ha valamely ϱ_i közel esik az 1 értékhez. Ekkor ugyanis az ennek megfelelő $\varkappa_i$ tetszőlegesen nagy pozitív vagy negatív értéket felvehet. Ha $\varrho_i = 1$, akkor az $(1 - QB)$ matrix, s igy $(1 - A - - B)$ is szinguláris. Ennek ellenkezőjét tételeztük fel a levezetésben, de nem zárhatjuk ki, hogy a gyakorlati adatok e szingularitáshoz igen közel ne kerülhessenek.

Ilyenkor a mérlegek egyensúlyának megteremtése gyakorlatilag szinte lehetetlen. A mérleg „áthullámoztatása", szukcesszív egyensúlybahozása folyamán érthetetlenül nagy ingadozások lépnek fel, s a tervezés kénytelen megelégedni egy ellentmondásos, csonka számítással, mivel ahogy mondani szokás „szétestek" a mérlegek. (Ez a jelenség nem egyszer fellépett már a gyakorlati munkában, magyarázata tehát a megfelelő, de ismeretlen matrixok „rosszul kondicionált" volta, 1-hez közel eső sajátértéke.)

Általában tehát azt várhatjuk, hogy a tervezési számítások, a mérlegek kiegyensúlyozásának az a logikája, amely az 1. egyenletben megadott tervegyensúlyra törekszik, éppen ezzel *eltávolít* a valódi hosszútávú, ciklusmentes fejlődési arányoktól. Ha a kezdeti x_k vektornak volt összetevője a nem pozitív sajátvektorok irányában, akkor ezt a tervszámítások csak fokozzák, s a számítás végén az x_{k+1} vektornak ez a komponense jobban növekszik, mint a ciklusmentes hosszú távú fejlődés irányába mutató pozitív komponens.

Összefoglalóan tehát: a mérlegek kiegyensúlyozásának, a terv egyensúlyának elve — legalábbis abban az elvontságban, ahogy az előbbiekben figyelembevettük — nem *enyhíti*, hanem *fokozza* a számokban meglevő feszültségeket, elszakadási tendenciákat, káros irányzatokat, *súlyosbítja és nem orvosolja* az eltéréseket.

3. Számpélda

Egy kétszektoros, könnyen számítható, adataiban sem teljesen irreális példa a következő.

A folyó ráfordítások koefficiens-matrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

a tőkeigényességi (beruházási) matrix:

$$B = \begin{bmatrix} 6{,}6 & 0{,}5 \\ 4{,}7 & 1{,}9 \end{bmatrix}$$

a K matrix kiszámításához vezető lépések:

$$-(1 - A - B) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek inverze:

$$-(1 - A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

S végül maga a K matrix

$$K = -(1 - A - B)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1.9 & -1.4 \\ -4.8 & 8.9 \end{bmatrix}$$

A ciklusmentes fejlődés útvonalának arányai 4 tizedes pontosságig [1,6365; 1,000] Ugyanis

$$K \begin{bmatrix} 1.6365 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.70935 \\ 1.04480 \end{bmatrix}$$

Ez tehát mintegy 4 és félszázalékos évi növekedésnek felel meg. Ha azonban például az ehhez látszólag igen közel fekvő „bázisidőszaki" [1,6; 1,0] arányból indulunk ki, akkor a „mérlegegyensúly" a következő időszakra [1,64; 1,22] értéket, majd az erre következő időszakra [1,408; 2,986] „tervet" diktál — amely tehát ciklikus (az első ágazat termelése csökken).

Ha viszont a szintén közeli [1,7; 1,0] arányból számítjuk ki az egyensúlyt, ez a tervévre [1,83; 0,74] értéket (a második szektor azonnali csökkenését) adja.

A számítás tehát — az A és B matrix ártalmatlan alakja ellenére — rendkívül instabil. Az ok nem más, mint hogy a K matrixnak a „ciklusmentes" 1.045 sajátértéke mellett a másik sajátértéke 9.755 nagyságú, tehát mintegy kilencszeres — s így ez utóbbi a domináló.

E két sajátérték megfelel a QB matrix 23 és 0,907 sajátértékének.

