

A KÖZMUNKAPROGRAM TELEPÜLÉSSZINTŰ ELEMZÉSE¹

CSERHÁTI ILONA – KERESZTÉLY TIBOR – PIRISI KÁROLY
Budapesti Corvinus Egyetem – Budapesti Gazdasági Egyetem

A közmunkaprogram igen elterjedt foglalkoztatási forma Magyarországon, a közfoglalkoztatottak száma 2015-ben meghaladta a gazdaságilag aktív népesség 4 százalékát. Azt vizsgáltuk, hogy a település, illetve a településen élők jellemzői hogyan befolyásolják a közmunkaprogramban részt vevők arányát, valamint annak nemek szerinti alakulását. Eredményeink szerint a közfoglalkoztatás kiterjedtségét a településnagyság és a területi elhelyezkedés mellett jelentősen befolyásolja a településen élő lakosság képzettségi szerkezete, valamint a regisztrált álláskereső aránya. Elemzésünkhöz logisztikus regressziót alkalmaztunk. Az általunk felhasznált adatbázis különlegessége, hogy településszintű adatokat tartalmaz, eddig nem készült ilyen jellegű elemzés Magyarországon a közmunkaprogramra vonatkozóan.

Kulcsszavak: munkaerőpiac, közmunka, munkanélküliség, logisztikus regresszió. *JEL kódok:* C10, C25, C54, J21

Bevezetés

Az állam társadalompolitikai céljai között lassan egy évszázada kiemelt helyen szerepel a munkanélküliség csökkentése, illetve a foglalkoztatottság növelése. Ennek elérése érdekében a hagyományos indirekt eszközökön (a gazdasági növekedés ösztönzése, aktív iparpolitika) túl számos direkt eszközt alkalmazhat a kormányzat.

A direkt módszerek között elsősorban állami munkahelyteremtő programok találhatók, melyek közül a közmunka talán a legközvetlenebb eszköz. A közmunka olyan állami foglalkoztatáspolitikai eszköz, mely a munkanélküliek képzettségi szintjének emelését, valamint a gyakorlati tapasztalataik növelését a munka és a gyakorlati képzés összekapcsolásával kívánja elérni.

Egyes szerzők (pl. Ghinararu, 2012) kritizálják a közmunka intézményét, az ilyen munkahelyeket nem tekintik az elsődleges munkapiac részének. Véleményük szerint ez a módszer nem költséghatékony eszköze a foglalkoztatottság emelésének, mivel az újra-elhelyezkedés ellen ösztönöz (locking-in effect). Ugyanakkor a kormányok általában kedvelik, mivel – megfelelő célzottság mellett – elég költséghatékony módszer a szegénység és az egyenlőtlenség csökkentésére (Brown és Koettl, 2012).

Kutatásunk során azt vizsgáltuk, hogy a település jellege, illetve a településen élők jellemzői hogyan befolyásolják a közmunkaprogramban való

¹E-mail: cserhati.ilona@uni-corvinus.hu. Beérkezett: 2016. október 10.

részvételt, valamint annak nemek szerinti alakulását. Az elemzéshez településszintű adatbázis készült, amely az általános makrogazdasági jellemzők mellett munkaerőpiaci adatokat is tartalmazott, beleértve a közmunkában foglalkoztatottak speciális jellemzőit.

1 Történeti és szakirodalmi áttekintés

A közmunkaprogramok története a középkorig nyúlik vissza. Az első ismert eset az indiai szubkontinenshez köthető: az Iszlamabad és Peshavar közötti út egy része egy szegénység-enyhítő közmunka program keretében készült a 12. században. Érdekesség, hogy ez az útszakasz jelenleg is használatban van, sőt Pakisztán egyik turisztikai attrakciójának számít. A 18. századi Angliában, a Szegényfoglalkoztatási Törvény (Poor Employment Act) alapján sok új munkahelyet hoztak létre csatornák és utak építése, valamint mocsarak lecsapolása révén. Az így javuló infrastruktúra egyben hozzájárult az ipari forradalom kiteljesedéséhez. Afrikában és Ázsiában számos közmunka program jelent meg a 19. század vége felé, melyek közül az egyik legjelentősebb az 1870 körül induló és az 1950-es évekig működő brit-indiai kezdeményezés, mely több kisebb „étel a munkáért” jellegű programot ölelt fel.

Németország a háború következményeinek felszámolása érdekében indított közmunkaprogramot 1946–48 között. Indiában az 1970-es évek elején Mahárástra államban indítottak egy kezdeményezést (Maharashtra Employment Guarantee Scheme), mely az első olyan közmunkaprogramot volt, amely kifejezetten a munkahelyteremtést helyezte előtérbe. A program a falusi térségek felzárkóztatását célozta infrastruktúra-fejlesztés révén. Dél-Koreában az 1997-es ázsiai pénzügyi válság következtében a munkanélküliségi ráta 2 százalékról 9 százalékra emelkedett, aminek hatására a kormány beindította az ország első közmunkaprogramját. A 18 hónapos időtartamra elindított program több mint 140 ezer fő bevonását tette lehetővé.

Elmondható, hogy a közmunka az elmúlt évtizedekben számos társadalompolitikai cél elérésének vált meghatározó eszközévé. A leggyakrabban megfogalmazott ilyen törekvések: a szegénység elleni küzdelem, a szárazság következtében kialakuló vidéki munkanélküliség, illetve általában a falusi térségek felzárkóztatása, valamint a természeti katasztrófák következményeinek elhárítása (Subbarao et al., 2013).

Magyarországon az 1700-as évek végén jelent meg a közmunka intézménye. Mária Terézia uralkodása alatt indultak meg a folyószabályozási munkák a Körösökön és a Dunán, lényegében ez tekinthető az első hazai közmunkaprogramnak. Az első dologházat 1841-ben alapították, amely akkoriban még egyesületként működött. Később állami keretek között végezték tevékenységüket egészen az 1940-es évek közepéig.

Az 1929–33-as világgazdasági válság következtében Magyarországon is drámaian emelkedett a szegények aránya. Gömbös Gyula a munkaalapú társadalom megteremtését tűzte ki célul, amit a Nemzeti Munkaterv keretében kívánt megvalósítani. „Munkaképes emberek munkanélküliség címén való

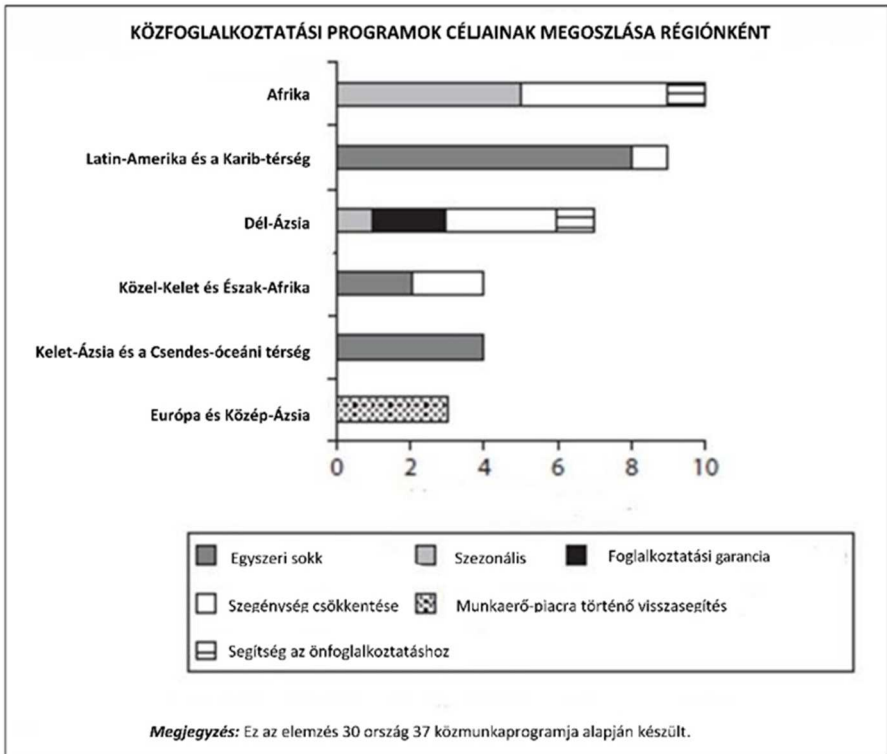
segélyezésének elvi ellenségei vagyunk, s a munkanélkülieket csak munka ellenében támogatjuk.” – mondta Gömbös Gyula (idézi: Barát, 2013). Így a szegénység a lustaságból fakadó emberi jellemhiba, amit csak munka által lehet gyógyítani – volt a Horthy korszak második felében a követett eszme. Ennek gyakorlati megvalósulása elsősorban a folyószabályozások és infrastruktúra-fejlesztések során adódó egyszerű fizikai munka volt. A szükségmunka volt a diplomás munkanélküliek ínségmunkája, amit népjóléti biztosként, vagy kérdezőbiztosként is végeztek. A szükség- és ínségmunkában résztvevők az adott munkakörre jellemző munkaerőpiaci átlagbért kapták (Barát, 2013, illetve Kulinyi, 2012).

A közmunka programok céljai változatosak voltak, szerepeltek köztük anticiklikus, szociálpolitikai, infrastruktúra-fejlesztési, illetve katasztrófavédelmi indítékok (Kálmán, 2015).

Az 1990-es évek óta a fejlődő világban a közfoglalkoztatást az egyik lényeges szociálpolitikai eszközként használják a szegénység enyhítése érdekében. Jelenleg is ez a legfontosabb célja a hasonló programoknak például Argentínában, Etiópiában vagy Indiában. A közfoglalkoztatás számos esetben igen hatékony eszköznek bizonyult a szegénység elleni küzdelemben (Subbarao et al., 2013).

Ugyanakkor a fejlett országok a munkanélküliek munkaerőpiaci elhelyezkedésének elősegítése, ösztönzése érdekében többféle aktív foglalkoztatáspolitikai programot működtetnek, és a közfoglalkoztatás jellemzően az egyik eleme ezeknek az eszközöknek. Ilyen esetekben a szociálpolitikai szempontok kevésbé hangsúlyosak.

A fejlett országok általában jól működő munkaerőpiaccal rendelkeznek. Ez többek között azt is jelenti, hogy megfelelő szintű infrastruktúra áll rendelkezésre ahhoz, hogy a munkaerő kereslete és a kínálata találkozhasson, és a munkaerőpiac kellően rugalmas és átlátható legyen a globalizáció következtében felgyorsult munkaerő-keresleti változások hosszabb távú kezeléséhez. Ebből következően a fejlett országok közmunka-programjai általában a munkanélküliek munkaerőpiacra történő visszasegítését célozzák. Ebben az országcsoportban szinte egyáltalán nem jellemző, hogy egy ilyen programban olyan szociális célok is megjelenjenek, mint például egy átmeneti, de erős külső sokk munkaerőpiaci következményeinek kezelése, vagy a többszörösen hátrányos csoportok támogatása. Ezt támasztja alá Subbarao et al. (2013) is, adatai szerint Európában a vizsgált közmunkák kizárólag az előbb említett célból indultak – ebben a magyar közmunka-program még nem szerepel. A többi nagyrégióban viszont általában más célok domináltak (lásd az *1. ábrát*, az adatok 30 ország 37 közmunka-programjára vonatkoznak, az 1980-2010 közötti időszakból).



1. ábra. A közfoglalkoztatási programok céljainak megoszlása makrorégiónként.
Forrás: Subbarao et al. (2013).

Besley és Coate (1992) felhívja a figyelmet arra, hogy az angolszász országokban – különösen az Egyesült Államokban – a különféle állami programokban való részvételt általában feltételekhez kötik („workfare” támogatások). Ez a módszer az esetek többségében javítja az újbóli elhelyezkedés esélyét, de a tapasztalatok szerint épp akkor a leggyengébb ez a hatás, amikor kifejezetten rossz a munkapiaci helyzet és nagyon magas a munkanélküliség (Crisp és Fletcher, 2008).

A hagyományosan a jóléti kiadások szabadabb hozzáférhetőségét („welfare” támogatások) fontosnak tartó skandináv országok hozzáállása is megváltozott az utóbbi időben. A svéd kormány 1999-ben deklarálta, hogy a welfare típusú támogatások összegét felére kívánja csökkenteni (Dahlberg, Johansson, és Mörk, 2009). Ugyanakkor a hazai közfoglalkoztatáshoz hasonló program nem létezik a skandináv államokban. Fontos megemlíteni azt is, hogy az észak-európai országokban a nemzetközi átlaghoz képest magas az állami alkalmazottak aránya (Bakó Tamás, 2015), ami eleve tompítja a munkaerőpiaci ingadozások szociális következményeit. A fejlett országok a workfare támogatások keretében elsősorban képzéseket és személyes szolgáltatásokat biztosítanak, amelyek általában hatékonyabbak, mint a hagyományos közmunka (Stephan és Pahnke, 2008, illetve Card, Kluve és Weber, 2010).

A 2007–2010 közötti gazdasági sokk enyhítése érdekében több EU-tagállamban növelték a közfoglalkoztatás szerepét. Magyarországon kiemelkedő mértékben nőtt az erre a területre szánt források, így a 2010-es évek elejére az erre a célra fordított összeg elérte a GDP 0,8-1%-át². Jelentős volt még az ilyen célú kiadások aránya Lettorszában, ahol 2010-11-ben a GDP 0,25%-át fordították hasonló programokra, ami több mint kétszerese volt az ország szegénységellenes szociális kiadásainak (Azam et al., 2013). Kisebbségi programokat indítottak Görögországban, ahol 2011-ben 57 400 főt vontak be a közfoglalkoztatásba az Európai Szociális Alap társfinanszírozása mellett (Manoudi, 2012). Szlovákiában is indult közfoglalkoztatási program, erre azonban a hazainál egy nagyságrenddel kevesebb pénzt szánt az ottani kormányzat: 2012-ben mindössze a GDP 0,07%-ának felelt meg az erre a területre költött összeg (Scharle, 2015). Romániában az aktív munkaerőpiaci programokra koncentráltak, amelyek a közfoglalkoztatást is magukban foglalták. Ezekre 2006-ban a GDP 0,1%-át fordították, majd folyamatosan csökkenés mellett 2010-re ez az arány 0,03%-ra mérséklődött (Ghinararu, 2012).

2 A hazai közmunka alakulásának bemutatása

A közmunkások számából kalkulált ún. aktiválási ráta³ az utóbbi években rendkívül magassá vált Magyarországon. Miközben ennek a mutatónak az értéke Szlovákiában 13,2%, Görögországban 6,7%, Csehországban 1,3%, Lengyelországban pedig 1,1% volt⁴, a hazai mérték folyamatosan növekedett és 2015-ben elérte a 36,2%-ot (lásd az 1. táblázatot).

Év	Regisztrált álláskereső, fő (1)	Közfoglalkoztatottak, fő (2)	Aktiválási ráta, % (2)/((1)+(2))
2011	582 868	53 969	8,5
2012	559 102	92 412	14,2
2013	527 624	121 367	18,7
2014	422 445	166 675	28,3
2015	378 181	214 543	36,2

1. táblázat. Az álláskereső és a közfoglalkoztatottak havi átlaga és az aktiválási ráta (2011-2014, fő illetve %). Forrás: NFSZ, saját gyűjtés

A közfoglalkoztatottak számának emelkedése két oldalról is javítja a munkaügyi statisztikát. Egyrészt közvetlenül mérsékli a regisztrált munkanélküliek számát. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a későbbiekben politikailag igen költségessé válhat a közmunkaprogram költségvetésének esetleges visszafogása, hiszen a közfoglalkoztatottak tömeges elbocsátása a regisztrált munkanélküliek számának azonnali növekedésével jár (Scharle, 2015). Másrészt a közmunka-program növeli a foglalkoztatottak létszámát, mivel a közfoglalkoztatottak is foglalkoztatottnak minősülnek. Ez a hatás nagyban hozzájárult

²NFSZ és KSH adatok alapján.

³A közfoglalkoztatottak száma a munkanélküliek és közfoglalkoztatottak együttes létszámához viszonyítva.

⁴A görög adat 2011-re, a többi orszáé 2012-re vonatkozik (Manoudi, 2012 illetve Scharle, 2015).

ahhoz, hogy 2009 és 2014 között mintegy 5 százalékponttal emelkedett Magyarországon a foglalkoztatottsági arányszám. A regionális különbségek is mérséklődtek a program hatására: a legjobb pozícióból induló Közép-Magyarország kivételével minden régióban jelentősen nőtt a foglalkoztatási ráta, sőt, az Észak-Magyarországon mért 9,6 százalékpontos emelkedés az egész EU legkedvezőbb értéke a vizsgált időszakban (Eurostat Regional Yearbook, 2015).

Fontos hangsúlyozni a célzott programok szükségességét a közfoglalkoztatás területén. Minél inkább igazodik egy adott program a helyi körülményekhez és lehetőségekhez, annál nagyobb az esély a sikerre (Petz, 2011). Ugyanakkor a hazai közfoglalkoztatók céljai eléggé heterogének, a legfontosabb prioritás általában a saját (jellemzően önkormányzati) költségek minimalizálása.

A hazai közfoglalkoztatás egyik legfontosabb célja a nyolc vagy kevesebb osztályt végzett regisztrált munkanélküliek munkapiaci integrálásának elősegítése. Ugyanakkor ennek a célcsoportnak csak a 10-20 százaléka él a magas munkanélküliségtől sújtott kistérségek kistélepülésein (Gábor, 2010). Emiatt a közfoglalkoztatási források hasznosulásának megítélése nagyon eltérő lehet attól függően, hogy az egyes szakértők mely aspektusokat emelnek ki. Czirfusz (2015) szerint nem volt hatékony a források felhasználása: „jogszabályi környezet alapján a forrásokat a munkanélküliség által leginkább sújtott térségekbe kellene összpontosítani, ez a 2011–2013-as évek adatainak vizsgálata alapján kevésbé – és egyre kevésbé – sikerült.” Ezzel szemben Mód (2014) a program pozitív elemeit emeli ki: „Az aktív foglalkoztatáspolitikai főbb eszközcsoportjai közül a legrosszabb helyzetű településeken volt a legmagasabb a közfoglalkoztatásban érintettek aránya (87,9%), és ezeken a településeken volt a legalacsonyabb az érintettek közül képzésekbe, vagy bérjellegű támogatásba vontak aránya.”

3 A kutatási hipotézisek bemutatása

A kutatás során három fő munkahipotézist állítottunk fel. Az első szerint minél kisebb egy település, annál nagyobb a közmunka részaránya ezen a településen. A hipotézisben feltételezett összefüggés fennállása egyáltalán nem tekinthető evidensnek. Számos kistélepülés található ugyanis nagyvárosok vonzáskörzetében, és ezek sokszor igen kedvező munkaerőpiaci helyzetben vannak, nem szorulnak rá a kiterjedt közmunkaprogramra. Ezzel szemben az Alföldön és Észak-Magyarországon nagy számban található olyan közepes vagy annál nagyobb települést, amely kifejezetten nehéz helyzetben van ebből a szempontból, és nagy arányban alkalmazza a közmunkát mint válságkezelő eszközt. Továbbá azt is érdemes figyelembe venni, hogy a közmunkaprogram beindítása és fenntartása nem kevés erőforrást igényel az adott településtől, így a nagyobb helységek eleve kedvezőbb helyzetből indulnak.

A második kutatási hipotézis szerint minél kisebb egy helység, annál nagyobb a közfoglalkoztatottak aránya az aktív korú férfiakon belül. Ezt úgy is megfogalmazhatnánk, hogy a településméret csökkenésével egyre inkább

beszűkül az elsődleges munkaerőpiac a férfiak számára.

A harmadik hipotézis szerint minél nagyobb egy település, annál nagyobb a nők aránya a közfoglalkoztatottak között. Ez lényegesen eltér az előző állítástól, hiszen ezúttal a közfoglalkoztatottak megoszlásáról van szó, míg az előző hipotézis az aktív korú férfiak arányainak alakulásával volt kapcsolatos. A harmadik hipotézis – ha igaznak bizonyul – a magyar társadalmi beidegződéseknek is egyfajta lenyomata: vélhetően az lehet a jelenség magyarázata, hogy a kisebb településeken a nők nagyobb arányban töltik idejüket a nem megfizetett munkával (házimunkával), így nincs idejük, lehetőségük részt venni a közmunkában.

4 Az adatállomány és a felhasznált módszerek

Elemzésünkhöz három különböző adatbázis adatait használtuk fel. 2011-ig létezett a Foglalkoztatási és Közfoglalkoztatási Adatbázis (FOKA), amely tartalmazta a közfoglalkoztatottak legfontosabb adatait. 2011 óta ezeket az adatokat a Belügyminisztérium (BM) kezeli. A regisztrált munkanélküliekre vonatkozó adatokat a munkaügyi központok tartják nyilván, 2011-ben ez az adatbázis is a BM ellenőrzése alá került. Bár ezek az adatbázisok számos településszintű információt tartalmaznak, kiegészítésként felhasználtuk a KSH települési adatait is.

Az elemzéshez egyrészt leíró statisztikákat használtunk, amelyek nem igényelnek különösebb módszertani ismertetést. Ezt követően multinomiális logisztikus regressziós modelleket építettünk.

A logisztikus regresszió Wooldridge (2002) alapján a korlátozott eredményváltozójú modellek családjába tartozik. A korlátozás ebben az esetben azt jelenti, hogy az eredményváltozó nem folytonos, hanem kategoriális ismérv, azaz olyan diszkrét változó, amely csak véges sok lehetséges értéket vehet fel. A logisztikus regresszió legegyszerűbb és leggyakrabban alkalmazott esete a bináris logisztikus regresszió. Ebben a modellben az eredményváltozó csak 0 vagy 1 értéket vehet fel. Az ilyen változókat dichotóm vagy dummy változóknak szokás nevezni.

A logisztikus regresszió alkalmazása során a lineáris regresszió esetében alkalmazott lineáris becselőfüggvénnyel az $\ln(\text{odds})$ értékére készítünk becslést, a modellt is erre a transzformált változóra írjuk fel. A paraméterek becslése során viszont nem alkalmazható a legkisebb négyzetek módszere (OLS), mivel nem adódik zárt képlet a paraméterek becsült értékeire. Ezért csak iterációs módszerek jönnek számításba, amelyeket a statisztikai programcsomagok általában tartalmaznak.

A paraméterbecslést követően a következő lépéseket kell elvégezni ahhoz, hogy megkapjuk az 1-es esemény valószínűségére vonatkozó becslést.

- Elvégezzük az $\ln(\text{odds})$ -ra vonatkozó becslést a lineáris modell segítségével (ezt szokás egyszerűen logit-nak is nevezni):

$$\widehat{\text{logit}} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$$

- A logit becslt értékéből meghatározzuk az odds-ot: $odds = \exp(\text{logit})$
- Az odds alapján meghatározzuk a becslt valószínűséget: $P = \frac{odds}{1+odds}$.

Gyakran ez az utolsó lépés, mert sok esetben csak az esemény valószínűsége a kérdés. Előfordulhat azonban, hogy klasszifikálni is akarunk, azaz meg szeretnénk mondani, hogy az adott becslés alapján az 1-es vagy a 0-s eseményt tekintjük előrejelzésnek. Ebben az esetben definiálnunk kell egy ún. cut-off értéket, ami a határpont lesz a két esemény között. Ez lényegében egy valószínűség, ezt meghaladó becslt valószínűség esetén 1-es értéket, alatta pedig 0-t klasszifikálunk.

Sokszor előfordul az is, hogy a logisztikus regresszió alkalmazásának nem az az elsőrendű célja, hogy valószínűségeket becsljünk, hanem a lineáris prediktor paramétereire koncentrálnunk. Ebben az esetben nem közvetlenül a paramétereket értelmezzük, hanem az $\exp(\beta_j)$ értékeket. Ez a kifejezés azt mutatja meg, hogy az X_j magyarázó változó egy egységgel történő növekedése várhatóan hányszorosára növeli az 1-es esemény odds-át, amennyiben a többi változó értéke nem módosul.

A multinomiális logisztikus regresszió alkalmazása során lényegében az történik, hogy több különböző bináris logisztikus regressziót futtatunk. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy választunk egy referenciakategóriát, és az összes többi kategóriára becslünk egy bináris modellt, amelyben a két kimenet a referenciakategória, valamint az éppen aktuális másik kategória. A modell paramétereinek megfelelően értelmezhetőek, a bináris esetben leírtak szerint.

5 Eredmények, következtetések

5.1 Leíró statisztikák

A közmunkaprogramban részt vevők arányára vonatkozó modellbecsléseink bemutatása előtt érdemes áttekinteni a közfoglalkoztatottak számának alakulását az aktív népesség arányában, regionálisan és településnagyság szerint. Az európai tapasztalatok azt mutatják, hogy a 2008-as válság körüli években 0,5-0,7 százalékos közmunka mérték volt jellemző a legtöbb esetben, a 1,5 százalék feletti érték már nagyon ritkán fordult elő, 2 százalék feletti értékre pedig nem is találunk példát (Scharle, 2016). Ez alapján a közfoglalkoztatotti arányokat három kategóriába soroltuk. A szakértői felosztás szerinti fontosabb hazai tendenciákat a 2. és 3. táblázat mutatja be.

A közfoglalkoztatottság intenzitása területileg igen eltérő. Az Észak-Alföldön a lakosság közel kétharmada (64,3%) intenzív közfoglalkoztatottsággal jellemezhető területeken él. Kelet-Magyarország és Dél-Dunántúl is alapvetően jelentős közfoglalkoztatással jellemezhető, míg a fejlettebb nyugati és központi régióban ez a munkapiaci eszköz sokkal kisebb jelentőséggel bír: pl. a központi régióban a népesség közel 90%-a az alacsony közfoglalkoztatottsággal jellemezhető településeken él. Mindezek alapján látható, hogy a fejlettebb régiókban jellemzően alacsonyabb a közfoglalkoztatás mértéke.

Régió	Átlagos közfoglalkoztatottsági arány a régióban, %	A népesség megoszlása a közfoglalkoztatottsági arány szerint, %		
		Alacsony (0-0,6%)	Közepes (0,6-2%)	Magas (2% felett)
Észak-Magyarország	3,6	5,6	36,3	58,1
Észak-Alföld	4,0	1,8	33,9	64,3
Dél-Alföld	2,2	13,5	47,5	39,0
Dél-Dunántúl	2,9	19,0	36,5	44,5
Közép-Dunántúl	1,1	28,8	59,8	11,4
Nyugat-Dunántúl	0,9	62,3	29,5	8,2
Közép-Magyarország	0,3	88,7	9,8	1,5
Összesen	1,9	40,1	31,4	28,4

2. táblázat. A közfoglalkoztatottak arányának alakulása régiók szerint, 2011. *Forrás:* NFSZ, saját számítás

Ha a közfoglalkoztatás súlyát a települések nagysága (lakosainak száma) szerint elemezzük, akkor is jelentős szóródást tapasztalunk. Az 5000 fő alatti települések esetében a lakosság többsége (az 500 fő alattiak több mint kétharmada) 2% feletti közfoglalkoztatottsággal jellemezhető településen él. Ezzel szemben nagyvárosaink átlagosan igen alacsony közfoglalkoztatási aránnyal jellemezhetők, a 100 000 főnél több lakossal rendelkező települések egyikéről sem mondható el, hogy a közfoglalkoztatást jelentős mértékben használnák, mint aktív foglalkoztatáspolitikai eszközt.

Település népessége, fő	Átlagos közfoglalkoztatottsági arány a kategória egészében, %	A népesség megoszlása a közfoglalkoztatottsági arány szerint, %		
		Alacsony (0-0,6%)	Közepes (0,6-2%)	Magas (2% felett)
0-500	6,0	8,0	20,4	71,6
500-1000	4,8	9,0	26,9	64,1
1000-5000	3,3	14,9	32,3	52,8
5000-20 000	1,9	27,4	31,5	41,1
20 000-100 000	0,7	62,6	29,8	7,6
100 000- Összesen	0,5 1,9	63,7 40,1	36,3 31,4	0,0 28,4

3. táblázat. A közfoglalkoztatottak arányának alakulása a települések nagysága szerint, 2011. *Forrás:* NFSZ, saját számítás

5.2 A modellbecslés eredményei

A közmunkaprogramban részt vevők arányának modellezésére a multinomiális logisztikus regresszió módszerét választottuk⁵. A modellválasztás során figyelembe kellett vennünk, hogy az eredményváltozónk – mivel egy arányról van szó – nem elemezhető a hagyományos lineáris regresszióval, hiszen abban az esetben az eredményváltozó értékészlete nem korlátozódik a [0,1] intervallumra. Kézenfekvő megoldásnak tűnt a logisztikus regresszió (logit). Ebben az esetben viszont kategoriális változót kell szerepeltetni az egyenlet bal oldalán. Két kategória esetében bináris logisztikus regressziót alkalmazhattunk volna, de úgy véltük, három kategória kialakításával jobban

⁵A módszer részletes bemutatását lásd: Hajdu et al. (2003), 279-301. o.

leírhatóak a vizsgált folyamatok. Így viszont már multinomiális logisztikus regressziót kellett becsülnünk.

A modellbecslésekhez az alábbi változócsoportokból indultunk ki.

Célváltozók

1. közfoglalkoztatottak száma az aktívak (15-64) arányában a településen (%) alacsony (0.6% alatt); közepes (0.6-2% között); magas (2% felett)
2. férfi közfoglalkoztatottak száma az aktív férfiak (15-64) arányában (%) alacsony (0.6% alatt); közepes (0.6-2% között); magas (2% felett)
3. női közfoglalkoztatottak száma az aktív nők (15-64) arányában (%) alacsony (0.6% alatt); közepes (0.6-2% között); magas (2% felett)
4. női közfoglalkoztatottak aránya az összes közfoglalkoztatotton belül (%) alacsony (33.3% alatt); közepes (33.3-66.6% között); magas (66.6% felett)

Potenciális magyarázó változók

1. településtípus (minőségi változó: 1-község, 2-nagyközség, 3-város, 4-nagyváros: megyeszékhely, megyei jogú város, budapesti kerület, referencia kategória: község)
2. településnagyság: mennyiségi változóból képzett kategoriális változó (6 kategória: 500 fő alatti, 500-1000, 1001-5000, 5001-20.000, 20.001-100.000 fő közötti, valamint a 100.000 fő feletti létszámmal rendelkező települések, referencia kategória a 100.000 fő feletti települések)
3. a felsőfokú végzettségűek aránya az aktív korú (15-74) népességen belül (mennyiségi változó)
4. az alacsony képzettségűek aránya az aktív korú (15-74) népességen belül (mennyiségi változó)
5. megye vagy régió (minőségi változó, referencia kategória: Budapest vagy Közép-Mo.)
6. a 25 év alattiak aránya a teljes népességen belül (mennyiségi változó)
7. a regisztrált álláskereső aránya az aktívakon (15-64) belül (mennyiségi változó)

Összesen tehát négy multinomiális logit modellt becsültünk, amelyekben a fentebb felsorolt célváltozók szerepeltek eredményváltozóként.