Összefoglalás

A mérlegegyensúly keresése — amennyiben fenti elv alapján történik — nem biztosítja a ciklusmentes fejlődést, sőt alkalmas a ciklust előidéző összetevők erősítésére.

A mérlegegyensúly fenti számítását ugyanis nem a jövő (x_{k+1} óhajtott arányai), hanem a múlt (x_k ténylegesen megvalósult, káros tendenciáktól nem mentes) adatai determinálták. Az eljárás javítása sokféle módon elképzelhető. Úgy vélem, hogy a javítás legfontosabb módja a *távlati terv által kijelölt arányokhoz való tudatos alkalmazkodás*, még a mérlegegyensúly terhére is.

Ha a kiinduló adatok nem biztosítanak egyenletes, sima ciklusmentes fejlődést, akkor az egészséges fejlődés pályája felé csak tartalékok képzése, készletnövekedés, ki nem használt kapacitások — esetleg e „fölöslegeknek" a külkereskedelem révén történő „átváltása" — révén lehet áttörni.

(Beérkezett: 1968. VIII. 1.)

IRODALOM

[1] Bodewig, E.: Matrix-Calculus. North Holland Publishing Company, Amsterdam 1962.

[2] Bródy A.: Gazdasági növekedésünk üteme 1924-től 1965-ig. Közgazdasági Szemle, 1967. 4. sz.

[3] Bródy A.: Érték és újratermelés. Doktori értekezés. MTA Közgazdaságtudományi Intézet. Budapest, 1968.

[4] Erdős P.: Adalékok a mai tőkés pénz, a konjunktúraingadozások és a gazdasági válságok elméletéhez. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.

[5] Goldmann, J.: Planovane Hospodarstvi, 1964. 9. 11. sz.

[6] Hoch R.—Berényi J.: A fogyasztás ütemének tervezése. MTA Közgazdaságtudományi Intézetének IV. Évkönyve. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1965.

CYCLE AND EQUILIBRIUM

An abstract mathematical model of plan calculation shows that an economic cycle can develop exactly because the plan balances are pressed to reach equilibrium.

The plan of a given period always tries to attain a certain equilibrium in social metabolism. It strives for a x_{k+1} production level which covers the Ax_{k+1} current inputs (A being the current input coefficient matrix) and the $B(x_{k+1} - x_k)$ inputs needed for widening capacity. (B is the matrix of tied-down capital).

The resulting equation, assuming the regularity of matrix B, and knowing the starting x_k production levels, can be solved in the form:

$$x_{k+1} = -(1 - A - B)^{-1} Bx_k .$$

It can be proved that the matrix of this equation weakens the long run equilibrium (or turn-pike) components, while the components strengthen deviations from the long-run equilibrium. The reason is that the eigenvector belonging to the dominant eigenvalue fails to be positive.

Following the analysis of eigenvalues, a small numerical example illustrates the main point: the principle of balancing does not lessen, but rather increases deviations from the long-run equilibrium proportions.

ЦИКЛ И РАВНОВЕСИЕ БАЛАНСА

Отвлеченная математическая модель плановых расчетов показывает, что экономический цикл складывается именно в силу того, что в планах стремятся к равновесию плановых балансов.

Дело в том, что план какого-то данного периода всегда предусматривает осуществление определенного равновесия в общественном обмене материалов. В нем стремятся найти такие производственные уровни x_{k+1}, которыми покрываются текущие затраты Ax_{k+1} (где «A»-матрица коэффициентов текущих затрат) и затраты на требующееся расширение мощностей $B\ (x_{k+1} - x_k)$ (где «B» — матрица коэффициентов фондоемкости).

Получаемая таким образом система уравнений в случае регулярности матрицы B и при известных исходных производственных уровнях x_k может быть решена в следующей форме:

$$x_{k+1} = -(1 - A - B)^{-1} Bx_k$$

О матрице же этой системы уравнений можно доказать, что она ослабляет компоненты «turn-pike-path» длительного равновесия и зато усиливает компоненты отклонения от сформулированного таким образом пути равновесия. Причина этого заключается в том, что к ее доминирующим собственным значениям не относятся собственные векторы.

После анализа собственных значений матрицы на небольшом числовом примере иллюстрируется основная мысль: принцип уравновешивания балансов не умеривает, а усиливает отклонение от перспективных пропорций равновесия.