A potenciális magyarázó változók közül első lépésben az összeset szerepeltettük a modellekben, majd backward eljárással hagytuk ki a legkevésbé szignifikánsakat. A végső modellekben csak a szignifikáns változók maradtak, ugyanakkor nem szignifikáns paraméterek előfordulnak. Ennek oka, hogy a

minőségi változókat jellemző dummykat csoportosan kezeltük, vagyis vagy az összes kategória dummy-ja kikerült a modelltől vagy mind bennmaradt. Így például a régiót mint magyarázó változót csak akkor vettük ki a modelltől, ha a 7 régiót jellemző 6 dummy együttesen bizonyult inszignifikánsnak. Ilyen esetekben ez a sztenderd eljárás, ugyanis a nem szignifikáns változók jelenléte nem torzítja a többi változó becslt paraméterét, hiányuk viszont nehezíteni a bennmaradó paraméterek értelmezését.

A négy multinomiális logisztikus regresszió paraméterbecsléseit a 4. táblázat tartalmazza.⁶ Az eredményváltozók referencia csoportja minden esetben az alacsony arányt képviselő kategória. A két modell közül az első becsli közepes arány/alacsony arány oddsát, míg a második modell a magas arány/alacsony arány oddsot. A becslt paramétereken kívül megadtuk az egyes modelleket jellemző McFadden-féle pszeudo R-négyszet értékét is.

A multinomiális logisztikus regresszió paramétereinek teljes körű értelmezése sokszor igen körülményes, ezért az ilyen modellek alkalmazása során a paraméterek előjelére, valamint a modell illeszkedésére szokták helyezni a hangsúlyt. A későbbiekben mi is így járunk el, azonban a teljesség kedvéért bemutatunk néhány precíz paraméterértelmezést. A közfoglalkoztatottak arányára vonatkozó 1. modellben az ALAP_ARANY változó paramétere a következőt jelenti. Amennyiben egy településen az alapfokú végzettségűek aránya 1 százalékponttal magasabb lenne, miközben a többi magyarázó változó értéke változatlan maradna, akkor az az odds, amit a közepes arányú és az alacsony arányú kategóriába esés valószínűségeinek hányadosaként definiáltunk, várhatóan az $\exp(3,282) = 26,6$ -szorosára növekedne.

A második értelmezés egy minőségi változó becslt paraméterére vonatkozik. Az első modell 1. paramétercsoportjában a 0-500 kategória mellett szereplő 1,512-es érték a következőt jelenti. Amennyiben egy településen legfeljebb 500-an élnek, akkor az alacsony versus közepes közfoglalkoztatottsági arány kategóriáinak odds-a (a két valószínűség hányadosa) $\exp(1,512) = 4,536$ -szerese annak, mintha a település lakosainak száma 100 ezer fő felett lenne.

A pszeudo R-négyszetek alapján elmondható, hogy az első három modell kifejezetten jól illeszkedik, a 0,4-0,5 körüli értékek igen jónak mondhatók logisztikus regresszió esetében. A negyedik modell már lényegesen gyengébb, az aktuális modellünk log-likelihood értéke közelebb van az üres modell adathoz, mint a tökéletesen illeszkedő (szaturált) modell értékéhez.

A paraméterek áttekintése után kijelenthető, hogy eredményeink alátámasztják az absztraktban megfogalmazott kutatási hipotéziseinket. Az első modellben a települmérethez tartozó pozitív paraméterek arra utalnak, hogy a kisebb települések nagyobb valószínűséggel szerepelnek a közepes és a magas közfoglalkoztatottsági aránnyal jellemezhető kategóriákban (mivel a referencia kategóriát a legnépesebb települések csoportja képviseli).

⁶A táblázatban az ALAP_ARANY az alacsony képzettségűek aránya az aktív korú (15-74) népességen belül (mennyiségi változó), a FIATAL_ARANY a 25 év alattiak aránya a teljes népességen belül (mennyiségi változó), a REGISZTR_ARANY a regisztrált álláskeresők aránya az aktívakon (15-64) belül (mennyiségi változó), a FELSO_ARANY a felsőfokú végzettségűek aránya az aktív korú (15-74) népességen belül (mennyiségi változó).

	Közfoglalkoztatottak aránya (összesen)		Közfoglalkoztatottak aránya (férfiak)		Közfoglalkoztatottak aránya (nők)		Nők aránya a közfoglalkoztatottakon belül		
	B	Szign.	B	Szign.	B	Szign.	B	Szign.	
1	Konstans	-5,594	0,000	-3,236	0,000	-3,285	0,000	19,995	0,000
	ALAP_ARANY	3,282	0,001						
	FIATAL_ARANY	-5,694	0,012						
	REGISZT_ARANY	39,482	0,000	24,942	0,001	16,646	0,000	0,203	0,488
	FELSO_ARANY			-3,759	0,004	-3,558	0,006	-2,577	0,006
	Észak-Magyarország	1,465	0,003	1,110	0,001	0,937	0,000	0,514	0,017
	Észak-Alföld	2,469	0,029	1,719	0,004	0,781	0,025	-0,021	0,924
	Dél-Alföld	1,753	0,005	1,396	0,000	1,903	0,000	0,589	0,017
	Dél-Dunántúl	0,661	0,076	1,110	0,000	0,851	0,001	0,352	0,101
	Közép-Dunántúl	1,025	0,000	1,053	0,000	0,414	0,057	-0,051	0,812
	Nyugat-Dunántúl	0,461	0,078	0,760	0,001	-0,352	0,119	-0,471	0,024
	Közép-Magyarország	ref.		ref.		ref.		ref.	
	0-500	1,512	0,129	0,582	0,471	1,262	0,152	-19,796	0,000
	500-1000	1,869	0,060	1,026	0,204	1,636	0,063	-19,561	0,000
	1000-5000	1,804	0,062	0,908	0,251	1,239	0,153	-19,150	0,000
	5000-20 000	1,627	0,098	0,614	0,445	1,103	0,208	-17,652	0,000
	20 000-100 000	1,096	0,271	0,483	0,560	1,022	0,259	-17,341	0,000
	100 000-	ref.		ref.		ref.		ref.	
2	Konstans	-26,960	0,000	-25,612	0,000	-25,267	0,000	-0,612	0,523
	ALAP_ARANY	3,206	0,011						
	FIATAL_ARANY	-10,925	0,000						
	REGISZT_ARANY	68,234	0,000	41,713	0,000	27,165	0,000	-5,986	0,000
	FELSO_ARANY			-1,351	0,450	-3,093	0,088	-0,107	0,950
	Észak-Magyarország	1,430	0,012	1,016	0,013	1,852	0,000	-0,791	0,076
	Észak-Alföld	3,107	0,008	2,359	0,000	2,233	0,000	-17,857	0,993
	Dél-Alföld	2,147	0,002	1,678	0,000	2,453	0,000	-0,798	0,161
	Dél-Dunántúl	0,550	0,227	0,871	0,025	1,399	0,006	-1,025	0,019
	Közép-Dunántúl	0,887	0,017	0,719	0,040	0,393	0,444	-1,314	0,001
	Nyugat-Dunántúl	0,109	0,773	0,386	0,272	-0,243	0,635	-1,429	0,000
	Közép-Magyarország	ref.		ref.		ref.		ref.	
	0-500	20,399	0,000	20,348	0,000	20,427	0,000	1,192	0,186
	500-1000	20,667	0,000	20,471	0,000	20,317	0,000	0,300	0,742
	1000-5000	20,191	0,000	19,901	0,000	19,650	0,000	-0,058	0,947
	5000-20 000	19,837	0,000	19,142	0,000	19,132	0,000	0,641	0,498
	20 000-100 000	17,977	0,000	18,021	0,000	17,173	0,000	0,217	0,000
	100 000-	ref.		ref.		ref.		ref.	
	McFadden Pseudo R-négyszöglet	0,524		0,421		0,399		0,083	

4. táblázat. A becslült modellek eredményei. Forrás: saját becslések.

A második modell alapján kijelenthető, hogy amennyiben vizsgálódásainkat a férfi munkavállalókra szűkítjük, akkor is hasonló eredményeket kapunk, vagyis a település méretének csökkenése a férfiak körében is egyértelműen növeli a magasabb közfoglalkoztatottsági arányú kategóriába kerülés valószínűségét, azaz lényegében a közfoglalkoztatottak arányát. További növelő tényező a magas munkanélküliségi ráta, valamint a leszakadó régiókhoz (Észak-Alföld, Észak-Magyarország) történő tartozás. Csökkentőleg hat viszont a férfiak körében mért közfoglalkoztatotti arányra a felsőfokú végzettségűek arányának emelkedése. Ez utóbbi változó nem szerepelt az első modellben, ahol az alapfokú végzettségűek aránya bizonyult szignifikáns változónak. Ez a két potenciális magyarázó változó értelemszerűen erősen korrelál egymással (negatív paraméterrel), ezért egy adott modellben csak az egyiket szerepeltettük a túl erős multikollinearitás elkerülése végett. A 25 év alattiak arányának növekedése az első modellben mérsékelte a közfoglalkoztatottak arányát, a többi három modellben azonban nem volt szignifikáns.

A harmadik modell hasonló eredményeket mutatott, mint a második, aminek alapján kijelenthető, hogy a nemek szerinti bontás nem eredményezett jelentős eltéréseket, bár a konkrét paraméterek természetesen eltérőek. Mivel az egyik kutatási hipotézisünk kifejezetten a nőknek a közmunkában betöltött szerepére vonatkozott, a negyedik modellel próbáltuk megragadni ezt a jelenséget. Ebben az esetben a közfoglalkoztatottakon belül határoztuk meg a nők arányát, és ez szerepelt a modellben mint eredményváltozó. A negyedik modellben ugyanazok a változók bizonyultak szignifikánsnak, mint a második és a harmadik modellben, azonban a paraméterek teljesen eltérő tendenciákat jeleztek. Ezek közül ez egyik legfontosabb, hogy – az általunk megfogalmazott kutatási hipotézisnek megfelelően – a település népességének csökkenése mérsékeli a nők arányát a közmunkások csoportján belül. Ez valószínűleg azzal magyarázható, hogy a kisebb településeken nagyobb a mezőgazdasági munkák szerepe (jellemzően háztáji jelleggel), és sok esetben a nők a férfiaknál nagyobb arányban látják el ezeket a feladatokat.

6 Összegzés

Kutatásunkban azt vizsgáltuk, hogy a település jellege, illetve a településen élők jellemzői hogyan befolyásolják a közmunkaprogramban való részvételt, valamint annak nemek szerinti alakulását. Elemzésünkhöz településszintű adatbázist építettünk, amely településenként az általános makrogazdasági jellemzők mellett tartalmazott munkaerőpiaci adatokat, valamint speciálisan a közmunkában foglalkoztatottak jellemzőire vonatkozó információkat is. Kutatásunkban a logisztikus regresszió módszerével vizsgáltuk a közfoglalkoztatottság helyi alakulását befolyásoló tényezőket. A becsült modellekből az alábbi főbb következtetések vonhatók le az általunk megfogalmazott munkahipotéziseket illetően.

1. Bebizonyosodott, hogy a településnagyság és a közmunka részaránya között negatív kapcsolat van. Ezen túlmenően eredményeinkből az

is kitűnik, hogy a települési közfoglalkoztatás kiterjedtségét a településnagyság és a területi elhelyezkedés mellett jelentősen befolyásolja a településen élő lakosság képzettségi szerkezete, valamint regisztrált álláskeresők aránya is.

2. Eredményeink azt a hipotézist is alátámasztották, hogy a településméret csökkenésével valóban egyre inkább beszűkül az elsődleges munkaerőpiac a férfiak számára.
3. Számításaink szerint elfogadható a harmadik munkahipotézis is, miszerint a településnagyság növekedésével emelkedik a nők aránya a közfoglalkoztatottakon belül.

Az eredmények alapján az is kimutatható volt, hogy a fejlettebb régiókban jellemzően kisebb a közfoglalkoztatottság, de a közfoglalkoztatottakon belül a nők arányára nem meghatározó a regionális elhelyezkedés.

Összességében úgy látjuk, hogy a közfoglalkoztatottság újszerű, településszintű modellezése hozzájárulhat a hazai munkaerőpiaci folyamatok jobb megértéséhez, valamint segíthet a közmunkaprogramok hatékony allokálásában. A kutatás további fejlesztési iránya lehet annak vizsgálata, hogy a közmunkaprogram fokozatos leépítése során milyen területi aspektusok figyelhetők meg, teljesül-e az a logikus elvárás, hogy elsősorban azokon a településeken, régiókban csökkentsék leginkább a közmunkások számát, ahol azt a munkaerőpiaci helyzet indokolja.

Irodalom

1. Azam, Mehtabul et. al (2013), Can public works programs mitigate the impact of crises in Europe? The case of Latvia, *IZA Journal of European Labor Studies*, 2013
2. Bakó Tamás (2015), Skandináv közmunkaprogramok. *Munkaerőpiaci Tükör 2014*. MTA KTI, 63–66.
3. Barát Endre (2013), A magyar közmunka rövid története, *Munkások újsága online*, (2013-09-18), <http://muon.hu/a-magyar-kozmunka-rovid-tortenete/>, letöltés.2016.07.13.
4. Besley, Timothy – Coate, Stephen (1992), Workfare versus Welfare for Arguments for Work Requirements in Poverty-Alleviation Programs, *American Economic Association* 1992. Mar., 249–261.
5. Brown, Alessio J.G. – Koettl, Johannes (2012), *Active Labor Market Programs: Employment Gain or Fiscal Drain?* IZA DP No. 68802012, 2012. 1–48.
6. Card, David – Kluve, Jochen – Weber, Andrea (2010): Active Labour Market Policy Evaluations: A Meta-Analysis. *The Economic Journal* 120 (548), 452–477.
7. Crisp, Richard – Fletcher, Del Roy (2008), A comparative review of workfare programmes in the United States, Canada and Australia. Department for Work and Pensions Research Report No. 533 1–24.

8. Czirfusz Márton (2015), A közfoglalkoztatás térbeli egyenlőtlenségei. *Munkaerőpiaci Tükör 2014*. MTA KTI, 126–138.
9. Dahlberg, Matz – Johansson, Kajsa – Mörk, Eva (2009): *On Mandatory Activation of Welfare Recipients*. Forschungsinstitut zur Zukunft der Arbeit, Institute for the Study of Labor, Discussion Paper, IZA DP No. 3947, 2009 January, 1–39.
10. Eurostat (2015), *Regional Yearbook 2015*, European Union, (ISSN 2363-1716) 1–309.
11. Gábor R. István (2010), Iskolázatlanok – a munkaerőpiac páriái? Élménybeszámoló Köllő János A pálya szélén (Iskolázatlan munkanélküliek a poszt-szocialista gazdaságban) című könyvéről Osiris, Budapest, 254 o., *Közgazdasági Szemle*, 57, 715–717.
12. Ghinararu, Catalin (2012): Working vs doling, Romania’s experience with subsidised community works programmes for the unemployed, Peer Review on „Activation measures in times of crisis: the role of public works” Riga, Latvia, 26-27 April, 2012 1–10.
13. Hajdu Ottó – Vita László – Hunyadi László (2003): *Statisztikai elemzések*. Aula, BKÁE, Budapest
14. Kálmán Judit (2015), A közfoglalkoztatási programok háttere és nemzetközi tapasztalatai, *Munkaerőpiaci Tükör 2014*, 42–58.
15. Kulinyi Márton (2012), „Kígyónak lábsó” avagy utazás a közfoglalkoztatás céljai körül, *Munkaügyi Szemle*, 2012. November
16. Manoudi, Anna (2012): What works with public works? A brief comparison of Practices between Latvia and Greece. Peer Review on „Workplace with Stipend (WWS) Emergency Public Works Programme”, Latvia, 26-27 April 2012, 1–10.
17. Mód Péter (2014), Az aktív foglalkoztatási eszközök fontosabb létszámadatai 2013-ban, Nemzeti Munkaügyi Hivatal, 2014. http://nfsz.munka.hu/engine.aspx?page=full_afsz_a_foglalkoztataspolitikai_eszkozok_mukod, letöltés: 2016. 07.14.
18. Petz Raymund (szerk.) (2011), Aktív munkaerőpiaci politikák komplex értékelése kutatáshoz önkormányzati felmérés készítése és értékelése, Készült a Foglalkoztatási Hivatal megrendelésére, Kerepes, 2011. július, 1–71.
19. Scharle Ágota (2015), Közmunkaprogramok Szlovákiában. *Munkaerőpiaci Tükör 2014*. MTA KTI, 59–61.
20. Scharle Ágota (2016), Mennyit nőtt a foglalkoztatás 2008 óta Magyarországon? *Társadalmi Riport*, TÁRKI. 54–72.
21. Stephan, Gesine – Pahnke, André (2008), The Relative Effectiveness of Selected Active Labour Market Programmes and the Common Support Problem, October 2008, IZA DP No. 3767, 1–35.
22. Subbarao, Kalanidhi et al. (2013), *Public Works as a Safety Net*, The World Bank, Washington D. C.
23. Wooldridge, Jeffrey (2002): *Economic Analysis of Cross Section and Panel Data*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts

ANALYSIS OF THE HUNGARIAN PUBLIC WORK PROGRAM
ON SETTLEMENT LEVEL

The public work is a widespread type of employment in Hungary, the ratio of public workers reached 4 percent among the economically active population in 2015. We analysed the impact of the characteristics of the settlements' population on the ratio of the participation in the public work program and on the proportion of the participants by gender. Our results show that the wideness of public work and the distribution by gender are highly influenced by the size and the location of the settlement, the education structure of the active population and the unemployment rate. We used multinomial logistic regression for the analysis. The database we used is very special; this is the first time that a settlement-level dataset was built about public workers in Hungary.

Since the first decades of the 20th century the governments regard the low unemployment rate as a high priority policy objective. To reach this goal they can apply direct and indirect tools. The set of indirect tools covers the active industrial policy, stimulating the economic growth, encouraging the investments, etc. Among the direct tools we find the governmental job creations programs, and the public work is a popular type of these programs.

The history of the public work programs started in the middle ages. The first documented case happened in India; the construction of a new road was realized within the framework of public work. The public work played a key role in the reconstruction after the World War II in West Germany. Because of the great depression 1929-33 the poverty ratio increased sharply in Hungary. Therefore, the government started a national labour plan in order to reach the „work-based” society. After the 2008-09 financial crisis, many EU member states increased the role of public work. The amount spent on this area reached 0.25-1 percent of the GDP in the beginning of the 2010s (Azam et al, 2013).

Kálmán (2015) lists many motivations for the public work programs, such as anti-cyclical, social policy based, infrastructure developing or emergency management reasons. Subbaro, et al. (2013) adds the fight against poverty, the development of rural areas and diminishing the consequences of natural disasters.

The so-called activation rate⁷ increased fast in the first half of the 2010s in Hungary, and reached 36.2 percent in 2015. Meanwhile the similar indicator showed 13.2 in Slovakia, 6.7 in Greece, 1.3 in the Czech Republic and only 1.1 in Poland. So the Hungarian public work program can be regarded as an extremely extended one.

We set up three hypotheses. 1. The smaller the settlement is; the more extensive the public work is. 2. The smaller the settlement is; the larger the ratio of public workers among male workers is (in other words: in smaller settlements the labour market narrows for male workers). 3. The larger is the settlement; the larger is the ratio of women among public workers.

We used multinomial logistic regression to analyse the factors affecting the evolution of the local public work. Based on our model simulations we can conclude the following (referring to our hypotheses): 1. There is a negative relationship between the settlement size and the ratio of public work. The importance of public work is also influenced by the geographical location, by the education structure of the active population and by the unemployment rate. 2. We can also see that male workers face narrowing labour demand in smaller settlements. 3. In larger settlements we found larger ratio of female workers among the public workers.

According to our computations we can also say that in the developed regions the ratio of public work is smaller than the average. The ratio of women cannot be

⁷Number of public workers divided by the number of public workers and unemployment persons.

explained by the development of the region. All in all we hope that this new way of modelling the settlement level of the public employment can help us to understand better the processes in the labour market and it can help the decision makers to allocate better the resources expended on public work programs.

Key words: labour market, public work, unemployment, logistic regression. *JEL codes:* C10, C25, C54, J21.

VÁRAKOZÁSOK ÉS CSELEKVÉSEK BIZALMI SZITUÁCIÓKBAN: EGY MÓDOSÍTOTT BIZALOMJÁTÉK VIZSGÁLATA AZ EGYSZERŰSÍTETT DIADIKUS ADATELEMZÉS ESZKÖZTÁRÁVAL¹

GELEI ANDREA – DOBOS IMRE

Budapesti Corvinus Egyetem – Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Cikkünk célja a bizalom jelenségének és befolyásoló tényezőinek mélyebb megértése üzleti kapcsolatokban. A bizalmat mikró szintű jelenségként, azaz konkrét partnerek közötti interakciós folyamaton keresztül vizsgáljuk. A bizalom kontextusfüggőségének biztosítása érdekében kidolgoztunk egy módosított bizalomjátékot. Munkánk során összekapcsoltuk az üzleti tudományok és a közgazdaságtani irodalom bizalom értelmezéseit és ezek szintetizálásával megkülönböztetjük a bizalom, a bizalomra méltóság, és a megbízhatóság fogalmait. Olyan módosított, többkörös bizalomjátékot dolgoztunk ki, mely jobban modellezi valós üzleti kapcsolatok működését, mint az egyszerű ismételt bizalomjátékok. Egyrészt játékunkban nem az egyes tranzakciók ismétléséről van szó, hiszen a megosztható összegek a körök során kumulálódtak, és minden körben a kumulált összeg jelentette a játékosok számára a döntési alapot. Másrészt speciális kifizetőfüggvényt alkalmaztunk, mely a valós üzleti kapcsolatokra jellemző kooperatív, azaz versengve együttműködő kapcsolati helyzetet hozott létre. A játék segítségével nyert adatbázist a diadikus adatelemzés speciális módszerével elemeztük, mert annak alapvető célja, hogy a statisztikai vizsgálat során megtartsa és kezelje a kapcsolati kontextust. A diadikus adatelemzésnek az alapadatokra visszavezetett, ún. egyszerűsített statisztikai konstrukciót használtuk. Eredményeink azt mutatják, hogy az általunk kezelt három fogalom elkülöníthető és vizsgálható elemei a kapcsolati bizalom összetett jelenségének. A kapott, illetve visszakapott összegekre vonatkozó várakozások és azok teljesülése hat a kapcsolatban megjelenő bizalomra, de a megbízhatóság és bizalom között nem sikerült bizonyítani az ok-okozati kapcsolatot. Ennek magyarázata lehet, hogy a megbízhatóság értékei a játék egyes körei során csak minimális ingadozást mutattak, hiszen mintánkban a játékosok várakozásai és tényleges cselekvései alapvetően egybeestek egymással.

Kulcsszavak: bizalom, üzleti kapcsolat, módosított bizalomjáték, diadikus adatelemzés

¹E-mail: andrea.gelei@uni-corvinus.hu, dobos@kgt.bme.hu. Beérkezett: 2017. október 11.

1 Bevezetés

Cikkünk középpontjában a bizalomnak a vizsgálata áll. Célunk a kapcsolati bizalom összetett jelenségének és befolyásoló tényezőinek mélyebb megértése üzleti kapcsolatokban. Mint ilyen, számunkra a bizalom mikro szintű jelenség, konkrét partnerek közötti tranzakciókon keresztül figyelhető meg, és lényeges eleme a kontextus függőség. Az empirikus kutatások számára ennek a kontextus függőségnek a kezelése kihívást jelent. Ilyen esetben ugyanis a megfigyelési egység két, egymással valamilyen viszonyban álló adatszolgáltató között meglévő kapcsolat, illetve az abban megfigyelhető jelenségek. A bizalom alakulásának megértéséhez is elengedhetetlen, hogy egymástól az adott jelenség szempontjából függő szereplőktől – azaz pároktól – gyűjtsünk adatokat. Az adott jelenség megfigyeléséhez tartozó két adat, vagy adatpár lesz a statisztikai elemzés egysége. Ezeket a párokat tekinti az ún. diadikus adatelemzés az elemzés egységének, és diádoknak nevezi őket.

A diadikus adatelemzésnél tehát két, egymástól függő kontextusban gyűjtött adatot tekintjük egy megfigyelésnek. Egy megfigyelést egy kételemű vektor ír le, a megfigyelésünk nem egy konkrét szám lesz, hanem ez a kételemű vektor. A statisztikai elemzés pedig e vektorok közötti összefüggéseket vizsgálja. A diadikus adatelemzés kiinduló lépése az adatfelvétel során nyert induló adatbázisnak, benne ezeknek az adattapároknak a megduplázása az ún. kettős adatfelvitel módszerének alkalmazásával. Ilyenkor minden összetartozó adatpárból (diádból) két vektort képezünk úgy, hogy a diád elemeinek (az összetartozó adatoknak) a sorrendjét megváltoztatjuk (Gonzalez – Griffin, 2000). Erre a transzformációra a diadikus adatelemzés javaslata szerint azért van szükség, hogy táblázatok (mátrixok) helyett vektorokkal lehessen az elemzéseket elvégezni, és segítségükkel figyelembe lehessen venni a konkrét párok között zajló tranzakciók során mind az egyéni, mind a páros és ún. kölcsönös hatásokat is.

Az elmúlt években, több munkánkban is ismertettük és alkalmaztuk ennek a viszonylag új matematikai-statisztikai módszertannak néhány eszközét (Gelei et al., 2014; Gelei – Dobos, 2016). Legutóbbi munkáinkban ugyanakkor már a módszertan néhány alapvető megoldásának kritikai elemzésére koncentráltunk. Az eredeti javaslat szerint a kettős adatfelvitel, ez az adatbázis transzformáció azért hasznos, mert segítségével többlet információt nyerhetünk a statisztikai elemzés számára. Ezzel szemben rámutattunk arra, hogy ilyen többlet információt ez az adatbázis transzformáció nem hogy nem biztosít, de alkalmazása komoly módszertani problémákat vet fel (Dobos, 2016). Ezért elsőként elméletileg vezettünk le olyan diadikus statisztikai konstrukciókat (diadikus korrelációs mutatókat és regressziós egyenleteket), melyek a kettős adatbevitel alkalmazása nélkül, az adatfelvétel során nyert alapadatok alkalmazásával számíthatók (Dobos, 2016). Ezt követően elméleti javaslatainkat egy korábbi adatbázisunkon teszteltük is, és azt az eredményt kaptuk, hogy a kettős adatbevitellel nyert, és az alapadatokat felhasználó, általunk javasolt ún. egyszerűsített diadikus korrelációs együtthatók és regressziós egyenletek valóban jó közelítését adják az eredeti, kettős adat-

felvitellel számított konstrukcióknak (Dobos – Gelei, 2018). A kettős adatfelvitelből adódó problémák elkerülése érdekében ezért ebben a munkánkban is ezekkel a – nevezzük – egyszerűsített, az alapadatokra építő diadikus korrelációs mutatókat és regressziós egyenleteket használjuk hipotéziseink tesztelésére.

Mivel célunk a kapcsolati bizalom időbeli alakulásának mélyebb megértése, a páros lekérdezésen nyugvó hagyományos kérdőíves adatfelvétel nem volt célravezető adatfelvételi megoldás számunkra. Ezért a kapcsolati kontextus megtartását biztosító másik adatfelvételi módszerrel, a viselkedélméleti közgazdaságtanban elterjedt játék eszközzel éltünk. Kidolgoztuk a bizalomjáték egy módosított változatát, majd közgazdaság-, illetve gazdálkodástudományi képzésre járó hallgatók részvételével ezt használtuk adatbázisunk kifejlesztésére. Korábbi kutatások igazolták, hogy a gazdasági képzésben részt vevő hallgatók nem viselkednek szignifikánsan különbözően, mint maguk a menedzserek, így az itt tapasztalt viselkedési minták és mechanizmusok jól tükrözik az üzleti partnerek közötti viselkedési mintázatokat (Bolton et al., 2012).

Célunk a bizalom időbeli alakulásának vizsgálata üzleti kapcsolatokban. Ehhez pedig nem egy egyszerű ismételt bizalomjátékra volt szükségünk, ahol az egyes körök függetlenek egymástól, hiszen a játék egyes köreiben az együttműködő felek között felosztható összegek is azok (Bohnet – Huck, 2004; Boero et al., 2009). Saját játékunkban a megosztható összeg a körök során kumulálódott, és a játék minden körében a kumulált összeg jelentette a döntési alapot. Nem ugyanannak a tranzakciónak az egyszerű megismétléséről beszélünk tehát, hiszen az egyes tranzakciók összekapcsolódtak egymással. A játéknak ez a sajátossága sokkal inkább hasonlít tartós üzleti kapcsolatban zajló interakcióhoz, mint annak feltételezése, hogy a két fél közötti tranzakciók egyszerűen ismétlődnek (Ford et al., 2008). Egy olyan játékot alakítottunk tehát ki, melyben az egyes tranzakciók kapcsolódnak egymáshoz, egy adott tranzakció beágyazott, korábbi tranzakciók következménye, és egyben befolyásolója a jövőbeliknek. Ez az összekapcsolódó tranzakciókból álló interakció alakítja ki magát az üzleti kapcsolatot és befolyásolja abban a különböző kapcsolati jellemzők alakulását.

A bizalomjáték egy módosított változatának kidolgozása és alkalmazása azt jelentette számunkra, hogy a bizalom összetett jelenségének értelmezéséhez és operacionalizálásához össze kellett kapcsolnunk a különféle megközelítések fogalomhasználatát. A két megközelítés összekapcsolása során azzal szembesültünk, hogy a bizalom és a hozzá kapcsolódó további jelenségek fogalmi elhatárolása nem teljesen konzisztens, így szükség van azok összehangolására. A bizalom alakulásának megértése szempontjából három fogalom elhatárolását tartjuk alapvetőnek: a bizalom, a bizalomra méltóság és a megbízhatóság fogalmait. Ezek felhasználásával tudtuk a bizalom összetett jelenségét az adott kapcsolatban zajló, összekapcsolódó tranzakciókban és magában a kapcsolatban is konceptualizálni és mérni.

Cikkünk következő fejezetében bemutatjuk a két szakirodalom összekapcsolása alapján ennek a három kiemelt fogalomnak az értelmezését, majd

ezek felhasználásával ismertetjük konkrét hipotéziseinket. Ezt követően bemutatjuk módosított bizalomjátékunkat, és az ezzel nyert adatbázist. A 4. fejezetben ismertetjük az egyszerűsített diadikus adatelemzés eszköztárával kapott eredményeinket. Végül tárgyaljuk eredményeink gyakorlati és elméleti relevanciáját, de kutatásunk korlátjait is, melyek alapján további kutatási irányokat fogalmazunk meg.

2 Bizalom az üzleti kapcsolatokban – az alapfogalmak értelmezése és a hipotézisek megfogalmazása

Mint azt az előzőekben említettük, a kapcsolati bizalom összetett jelenségének értelmezéséhez, alakulásának vizsgálatához többféle szakirodalom szintetizálására volt szükség.

Az üzleti tudományok közül a bizalom kutatásában legnagyobb múlttal a szervezeti magatartás elmélete (Mayer et al., 1995) és a szervezeten belüli marketing (Doney – Cannon, 1997) rendelkezik. Mindkét területre igaz, hogy alapvetően a szervezetek közötti bizalom jelenti a vizsgálódás tárgyát. Nyilvánvaló, hogy a szervezeteket nem lehet ugyanúgy kezelni, mint az egyéneket (Zaheer et al., 1998), mégis ezek a kutatások is elfogadják azt a megállapítást, miszerint a bizalom alapvetően cselekvő egyének viselkedésén keresztül kutatható (Deutsch, 1973). Ezért a szervezeten belüli bizalom kérdését középpontba állító kutatások esetén is az adatfelvételi megoldást használják, hogy a szervezeten belüli bizalmat egyének közötti interakciókon keresztül ragadják meg.

A szervezeten belüli kapcsolatokkal foglalkozó szakirodalomnak két fő áramát különíthetjük el. Az első a bizalom ún. hit (vagy meggyőződés) alapú értelmezését adja (Kumar, 1996). Eszerint a bizalom nem más, mint az adott kapcsolatban a bizalmat adó fél hite arra vonatkozóan, hogy az üzleti csere során a másik fél a bizalmat adó sebezhetőségét nem fogja kihasználni (Morgan és Hunt, 1994).

Mayer et al. (1995) a szervezeti magatartás tudományterületén végzett kutatásaikban ugyanakkor rámutatnak a bizalom fenti értelmezésének leegyszerűsítő jellegére. Arra, hogy ez az értelmezés összemos két fogalmat a bizalom (trust) és a bizalomra méltóság (trustworthy) fogalmait és azokat szinonimaként használja. Értelmezésükben a bizalomra méltóság nem más, mint a bizalmat adó fél (trustor) észlelése arra vonatkozóan, hogy mennyire bizalomra méltó a másik, a bizalmat kapó fél (trustee). Maga a bizalom (trust) kapcsolódik ehhez a jelenséghez, de nem azonos vele! Számukra a bizalom cselekvési hajlandósággént értelmezendő, a bizalmat adó fél hajlandósága arra, hogy adott partnerével való kapcsolata során kockázatos magatartást vállaljon fel. Olyan kockázatos magatartást, mely abból következik, hogy a bizalmat adó a másikkal szemben sérülékeny helyzetben van. Vegyük észre hogy ebben az értelmezésben a bizalomra méltóság egy állomány (stock) jellegű kategória; az adott személy bizalmi készlete, mely aztán konkrét koc-

kázati szituációkban értékelésre kerül, és adott esetben a cselekvés irányítási eszközévé válhat. Amennyiben a bizalomra való méltóság észlelt szintje elegendő, akkor az adott kockázatos kapcsolati szituációban megjelenhet, megmutatkozhat a bizalom, maga a kockázatos cselekvés, mely egy folyamat (flow) alapú koncepció.

Ennek a Tranzakciós költségek elméletére épülő (Williamson, 1975) üzleti értelmezésnek ugyanakkor részben ellentmond a bizalomnak és a bizalomra méltóságnak a hagyományos bizalomjátékban adott értelmezése. A bizalomjáték klasszikus, egykörös változatában (Berg et al., 1995) –, de az azt követő felhasználásokban is (lásd pl. Camerer, 2003; Ostrom – Walker, 2003) – a bizalomhoz kapcsolódó két fogalom – angolul trust és trustworthiness – részben eltérő módon kerül konceptualizálásra. A bizalom (trust) az indító, azaz A játékoshoz, míg a bizalomra méltóság (trustworthiness) a partner B játékoshoz kötődik, de mindkettő az adott játékos cselekvéseként értelmeződik. S bár mindkettő mértékét az aktuálisan át-, majd visszaadott összeg állományával mérik, mindkét fogalom cselekvést tükröz, azaz flow jellegű. A játékos esetében meghatározott nagyságú pénz átadása bizalomként értelmeződik (a korábbiakhoz hasonlóan kockázatos cselekvés), míg B -nél egy megfelelő nagyságú pénzügyösszeg visszajuttatása mutatja annak bizalomra való méltóságát. Az A játékos által a B -nek átadott pénzmennyiség (X) összegével kerül operacionalizálásra és mérésre a bizalom. A bizalomra méltóságot pedig a B által A -nak visszajuttatott összegnek a kapott összeghez viszonyított arányával ($Y/3X$) ragadják meg (lásd pl. Ashraf et al. (2006) munkáját), és jellemzően bizalomra méltónak tartják a partner viselkedését abban az esetben, ha az A által átadott összeg minimum 80%-át B visszajuttatja a kezdő játékosnak (Chang et al., 2010). Ismét hangsúlyozzuk ugyanakkor, hogy ebben az értelmezésben mind a két fogalom a játékosok aktuális cselekvésével (flow) áll összefüggésben, és nem tartalmazza a megbízhatóságnak korábban bemutatott, állomány (stock) jellegű értelmezését, mely a játékosárs tulajdonságát ragadja meg az adott játékos észlelésein keresztül. Pedig ennek a tulajdonságnak, az azzal kapcsolatos észleléseknek hipotézisünk szerint jelentős hatása lehetett adott játékos tényleges cselekvésére! Maradva az egykörös bizalomjáték példájánál, ahol A játékos az indító játékos, azt mondhatjuk: B játékos cselekvése (a játék fogalomhasználatában bizalomra méltósága) természetesen befolyásolja A vélekedését róla.

A bizalomjáték hagyományos fogalomhasználatában a bizalomra való méltóság B játékos cselekvéseként (flow), míg a szervezetközi kapcsolatokat kutató szakirodalom azt a bizalmat adó fél észleléseként (stock) értelmezi. Legjobb tudomásunk szerint sem az angol, sem a magyar nyelvű szakirodalom nem tesz javaslatot arra, hogy a trustworthy szervezetközi kapcsolatok kutatásához kötődő irodalmában megjelenő állomány jellegű koncepcióra milyen kifejezést használjunk. Javasoljuk ezért a továbbiakban a megbízhatóság (reliability) kifejezés használatát. A kapcsolatokban megjelenő bizalom összetett jelenségének leírására tehát a továbbiakban három fogalmat használunk, és az előzőeknek megfelelően azokat a következőképpen értelmezzük:

- *Bizalom (trust)*: a bizalmat adó fél olyan cselekvése, melyben hajlandó adott partnerével kialakuló kapcsolati szituációban kockázatot, azaz sérülékenységét felvállalni (flow).
- *Bizalomra méltóság (trustworthiness)*: a bizalmat kapó fél konkrét cselekvése, melyben megmutatkozik, hogy az adott szituációban ő mennyire felelt meg – vagy éppen nem felelt meg – a bizalmat adó fél vele kapcsolatos várakozásainak, miszerint az nem fog visszaélni sérülékenységeivel (flow).
- *Megbízhatóság (reliability)*: A bizalmat adó fél véleménye a kockázatos cselekvést megelőzően arról, hogy a bizalmat kapó partner mennyire viselkedik majd korrekt módon és él vissza a bizalmat adó fél kiszolgáltatott helyzetével. A bizalmat kapó fél jellemzője (stock).

A szakirodalomban fellelhető néhány olyan kutatás, mely a megbízhatóság vizsgálatát is igyekszik beépíteni a bizalomjátékba. Chang et al. (2010) például kutatásaikban azt vizsgálták, hogyan befolyásolja a felek döntéseit, cselekvéseit a partnerrel kapcsolatos első benyomásuk, ahol ez a benyomás a cselekvő félnek a partner megbízhatóságára vonatkozó észleléseként értelmeződik. Mások a reputáció hatását elemzik, ami szintén az adott fél észlelt megbízhatóságával hozható összefüggésbe (Boero et al., 2009). Legjobb tudomásunk szerint ugyanakkor olyan kísérletet még nem végeztek, mely egy többkörös játék keretei között közvetlenül, explicit módon mérte volna a megbízhatóságra vonatkozó aktuális észleléseket, azok változását a játék egymást követő lépéseinek függvényében, és vizsgálta volna annak hatását a cselekvési hajlandósággént (flow) értelmezett bizalomra.

Játékunk másik jellegzetessége, hogy a visszavárt összegekre vonatkozó várakozásokat is lekérdeztük a játékosoktól, minden körben. A bizalomjáték szakirodalmában található olyan munka, mely a visszakapott pénzre vonatkozó várakozások mérését építi be a játékba. Chaudhuri és Gangadharan (2007) például az egykörös bizalomjátékot összekötik az egykörös diktátor-játékkal, s ennek során a játékosoktól lekérdezték, hogy mekkora összeget várnak vissza társuktól. Eredményeik szerint az egykörös bizalomjátékban a reciprocitásra vonatkozó várakozások (azaz a visszavárt összegek nagysága, bizalomra való méltóság – flow) hat a bizalom szintjére (A , azaz a játékot kezdő fél cselekvésére, bizalom – flow).

Annak érdekében, hogy a bizalom (cselekvési hajlandóság – flow) alakulását, befolyásoló tényezőit jobban megértsük, játékunkban mi mind az észlelt megbízhatóság szintjére (stock), mind a játék során visszavárt összegekre (bizalomra méltóság, angolul trustworthiness; flow) direkt módon, a játék valamennyi körében rákérdeztünk, mert hipotéziseink szerint a cselekvési hajlandósággént értelmezett bizalom alakulása két tényezőtől is függhet:

- A bizalmat adó félnek a bizalmat kapó fél megbízhatóságára (reliability) vonatkozó észlelésétől;

- A bizalmat kapó fél bizalomra méltóságának szintjére vonatkozó várákozásaitól, azaz attól, mit gondol az adott játékos, mennyit kap majd vissza társától (trustworthiness);
- Az ugyanakkor, hogy miként viszonyul egymáshoz adott játékos partnerétől visszavárt és a tőle ténylegesen visszakapott összeg – nevezzük ezt bizalmi elégedettségnak – szintén hatással lehet a partner észlelt megbízhatóságának alakulására.

A fentiek alapján konkrétan az alábbi hipotéziseket fogalmaztuk meg:

H1: A játék egyes körei, tranzakciói szintjén mért bizalmat (azaz a kiszolgáltatót helyzetben lévő fél által átadott összeg nagyságát) befolyásolja, hogy mekkora a bizalmat kapó fél megbízhatóságának észlelt szintje.

H2: A játék során a tranzakció szintjén mért bizalmat befolyásolják a játékosoknak a partnerüktől visszakapott összegre – azaz a tranzakció szintjén mért bizalomra való méltóságra – vonatkozó várákozásai.

H3: A játékosok észlelt megbízhatóságának alakulását a partnerének ténylegesen átadott pénzüsszegekre vonatkozó várákozások és a ténylegesen megkapott összegek különbségeként értelmezett ún. bizalmi elégedettség befolyásolja.

3 A módosított bizalomjáték és az adatfelvétel ismertetése

Hipotéziseink tesztelésére – mint említettük – a kísérleti közgazdaságtanban jól ismert bizalomjáték (Berg et al., 1995) egy módosított változatát dolgoztuk ki. A kísérlet résztvevői a Budapesti Corvinus Egyetem diákjai voltak, akiket elsősorban az egyetem belső hírlevelén keresztül értünk el. Bennünket alapvetően az üzleti kapcsolatokban zajló jelenségek érdekeltek. Korábbi kutatások igazolták ugyanakkor, hogy a gazdasági képzésben részt vevő hallgatók nem viselkednek jelentősen különbözően az üzleti szereplőkhöz képest (Bolton et al., 2012). Ezért a hallgatói minta alapján levont következtetések nagy valószínűséggel az üzleti szereplők interakcióira is igaznak tekinthetők. A jelentkezés a játékokra és a részvétel önkéntes volt. A kísérletekre az egyetem számítógépes laborjában került sor, a játék során a párok számítógépen keresztül kerültek kapcsolatba egymással. Minden esetben két kutató részvételével zajlott az adatfelvétel. Az adathalmazt 7 játékkal sikerült összegyűjteni 49 pártól. Ez azt jelenti, hogy átlagosan 7 pár volt jelen egy 30 fős teremben az adatfelvétel során, és egyetlen alkalommal sem haladta meg a párok száma a 10-et. A terem nagysága és az adatfelvétel során jelen lévő hallgatói létszám lehetővé tette, hogy nagyobb távolságokra üljenek egymástól a felek, és ne lássák egymás képernyőit sem, tehát véletlenül se tudják beazonosítani egymást az aktuális párok.

Elsőként a tájékoztatót osztottuk ki számukra, melyben a játék szabályait, menetrendjét és a szükséges számítógépes instrukciókat rögzítettük. Az ennek átoltvasásához igényelt idő változó hosszúságú volt, de a szükséges időkeretet mindig biztosítottuk. Amennyiben valaki kézfeltartással jelezte, hogy kérdése van, azt vele személyes konzultációban, a többieket nem befolyásolva tisztázni tudtuk. Egy-egy adatfelvétel teljes ideje (ültetés, instrukciók elolvasása, esetleges kérdések tisztázása, maga a játék, majd a nyeremény kifizetése) jellemzően szűk másfél órát vett igénybe. A tényleges játék jellemzően 30 percig tartott. A résztvevők a tájékoztató aláírásukkal igazolták, hogy az adatfelvétel korábbi fordulóiban még nem vettek részt. A játék végén a játékosok elhagyták a labort, az elért eredmény és a kifizetőfüggvény által meghatározott tényleges nyereményüket egy távolibb teremben tudták felvenni. A modell számítógépes verzióját magunk fejlesztettük és programoztuk (Excelben). Az 1. ábra programunk kezdő felületét mutatja *B* játékos esetében.

Jelenlegi Kör 1
A SÁRGA CELLÁKAT TÖLTSD, MAJD MENTÉS

"A"-tól kapott összeg	5
Felkamatozott összeg	15
Kör eleji pénzállomány	15
Ennyi %-át adom "A"-nak ebben a körben	50%
Tehát "A" ennyi ECU-t kap a körben	8
A kör végi pénzállomány	7
Mennyire bízik meg játékostársában?	kevésbé
Mekkora összeget vár "A"-tól a maximális érték %-ában? (0% - 100%)	50%

Mentés

Frissítés

A párod válaszána
lekéréséhez
Próbáld többször
míg a válasz megjön

Játékos	"A"	"B"
Összes ECU	13	7

A SÁRGA CELLÁKAT TÖLTSD, MAJD MENTÉS

1. ábra. A *B* játékosok kezelőfelülete a programban

Mindkét játékos számára látható volt az adott körben megkapott összeg, *B* játékos esetében annyi különbséggel, hogy külön tételként jelent meg az *A*-tól kapott összeg 3-szoros szorzóval megnövelt értéke is. A játékosoknak azt kellett az egyes körökben megadniuk, hogy az összes rendelkezésre álló pénzállomány mekkora részét adják át az adott körben a másik játékos számára. A százalékosan megadott összeget a program *ECU*-ban kiszámolta, és mutatta az átadás utáni *ECU*-megoszlás aktuális állapotát is. A játékosoknak emellett minden körben meg kell adniuk a másik játékosról alkotott véleményüket a megbízhatóság tekintetében (1-től 5-ig terjedő szöveges skálán). Az aktuális véleményüket pedig minden körben egy legördülő menüből kellett kiválasztaniuk. Továbbá azt is meg kellett adniuk százalékban kifejezve, hogy a játékostárs összes rendelkezésre álló pénzéből, mekkora arányban várnak vissza pénzösszeget. A kísérlettel célunk volt megfigyelni azt, hogy a várakozások és

a tényleges visszaulások befolyásolják-e a megbízhatóság szintjének változását, tehát azt, hogy a játékos mennyire tartja társát megbízhatónak. Egy-egy adatfelvétel teljes ideje (ültetés, instrukciók elolvasása, esetleges kérdések tisztázása, maga a játék, majd a nyeremény kifizetése) jellemzően szűk másfél órát vett igénybe. Ebből maga a játék kb. 30 percig tartott. A játék végén a játékosok elhagyták a labort, a játékban elért eredményt egy távolibb teremben tudták meg.

Fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy alapkérdésünk szempontjából lényeges jellemzője a játéknak, hogy a játékosok megbízhatóságának mérését beépítettük a játékba, mégpedig oly módon, hogy annak alakulását csak a szereplők játékban mutatott aktuális döntései befolyásolták, tehát a játékosoknak semmilyen előzetes információjuk játéktársukról, pl. azok reputációjáról (Boero et al., 2009) nem volt.

Fontos továbbá a játék azon sajátossága is, hogy míg korábbi ismételt játékokban az egyes körök a felosztható összeg tekintetében függetlenek voltak egymástól (Bohnet – Huck, 2004; Boero et al., 2009), ebben a játékban a megosztható összeg a körök során kumulálódott. Célunk ezzel az volt, hogy az üzleti kapcsolatokban megjelenő összetett interakciós folyamatot modellezzünk, mely hosszabb időtávot, több összekapcsolódó, egymásra ható és visszaható eseményt (tranzakciót) felölelő folyamat, mely során a felek között sokszor kölcsönös befektetésekkel járó adaptáció zajlik, hiszen a közös célok, üzleti siker elérése érdekében együtt kell működniük egymással. Ezek az üzleti kapcsolatok sem örökkévalók ugyanakkor, azok több év után jellemzően felbomlanak. A kölcsönös egymásra utaltság megszűnése pedig teret engedhet az opportunistá viselkedésnek. Alapvetően egy ilyen kooperatív, azaz együttműködve versengő kapcsolati szituáció kialakítására törekedtünk a játék megtervezésekor. Ezt támogatta a speciális kifizetőfüggvényünk, mely a következőképpen alakult:

$$F_A(I_T^A) = G \cdot \delta(I_T^A - I_T^B) + \frac{I_T^A + I_T^B}{10M^T} \cdot K,$$

valamint

$$F_B(I_T^B) = G \cdot \delta(I_T^B - I_T^A) + \frac{I_T^A + I_T^B}{10M^T} \cdot K,$$

ahol

G – a győztesnek járó prémium összege,

K – a közösen szerzett összes ECU alapján járó jutalom,

M – a befektetési szorzó, végül

T – a körök száma.

A fenti a paraméterek játékunkban a következőképpen alakultak: $G=500$ Forint, $K=1000$ Forint, $M = 3$ és a körök száma 10 volt.² Mint azt korábban is hangsúlyoztuk, játékunk eltér valamennyi korábbi általunk ismert ismételt

²A fenti kifizetőfüggvény alapján váltottuk át az ECU -ban mért nyereményeket forintra. A játék során ténylegesen megszerzett nyeremények erősen szórtaak. A legmagasabb összeg 2000 forint volt, de ez igen ritkán fordult elő. Leggyakrabban előforduló nyeremény összeg 600 forint volt.

bizalomjátékoktól abban, hogy mindent körben az adott játékos, az aktuálisan nála lévő, az előző körök döntéseinek eredményeként felhalmozódott pénzösszegekről dönthetett. Összességében tehát a játékos párokat a 10 körös kapcsolatokban együttműködve versengő helyzetbe helyeztük.

A játék minden körében közvetlenül mértük mind a bizalom, a bizalomra való méltóság, de a megbízhatóság alakulását is. E speciális, dinamikus bizalomjátékot használtuk munkánkban arra, hogy teszteljük hipotéziseinket.

Az adatfelvétel mind értékben (*ECU*), mind %-os arányban biztosított tehát adatokat számunkra. Mindkét adatfelvételi mód esetében elvégeztük számításainkat, melyek nem mutattak lényegesen eltérő eredményt. Ezért a továbbiakban csak a %-os adatok felhasználásával kapott eredményeket tárgyaljuk. A %-os adatok használata mellett szól az az érv is, hogy a játék során át-, és visszaadott összegek kumulálódásának lehetősége miatt nagy *ECU* összegekkel végzett statisztikai elemzések során az ún. volumenhatást ily módon ki tudtuk szűrni.

Fontos megjegyeznünk, hogy a 49 pár által játszott, egyenként 10 körből álló bizalomjáték minden köre, azaz tranzakciója az elemzésünk során használt alapsokaság egy-egy elemének tekinthető, hiszen a kutatásunk szempontjából kiemelt kérdés, a bizalom, a bizalomra méltóság és a megbízhatóság kapcsolatrendszerének megértése az egyes konkrét tranzakciókhoz kapcsolódik, ezek mentén is került lekérdézésre. Az alapsokaságunk nagysága tehát $N = 490$.

Hipotéziseink vizsgálatához az alábbi változókat használjuk:

- x_t a t -ik periódusban az A játékos által B játékosnak átadott *ECU* mennyisége (a hagyományos bizalomjáték értelmezésében ez a bizalom - flow),
- y_t a t -ik periódusban az B játékos által A játékosnak átadott *ECU* mennyisége (a hagyományos bizalomjáték értelmezésében ez a bizalomra való méltóság - flow),
- y_t^e az A játékos azon várakozása, hogy mekkora összeget kap B -től a t -ik periódusban,
- x_t^e a B játékos azon várakozása, hogy mekkora összeget kap A -tól a t -ik periódusban,
- R_t^B az B játékos megbízhatóságának szintje, ahogyan azt a t -ik időpontban az A játékos észleli,
- R_t^A az A játékos megbízhatóságának szintje, ahogyan azt a t -ik időpontban a B játékos észleli.

4 A bizalom alakulását befolyásoló tényezők – a módosított bizalomjátékkal nyert adatbázis elemzésének kutatási eredményei

A bevezetőben jeleztük, hogy korábbi munkánk eredményeképpen rendelkezésre állnak olyan diadikus korrelációs együtthatók és regressziós egyen-

letek, melyek megtartják az elemzés során a bizalom mikro szinten vizsgált változásaihoz szükséges kapcsolati kontextust az elemzés során, de nem használják a kettős adatfelvitelt, és így kiküszöbölik az ebből adódó módszertani problémákat. Adatbázisunk vizsgálatát és hipotéziseink tesztelését ezekkel az alapadatokra visszavezetett diadikus adatelemzési konstrukciókkal végeztük el. A modellünkben vizsgált változók leíró elemzése részletesen megtalálható a már említett Gelei et al. (2018) cikkben, ezért itt csak ennek legfontosabb megállapításait foglaljuk össze, majd részletesebben tárgyaljuk a változók közötti összefüggéseket és hipotéziseink tesztelését.

4.1 A vizsgált változók leíró elemzése

A játékot indító fél, azaz *A* játékos jellemzően a rendelkezésre álló összeg majdnem 70%-át adta át partnerének. Várakozásai ennél valamivel alacsonyabb arányt tükröztek, a rendelkezésre álló teljes összeg átlagosan 66,7%-ra vonatkoztak. *B* játékosnál pont fordított volt a helyzet, a visszavárt összegek a rendelkezésre álló teljes pénzállománynak több mint 70%-ra vonatkoztak, de ők csak annak alig több mint 68%-át adták vissza játékosársuknak. A felek megbízhatóságával kapcsolatban megállapítható, hogy az közepes szintű volt. A megbízhatóság induló szintjének átlagértéke az ötös skálán 3,71 volt, változása pedig minimális, de negatív, azaz a megbízhatóság a játék előre haladtával valamit csökkent. A változások itt is a játék kezdő (első kettő) és befejező (utolsó három) köreiben mutattak valamivel erőteljesebb ingadozást, de azok még itt is igen kicsik voltak.

A megbízhatóság változásának már említett kis mértéke magyarázható az adott játékosok által társuktól visszavárt és a ténylegesen visszakapott összegek közötti eltérések kis mértékével, hiszen *A* játékos esetében a játék első köreiben a várakozások kisebbek voltak, mint a visszakapott összegek, ami a játék végére fordítottan alakult, a különbségek azonban itt sem voltak nagyok. A köztes körökben nagyságrendileg megegyeztek a visszavárt és a ténylegesen visszakapott összegek. A játék elején fordított helyzet alakult ki *B* esetében, aki többet várt vissza társától, mint amennyit ténylegesen kapott. Ezt követően *B*-nél a várt és visszakapott összegek végig nagyjából megegyeztek. Ezek az adatok is alátámasztják a tanulással kapcsolatban korábban már említett jelenséget.

Amennyiben az egyes játékosok által átadott és az általuk visszavárt összegek időbeli alakulását nézzük, egy lapos, fordított U alakú görbét kapunk mindkét játékos esetében, egy közepes %-os értékről mindkét játékos esetében a 3-4. körre az átadott és a visszavárt összegek egyaránt 78-80% körül stabilizálódtak, majd a játék utolsó köreiben ismét csökkentek. A kifizető-függvényt maximalizáló játékosokat feltételezve mindkét fél az első körtől kezdve maximális kooperációval érheti el a játékban felosztható összegnek és a tényleges nyereségynek a nagyságát. A valós viselkedés ennél alacsonyabb kooperációs hajlandóságot mutat. Az első néhány kör tanulási folyamata után is csak 78-80% körül stabilizálódik. Ez az arány azért érdekes, mert korábbi kutatások is kritikus értéknek tekintették a 80%-ot, hiszen

akkor tekintettek egy játékos adott tranzakcióban bizalomra méltónak, ha az általa visszajuttatott összeg elérte, vagy meghaladta a teljes rendelkezésre álló összeg 80%-át (Chang et al., 2010). Ez az arány több körös játékunkban is kritikus értéknek bizonyult.

4.2 Az alapadatokra visszavezetett diadikus korrelációk alkalmazása a dinamikus bizalomjáték adatbázisán

A játék változóinak leíró bemutatását követően az azok közötti összefüggések vizsgálatát végeztük el. A játék szükségszerűen párok közötti adatfelvételt jelent, ami lehetővé teszi a diadikus adatelemzés matematikai–statisztikai módszertanának alkalmazását. Mi a kettős adatfelvételt elhagyó, az alapadatokat használó módosított diadikus korrelációkat használjuk ezen összefüggések elemzéséhez (Dobos, 2016; Dobos – Gelei, 2018).

A diadikus adatelemzés során első kérdés az adatok homogenitásvizsgálata, annak megállapítása, hogy megkülönböztető, vagy felcserélhető esetről van-e szó. Amikor az adatfelvétel során a párt alkotó két válaszadó előre egy releváns szempont szerint nem különböztethető meg egymástól, felcserélhető esetről beszélünk. Mint azt a 2. fejezetben tárgyaltuk, a klasszikus egykörös, de akár a sima ismételt játék esetén is, a két játékosárs pozíciói előre meghatározottak: a bizalmat adó fél a kezdő, azaz az A játékos, míg a bizalmat kapó fél a B játékos. Ugyanakkor a módosított játékunkban – mint arra már korábban is utaltunk – az első és az utolsó kör kivételével a kifizetőfüggvényt maximalizáló játékosokat feltételezve ezek a pozíciók összecsúsznak. Különösen érdekes kérdés ezért a homogenitásvizsgálat a játékosok által egymásnak átadott összegek tekintetében, hiszen az ezzel kapcsolatos homogenitásvizsgálat eredménye megcáfolhatja, vagy éppen megerősítheti a szerepek, pozíciók összecsúszásával kapcsolatos korábbi logikai érvelésünket.

Három változótípusnak és hat változónak van kiemelt jelentősége: a cselekvési hajlandóságként értelmezett bizalomnak (x_t), valamint bizalomra méltóságnak (y_t), de az ezekre vonatkozó várakozásoknak (x_t^e és y_t^e), valamint a felek észlelt megbízhatóságainak (R_t^B és R_t^A) is. A homogenitásvizsgálatot az induló adatállomány felhasználásával a vizsgált változókra a párok által adott válaszok közötti korreláció számításával [pl. $r(x_1, x_2)$ és $r(y_1, y_2)$] végeztük el. Mindhárom változó esetén a válaszadó párok mentén létrejövő páros mintákat az átlagokra vonatkozóan t -teszttel és Pearson-korrelációval elemeztük.

	Páros eltérések							
	Átlag	Átlagos eltérés	Standard hiba	A különbségek 95%-os konfidenciaintervalluma		t	df	Szignif.
				Alsó végpont	Felső végpont			
x_t és y_t	1,578%	33,885%	1,5307%	-1,428%	4,586%	1,031	489	,303
x_t^e és y_t^e	-4,595%	34,194%	1,544%	-7,631%	-1,560%	-2,975	489	,003
R_t^B és R_t^A	,0367	1,292	,058	-,078	,151	,629	489	,530

1. táblázat. A t -teszt eredményei

Eredményeink azt mutatják, hogy mind a játékosok által társuknak átadott pénz nagysága, mind a felek által észlelt megbízhatóság szintje tekintetében a párokat alkotó játékosok szignifikánsan azonos válaszokat adtak, azaz ebben a tekintetben felcserélhető esetekről beszélhetünk. Az x_t és az y_t esetén kapott eredményünk így megerősíti korábbi logikai érvelésünket, miszerint az egykörös bizalomjátékkal – de az egyszerű ismételt bizalomjátékokkal – szemben is az általunk kifejlesztett dinamikus játék esetében a bizalmat adó és a bizalmat kapó fél tiszta szerepei összecsúsznak, a játék köre során a két fél felváltva kerül a bizalmat adó és a bizalmat kapó pozíciójába. A játék során a partnerek másiktól visszavárt összegei azonban már lényegesen eltérnek egymástól, azaz ebben a tekintetben megkülönböztető esetről van szó.

	N	Korreláció	Szignif.
x_t és y_t	490	,528	,000
x_t^e és y_t^e	490	,414	,000
R_t^B és R_t^A	490	,287	,000

2. táblázat. Az összetartozó adatpárok közötti Pearson-korreláció

A korrelációs eredmények tükrében megállapíthatjuk, hogy a játékban az A és a B játékos által egymásnak átadott pénzösszegek nagysága, valamint a visszavárt pénzekre vonatkozó várákozásaik közepesen erősen függnek össze. A felek által partnerük kapcsán észlelt megbízhatóság szintje viszont, mint említettük, nem homogén, és csak gyenge lineáris kapcsolatot mutat.

A játék kiemelt változói közötti diadikus korrelációk

A diadikus jelenségek során a következő korrelációtípusokat vizsgálhatjuk, melyeket az alapadatokra épített mutatók alapján jól közelíthetünk³:

1. A párt alkotó egyik személy (válaszadó) különböző kérdésekre adott saját válaszai közötti korrelációt a válaszadó belső korrelációjának (overall within-partner correlation) nevezzük.
2. A párt alkotó személyek közötti keresztkorreláció (cross-intraclass correlation). Egy pár egyik tagjának bizonyos kérdésre adott válasza milyen kapcsolatban van a társának egy másik kérdésre adott válaszával.
3. Az egyéni szintű korreláció.
4. A páros szintű (r_d) korreláció.

A 3. táblázat emlékeztetőül ismét bemutatja az ezek esetén javasolt közelítéseinket.

³A diadikus adatelemzés használja a diád szintű korreláció (mean-level correlation, vagy correlation between dyad means) fogalmát is, mely a párok által adott válaszok átlagai közötti összefüggést vizsgálja. Ez ugyanakkor a korábban javasolt alapadatokra visszavezetett mutatóval nem volt jól becsülhető (Dobos – Gelei, 2018), ezért ennek használatától most eltekintünk.

A korreláció típusa	Közelítések az alapadatok felhasználásával
A válaszadó belső korrelációja	$r(X, Y) \sim \frac{1}{2}[r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)]$
A párt alkotó személyek közötti keresztkorreláció	$r(X, Y') \sim \frac{1}{2}[r(x_1, y_2) + r(x_2, y_1)]$
Diád szintű korreláció	$r_m(X, X', Y, Y') = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Egyéni szintű korreláció	$r_i(X, X', Y, Y') \sim r(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

3. táblázat. A páros adatbevitelű korrelációk és közelítése az alapadatok segítségével

A három vizsgált változó típus kapcsán a diadikus adatelemzés megközelítésében több kérdés feltehető:

1. Van-e összefüggés a játék során a felek egymásnak ténylegesen átadott pénzüsszegei között (x_t és y_t)? Ennek vizsgálatához a párt alkotó személyek közötti keresztkorreláció (intra-class correlation) szükséges.
2. Mennyire függ össze a partnerek által a másíknak átadott összegek nagysága és az adott kapcsolatban a felek észlelt megbízhatóságának szintje? (x_t és R_t^B , illetve y_t és R_t^A között). Itt a párt alkotó személyek közötti keresztkorreláció (cross-intra-class correlation) számítására van szükség.
3. Kimutatható-e összefüggés a partnertől visszakapott összegekre vonatkozó várakozások és a tényleges tranzakció szintű viselkedés, azaz a játék körei során ténylegesen átadott pénz nagysága között? (A játékos szempontjából: y_t^e és y_t ; B szempontjából: x_t^e és x_t). Ez a párt alkotó személyek közötti keresztkorrelációval (cross-intra-class correlation) vizsgálható.
4. Kimutatható-e összefüggés a partnertől visszakapott összegekre vonatkozó várakozás és a felek észlelt megbízhatósága között? (A szempontjából: y_t^e és R_t^B , illetve B szempontjából x_t^e és R_t^A között.) Ezt a párt alkotó személyek közötti keresztkorreláció (cross-intra-class correlation) mutatja meg.

Az alapadatokra visszavezetett, javasolt korrelációs mutatók alkalmazásával kapott eredményeket foglaltuk össze a 4. táblázatban.

		x_t	y_t	y_t^e	x_t^e	R_t^B	R_t^A
x_t	Pearson-korreláció		,528**	,663**	,498**	,008	,071
	Szignif. (kétoldalú)		,000	,000	,000	,862	,115
y_t	Pearson-korreláció			,516**	,531**	,031	,008
	Szignif. (kétoldalú)			,000	,000	,487	,854
y_t^e	Pearson-korreláció				,414**	,022	,002
	Szignif. (kétoldalú)				,000	,631	,963
x_t^e	Pearson-korreláció					,034	-,036
	Szignif. (kétoldalú)					,449	,430
R_t^B	Pearson-korreláció						,287**
	Szignif. (kétoldalú)						,000**

**0,01 szinten szignifikáns korrelációk

4. táblázat. A vizsgált diadikus korrelációk alapadatokra visszavezetett mutatókkal kapott eredményei a játék változói esetében

Az első kérdés kapcsán megállapíthatjuk, hogy a játékosok által partnereiknek a kísérlet 10 köre során át-, majd visszaadott pénzüsszegek közepesen erős korrelációt mutatnak, ami a leíró eredményeket bemutató rész alapján várható is volt.

A játék során a párok tényleges viselkedése (át- és visszaadott pénzüsszegek) és a partnerek egymás kapcsán észlelt megbízhatósága között ugyanakkor nem tudtunk kimutatni lineáris kapcsolatot. Érdekes megfigyelni ugyanakkor, hogy ezek az alacsony korrelációs értékek közel azonosak A és B játékos esetében. A valós pénzügyi átadások közepesen erős lineáris kapcsolatban vannak a várákozásokkal.

A kapott összegek (x_t és y_t), valamint a játékosok rájuk vonatkozó várákozásai (y_t^e és x_t^e) közötti korrelációk közepesen erősek. A játékos által átadott összeg és a B -től általa visszavárt összeg közötti korreláció valamivel erősebb (0,663), míg e két változó közötti lineáris kapcsolat a másik játékos esetében (0,531).

A partnertől kapott összegekre vonatkozó várákozások (A játékos esetén x_t^e , míg B játékos esetén y_t^e) függetlenek a játékosok egymás kapcsán észlelt megbízhatóságának szintjeitől (R_t^B és R_t^A).

Diád szintű korrelációk

Mint tudjuk, a diád szintű korreláció olyan korreláció, amely két újonnan bevezetett változó közötti korrelációt úgy értelmez, hogy a diádok megfigyeléseinek összegével azonosítja azt. Esetünkben ez azt jelenti, hogy egy kérdésre az adott pár válaszainak összegeként képződik egy új változó, amit a diád szintű jelenségek megjelenítéseként értelmezzünk. A diád szinten vizsgált változók tekintetében kapott eredményeinket tartalmazza az 5. táblázat.

		y_t^e és x_t^e _diád	R_t^B és R_t^A _diád
x_t és y_t _diád	Pearson-korreláció	,754**	,044
	Szignif. (kétoldalú)	,000	,332
y_t^e és x_t^e _diád	Pearson-korreláció		,007
	Szignif. (kétoldalú)		,881

**0,01 szinten szignifikáns korrelációk

5. táblázat. Diád szintű korrelációk az alapadatok felhasználásával

A diádok szintjén a játék során párt alkotó személyek által egymásnak ténylegesen át- és visszaadott pénzüsszegek és az erre vonatkozó várákozások erős korrelációt mutatnak. Ugyanakkor mind a ténylegesen megosztott összegek, mind az azokra vonatkozó várákozások lineárisan függetlennek bizonyultak a felek észlelt megbízhatóságától.

Egyéni szintű korrelációk

Az egyéni szintű korreláció a két vizsgált társas változó közötti kapcsolatot a páros hatások kiszűrésével mutatja. Azt tükrözi, hogy mennyiben tér el a diád két tagja egymástól. Míg a diád szintű korreláció a változók összegeként értelmezhető, az egyéni szintű korrelációs mutató a változók különbségeként ragadható meg.

Egyéni szinten a kísérletben használt, módosított bizalomjátékunk résztvevő párijai esetében az átadott összegek szignifikáns, de igen gyenge kapcsolatban állnak az ezekre vonatkozó várakozásokkal. Most is azt tapasztaltuk ugyanakkor, hogy a felek megbízhatóságára vonatkozó észlelések mind a két másik változótól lineárisan függetlenek tekinthetők.

		y_t^e és x_t^e -egyéni	R_t^B és R_t^A -egyéni
x_t és y_t -egyéni	Pearson-korreláció	-,181**	-,078
	Szignif. (kétoldalú)	,000	,085
y_t^e és x_t^e -egyéni	Pearson-korreláció		,038
	Szignif. (kétoldalú)		,403

**0,01 szinten szignifikáns korrelációk

6. táblázat. Egyéni szintű korrelációk az alapadatok felhasználásával

4.3 Hipotézisvizsgálat – bizalom, bizalomra való méltóság és megbízhatóság összefüggései

Kutatásunk az üzleti kapcsolatokban megfigyelhető bizalom összetett jelenségének mélyebb megértését célozta. Három hipotézist fogalmaztunk meg az irodalmi összefoglalást követően, melyek e három bizalmi jelenség közötti ok-okozati kapcsolatokra vonatkoztak. Hipotéziseink tesztelésére az APIM modellt használtuk fel, vagyis a közös hatásokat is figyelembe vettük. Mint azt a korábbi munkánkban (Dobos, 2016) levezettük, ennek a modellnek az alapadatokra visszavezetett regressziós egyenletei a következők:

$$y_1 = \beta_{01} \cdot 1 + \beta_{11} \cdot x_1 + \beta_{21} \cdot x_2 + \beta_{31} \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle + \varepsilon_{11},$$

$$y_2 = \beta_{02} \cdot 1 + \beta_{12} \cdot x_2 + \beta_{22} \cdot x_1 + \beta_{32} \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle + \varepsilon_{12},$$

ahol a kettős adatbevitelre épülő APIM modell korábbi négy együtthatója helyett most nyolcat kell becsülni. Az alapadatok felhasználása esetén a két becslőfüggvény két független egyenletre esik szét, melyeket nem köt össze a közös együttható. Az ε_{11} és ε_{12} értékek pedig a becslés hibái.

Elsőként vizsgáljuk meg a cselekvésként értelmezett, a játék egyes köreinek, tranzakciónak szintjén mért bizalom és a felek észlelt megbízhatósága közötti kapcsolatra vonatkozóan megfogalmazott hipotézisünket, melyet a követhetőség érdekében most megismétlünk:

H1: A játék egyes körei, tranzakciói szintjén mért bizalmat (azaz a kiszolgáltatót helyzetben lévő fél által átadott összeg nagyságát) befolyásolja, hogy mekkora a bizalmat kapó fél megbízhatóságának észlelt szintje.

Eredmény-változó	Magyarázó változók	R	R^2	Korrigált R^2	Véletlen tényező becsült szórása
x_t	R_t^B, R_t^A és $R_t^B - R_t^A$ -közös	,078	,006	,000	36,340%
y_t	R_t^B, R_t^A és $R_t^B - R_t^A$ -közös	,077	,006	,000	33,216%

7. táblázat. Ok-okozati modellünkben a felek észlelt megbízhatósága és a bizalom közötti összefüggés

Eredményeink nem igazolták hipotézisünket, azaz a játékosok egymással kapcsolatban észlelt megbízhatósági szintjei meglepő módon nem befolyásolják azt, hogy miképp cselekednek a játék egyes konkrét tranzakciói során, azaz mekkora összegeket adnak át az adott körben társuknak. A kapott eredmények miatt a regressziós modellek együtthatóinak bemutatásától eltekinttünk.

Második hipotézisünk az egyes tranzakció szintjén vizsgálta adott játékos bizalma és a társával kapcsolatos bizalomra való méltóságára vonatkozó várakozásai (azaz, hogy mekkora összeget várnak vissza a játékosok partnerüktől) közötti ok-okozati kapcsolatot. Konkrétan, az alábbi hipotézist fogalmaztuk meg:

H2: A játék során a tranzakció szintjén mért bizalmat befolyásolják a játékosoknak a partnerüktől visszakapott összegre – azaz a tranzakció szintjén mért bizalomra való méltóságra – vonatkozó várakozásai.

Eredményeinket a 8. táblázat foglalja össze. Regressziós modelljeink nem mondanak ellent hipotézisünknek. Úgy tűnik, a bizalomra való méltósággal kapcsolatos várakozások hatnak a játék során mutatott tényleges cselekvésre. A modellek együtthatói magas szignifikanciaszinttel rendelkeznek, most ezért szerepeltettük leírásunkban (9. táblázat).

Eredmény-változó	Magyarázó változók	R	R^2	Korrigált R^2	Véletlen tényező becsült szórása
x_t	x_t^e, y_t^e és $x_t^e y_t^e$ -közös	,710	,504	,501	25,669%
y_t	x_t^e, y_t^e és $x_t^e y_t^e$ -közös	,624	,390	,386	26,026%

8. táblázat. Ok-okozati modellünkben a bizalomra való méltósággal kapcsolatos várakozások és a bizalom közötti összefüggés

Eredmény-változó	Magyarázó változók	Nem stand. B	együtthatók Std.hiba	Standardizált együtthatók	t	Szignif.
x_t	(konstans)	14,120	5,139		2,748	,006
	y_t^e	,460	,086	,411	5,364	,000
	x_t^e	,189	,077	,159	2,458	,014
	$x_t^e y_t^e$ -közös	,002	,001	,222	2,055	,040
y_t	(konstans)	19,040	5,211		3,654	,000
	y_t^e	,277	,087	,271	3,185	,002
	x_t^e	,339	,078	,312	4,354	,000
	$x_t^e y_t^e$ -közös	,001	,001	,139	1,161	,246

9. táblázat. A regressziós modell együtthatói

Harmadik hipotézisünk kapcsán bevezettük az ún. bizalmi elégedettség fogalmát, és azt vizsgáltuk, ez az elégedettség hogyan hat a felek észlelt megbízhatóságának alakulására. A játék tranzakcióiban ez a bizalmi elégedettség a visszavárt és a ténylegesen visszakapott összegek közötti viszonyt mutatja. Regressziós modellünkben a szolgáltatásmenedzsment szakirodalomban általánosan elterjedt elégedettség koncepciónak (Parasuraman et al., 1985) megfelelően a két változó különbségeként operacionalizáltuk ezt a bizalmi elégedettséget. Harmadik hipotézisünk konkrétan a következőképpen hangzott:

H3: A játékosok észlelt megbízhatóságának alakulását a partnerének ténylegesen átadott pénzüsszegekre vonatkozó várakozások és a ténylegesen

megkapott összegek különbségeként értelmezett ún. bizalmi elégedettség befolyásolja.

Az APIM modell felhasználásával kapott eredményeinket a 10. táblázat tartalmazza. Az A játékos esetén hipotézisünk nem teljesül, de B játékos esetén az gyengén elfogadható, azaz B játékos esetében igaz az, hogy B -nek A megbízhatóságáról szóló véleményét (észlelését) befolyásolják a kapcsolatban kialakuló ún. bizalmi elégedettségek, míg ez fordítva nem igaz. Mint említettük, a játék közbülső köreiben A és B játékos pozíciói összecsisznak, mindketten felváltva vannak a bizalmat kapó és a bizalmat adó helyzetében. A nyitó és záró kör miatt (hiszen A kezdi a játékot és B dönt utoljára) a játék végén alapesetben A kerül kiszolgáltatott helyzetbe, tehát a bizalmat adó fél pozíciójába. Őt tekinthetjük inkább sérülékenynek a játékban.

Eredmény- változó	Magyarázó változók	R	R^2	Korrigált R^2	Véletlen tényező becsült szórása
R_t^B	$(y_t^e - y_t), (x_t^e - x_t),$ $(y_t^e - y_t) - (x_t^e - x_t)$ _közös	,036	,001	-,005	1,023
R_t^A	$(y_t^e - y_t), (x_t^e - x_t),$ $(y_t^e - y_t) - (x_t^e - x_t)$ _közös	,152	,023	,017	1,129

10. táblázat. Ok-okozati modellünkben a bizalmi elégedettség és a megbízhatóság közötti összefüggés

5 Összefoglalás: A módosított bizalomjáték révén nyert legfontosabb eredmények és jövőbeni kutatási irányok

Megítélésünk szerint vizsgálataink érdekes eredményekre vezettek, de ezek az eredmények egyben felhívják a figyelmet további kutatások szükségességére is. A korrelációs számítások azt mutatták, hogy a bizalomjáték során a játékosok lépései, azaz az átadott összegek nagysága és az azokkal kapcsolatos várakozások összefüggenek egymással. A bizalom összetett jelenségének értelmezéséhez bevezetett fogalmainkat használva, a bizalmi szituációkban megjelenő flow jellegű kategóriák, azaz az egyes tranzakciós lépések (bizalom és bizalomra méltóság) és az azokkal kapcsolatos várakozások között kimutatható volt lineáris összefüggés.

A korrelációs számítások során kapott másik fontos eredményünk, hogy a megbízhatóság, mint az adott játékos társ jellemzője (stock) független mind a tényleges pénzmozgásoktól (flow változók: bizalom és bizalomra méltóság), mind az azokra vonatkozó várakozásoktól. Értelmezésünkben ez azt jelzi, hogy a fejezetben javasolt fogalmi elhatárolásunk, és a kapcsolati bizalom jelenségének leírására bevezetett dimenziók léteznek, egymástól különböző, önálló jelenségeket ragadnak meg. Ezek alapján javasolni tudjuk a három alapváltozónk (bizalom, és bizalomra méltóság, mint tranzakció szintű változók, és megbízhatóság, mint általánosabb, kapcsolati szintű változó) beépítését és szisztematikus mérését a további kísérletekbe. Munkánk egyik fontos,

elméleti jelentőséggel bíró eredménye ez: A tranzakció szintű bizalmi jelenségek (bizalom és bizalomra méltóság) és a kapcsolati szinten értelmezett, mintegy absztrahált kapcsolati szintű megbízhatóság jelensége eltérőek egymástól.

Eredményeink nem igazolták első hipotézisünket, azaz a játékosársak egymással kapcsolatban észlelt megbízhatósági szintjei meglepő módon nem befolyásolják azt, hogy miképp cselekednek a játék egyes konkrét tranzakciói során, azaz mekkora összegeket adnak át az adott körben társuknak.

Nem tudtuk igazolni, hogy ez a kapcsolati szintű jelenség – azaz az adott partner megbízhatósága (stock) – hatna az egyes konkrét tranzakciókban megjelenő cselekvésekre: a bizalomra (flow). Ez az eredmény ugyanakkor nem is annyira meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy ez a megbízhatóság a játék során csak minimális mértékben változott. Ennek tükrében úgy véljük, érdemes a továbbiakban olyan dinamikus bizalomjátékot kidolgozni és vizsgálni, mely nagyobb mértékben okoz változásokat a felek megbízhatóságának észlelt szintjében.

A megfogalmazott három hipotézisünk közül a második hipotézisünk esetén támogató eredményeket kaptunk, igaz, a modell magyarázó ereje nem igazán erős. Ez az eredményünk ismét azt emeli ki, hogy a várakozások hatnak a játék során mutatott tényleges cselekvésekre, azaz a játék egy-egy tranzakciójában megnyilvánuló bizalomra (flow). A várakozások úgy tűnik, képesek a tranzakció szintjén befolyásolni a cselekvést.

Felemás eredményt kaptunk a harmadik hipotézis kapcsán, hiszen B játékos esetében az – gyengén ugyan – de elfogadható volt, míg A játékos esetében a hipotézist egyértelműen el kell utasítanunk. Ez az eredmény elgondolkodtató abban a tekintetben, hogy bár a játék belső körei, tranzakciói során A és B játékosok felváltva hol a bizalmat adó, hol a bizalmat kapó pozíciójába kerülnek, a játék első és záró köreiben logikailag kimutatható különbségek mégis számítanak a kapcsolati bizalom jelenségeinek megértésében.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők ezúton köszönik az OTKA K 115542 számú támogatását.

Irodalom

1. Ashraf, N., Bohnet, I., Piankov, N. (2006): Decomposing trust and trustworthiness, *Experimental Economics*, 9:193–208; doi 10.1007/s10683-006-9122-4
2. Berg, J., Dickhaut, J., McCabe K. (1995): Trust, reciprocity, and social history, *Games and Economic Behavior*, 10, 122–142.
3. Boero, R., Bravo, G., Castellani, M., Squazzoni, F. (2009): Reputational cues in repeated trust games, *The Journal of Socio-Economics* 38(6), 871–877.
4. Bohnet, I., Huck, S. (2004): Repetition and reputation: Implications for trust and trustworthiness when institutions change, *The American Economic Review* 94(2), 362–366.
5. Bolton, G. E., Ockenfels, A., Thonemann, U. W. (2012): Managers and Students as Newsvendors, *Management Science*, 58(12), 2225–2233.

6. Camerer, C. (2003): *Behavioral game theory*. New York: Russel Sage Foundation.
7. Chang, L. J., Doll, B. B., van't Wout, M., Frank, M. J., Sanfey, A. G. (2010): Seeing is believing: Trustworthiness as a dynamic belief, *Cognitive Psychology* 61, 87–105. doi: 10.1016/j.cogpsych.2010.03.001
8. Chaudhuri, A., Gangadharan, L. (2007): An experimental analysis of trust and trustworthiness. *Southern Economic Journal*, 959–985.
9. Deutsch, M. (1973): *The Resolution of Conflict*; Yale University Press, New Haven, CT.
10. Dobos, I. (2016): A diadikus adatelemzés módszertanának egy kritikai vizsgálata: A kettős adatbevétel és felcserélhető eset. *Sigma*, 47(3-4), 79–94.
11. Dobos, I., Gelei, A. (2018): A diadikus adatelemzés empíriával alátámasztott kritikája. *Statisztikai Szemle*, 96(1), 27–44.
12. Doney, P.M., Cannon, J. P. (1997): An Examination of the nature of Trust in Buyer – Seller Relationships; *Journal of Marketing*, 61(2), 35–52. <http://dx.doi.org/10.2307/1251829>.
13. Ford, D., Gade, L. E., Hakansson, H, Snehota I., Waluszewski, A (2008): Analysing business interactions; IMP Conference Paper; 24th Annual IMP Conference Proceedings, Uppsala, 1–37.
14. Gelei, A., Dobos, I., Sugár, A. (2014). Bevezetés a diadikus adatelemzésbe – elmélet és alkalmazás. *Statisztikai Szemle*, 92(5), 417–446.
15. Gelei, A., Dobos, I. (2016). Bizalom az üzleti kapcsolatokban. *Közgazdasági Szemle*, 63(3), 330–349.
16. Gelei, A., Dobos, I., Dudás, L. (2018): Bizalom és megbízhatóság – egy módosított ismételt bizalomjáték eredménye. *Statisztikai Szemle*, 96(8-9), 769–793.
17. Gonzalez, R., Griffin, D. (2000). On the Statistics of Interdependence: Treating Dyadic Data with Respect. In: Ickes, W. – Duck, S. (eds): *The Social Psychology of Personal Relationships*. John Wiley & Sons, 181–213.
18. Kumar, N. (1996). The Power of Trust in Manufacturer – Retailer Relationships; *Harvard Business Review*, 74(6), 93–107.
19. Mayer, R. C., Davis, J. H., Schoorman, F. D. (1995). An Integrative Model of Organizational Trust; *Academy of Management Review*, 20(3), 709–734. <http://dx.doi.org/10.5465/amr.1995.9508080335> .
20. Morgen, R. M., Hunt, S. D. (1994). The commitment – trust theory of relationship marketing; *Journal of Marketing*, 58, 20–38. <http://dx.doi.org/10.2307/1252308>.
21. Ostrom, E., Walker, J (2003) (eds.): *Trust and Reciprocity*. New York, Russe Sage.
22. Parasuraman, A., Zeithaml, V. A., Berry, L. L. (1985): A conceptual model of service quality and its implications for future research. *The Journal of Marketing*, 41–50.
23. Zaheer, A., McEvil, B., Perrone, V. (1998). Does trust matter? Exploring the effects of interorganizational and interpersonal trust on performance; *Organization Science*, 9(2), 141–159, <http://dx.doi.org/10.1287/orsc.9.2.141>.
24. Williamson, O. E. (1975). *Markets and Hierarchies: Analysis and Antitrust Implications*, Free Press, New York.

EXPECTATIONS AND ACTIONS IN A MODIFIED TRUST GAME:
EMPIRICAL ANALYSIS USING DYADIC DATA WITH INITIAL DATABASE

Trust is often interpreted as a social capital that can help governing business relationships in risky situations. The objective of this paper is to model the development of this social capital using a database developed with a dynamized version of the classic Trust Game. This database is analyzed with the modified statistical constructs of Dyadic Data Analyses using the initial data set, which leaves out the technique of double entry (Dobos – Gelei, 2019). In order to be able to develop a trust game capable to capture this development we use the classic conceptualization of trust and trustworthiness applied by the classic Trust Game. Here both trust and trustworthiness are indicating actual behaviors (flow type of concepts). Trust is related to the behavior of the player starting the game (player A), whereas trustworthiness is associated with the behavior of the counterpart (player B). The social capital, however, is a stock type of phenomenon that can be used as the means of safeguarding in risky situations. In order to have a clear distinction we suggest using the term reliability for this stock related concept. Our specific hypotheses are as follows:

H1: Transaction level trust (measured by the amount of money passed by the trustor to the trustee, expressed in Experimental Currency Unit that is ECU) is influenced by the perceived level of trustworthiness (measured by the amount of ECU reinvested by the trustee into the trustor).

H2: Transaction level trust is influenced by the expectations of the players regarding the level of trustworthiness of their counterpart.

H3: Perceived level of trustworthiness of a player is influenced by the so-called trust-related satisfaction that is interpreted as the difference between the expected and actual levels of trustworthiness.

In order to test our hypothesis, we developed a finite, dynamized version of the classic Trust Game (Berg et al., 1995) with 10 iterations. Our research joins the growing body of literature in behavioral operations dealing with the micro-foundations of operation with a special emphasis on patterns in human actions (Bendoly et al., 2010; Katok, 2011). Our game design has the following unique features: 1. As already mentioned, our literature review revealed that there are actually three closely linked trust-related terms: trust, trustworthiness and reliability. Uniquely, we built in and directly measured all the three in our game design; both their actual values and expectations regarding them. 2. In previous game designs, the money available for investment in a given iteration was independent from the previous ones (Bohnet – Huck, 2004; Boero et al., 2009); players had the same amount of money at their disposal at the beginning of each transaction. We integrated the 10 decisions of the game by making it possible to cumulate the money of previous iterations and making this cumulated amount free for reinvestment. 3. Last, but not least we have a special payoff function, where the Pareto-optimal state of the game and the Nash-equilibrium of the individual strategies of the players are the same. This is called a Pareto-Nash equilibrium point. The way, we integrated the iterations of the game and our special payout structure assimilates our game to a long-term, co-opetitive relationship (Branderburger – Nalebuff, 1996), a relationship that contains both cooperation and competition. According to our understanding, a simple repeated Trust Game with its repetitive actions corresponds more to the approach of discrete exchange episodes (Williamson – Ouchi, 1981) that was criticized by several authors (Gemünden et al., 1997). Instead, our interest lies in the complex interaction (Ford et al., 2003) taking place between partners working in a network type of relationship (Jarillo, 1988) that are co-opetitive arrangements. We tried to model such an interactive business relationship.

The game design was programmed using Microsoft Excel and installed to the computers of the university's computer lab, where experiments were carried out.

Participants were students of the university studying economics or business. Previous research results indicate that such students have statistically similar behavior compared to practicing managers (Bolton et al., 2012), so their actual movements reflect the way actors in real business relationships behave. The players in the game were anonymous to each other and were paired randomly. This guaranteed that the actual changes detected in the stock level of perceived reliability are products of the previous iteration of the game and are not influenced by other factors, such as reputation (Boero et al., 2009), for example. We developed a database of 49 pairs. Given the 10 iterations in one game this represents a database with 490 concrete transactions. This database was used for hypothesis testing. We applied the simplified statistical constructs of Dyadic Data Analysis that leave out the technique of double entry criticized by Dobos and Gelei (2019). They argue that double entry does not necessarily lead to additional information. In contrast, it might lead to information losses. Therefore, they developed approximations for classic correlations and regression models of Dyadic Data Analysis using the initial data set that leaves out the double entry transformation. These approximations are used in this paper.

Results of our analyses did not prove H1. Surprisingly, perceived levels of trust and trustworthiness do not influence significantly the actual behavior of the actors, the amount of ECU allocated and reallocated by the pairs of the game. We also could not prove that the relation level trust (that is reliability) does influence these actions. The main reason for this seems to be the fact that changes in the perceived levels of reliability were really small, close to zero. In order to be able to capture the statistical relationship we need a dynamic version of the game that results in higher variability in the perceived levels of this reliability. In respect of H2 we have backing results, expectations seem to significantly influence actual trusty behavior. We have asymmetric result in respect of H3. For player B (who takes basically the position of the trustee) we had acceptable R^2 value, although with weak significance level. For player A (in the position of the trustor) this hypothesis had to be rejected. These results indicate that there seems to be a linear correlation between the two flow type of trust-related concepts (trust and trustworthiness) and the expectations of the actors regarding them. Interestingly, reliability seems to develop independently from the expectations regarding these trust and trustworthiness levels. In our understanding this supports the complex conceptualization of trust in our paper and indicate that the differentiation of transaction and relational level trust should clearly be distinguished.

The project is supported by the Hungarian Scientific Research Fund (OTKA), project No. K 115542.

DÖNTÉSTÁMOGATÓ MÓDSZEREK A BESZÁLLÍTÓ-VÁLASZTÁS OPTIMALIZÁLÁSÁHOZ¹

SZABÓ BALÁZS – HAUCK ZSUZSANNA

PTE Közgazdaságtudományi Kar

Olyan vállalatok beszállító-választási problémáját tekintjük, amelyek célja jelentős mennyiségű kereslet lehető legnagyobb várható megbízhatóság mellett történő kielégítése. Ehhez a saját termelési képességeinek ismeretében kell beszereznie a termeléshez szükséges inputokat. A beszállítók kiválasztásáról és súlyozásáról való döntéshez rendelkezésére állnak a potenciális beszállítók megbízhatóságára és költségeire vonatkozó adatok. A javasolt döntési mechanizmus két lépésből áll. Először a beszállítók optimális halmazát határozzuk meg egy, a hátizsák-probléma módszertanából kiinduló algoritmus segítségével. Ezt követően az egyes beszállítói súlyok, továbbá a beszállítóktól rendelendő mennyiségek meghatározását a termelő vállalat kockázatoságának minimalizálása mentén végezzük el, azaz a pénzügyi portfólió-analízisből ismert módszertant alkalmazunk. Eredményeinket numerikus példákkal is illusztráljuk.

Kulcsszavak: beszállító-választás, megbízhatóság, optimalizáció, markowitzi portfólió logika. *JEL:* C6, D8, G1.

1 Bevezetés

Jelen munka az ellátási lánc menedzsment problémakörén belül a beszállítók kiválasztására fókuszál, emellett mikromegalapozást is nyújt összetettebb gazdasági jelenségek vizsgálatához. Olyan termelő vállalatok problémáját tekintjük, amelyek már eldöntötték, hogy bizonyos nyersanyagok, félkész termékek, alkatrészek beszerzését egy vagy több külső vállalat bevonásával teszik meg, és ehhez keresnek megfelelő partnert vagy partnereket. A téma jelentőségét elméleti oldalról alátámasztja például a portieri öt erő modell (Porter 1979), amelynek egyik eleme a beszállítók hatása. A gyakorlati relevanciát igazolja többek között Thornton et al. (2013) empirikus kutatása, amely szerint a beszállító-választás jelentős hatással van a vállalat üzleti teljesítményére.

¹A kutatást az Emberi Erőforrások Minisztériumának Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Programja finanszírozta, a Pécsi Tudományegyetem 4. tématerületi „A hazai vállalatok szerepének növelése a nemzet újraiparosításában” programja keretében (szerződés száma: 20765-3/2018/FEKUTSTRAT). A szerzők ezúton mondanak köszönetet Komlósi Sándor professzor úrnak segítségéért és hasznos útmutatásaiért. Köszönetüket fejezik ki továbbá egy anonim lektor hasznos megjegyzésaiért. E-mail: szabo.balazs@ktk.pte.hu, hauckzs@ktk.pte.hu. Beérkezett: 2018. december 4.

Vizsgálódásaink célja egy olyan döntési mechanizmus kidolgozása és bemutatása, amely – a lehetőségekhez mérten és a szükséges információk birtokában – optimális beszállítói portfólióhoz juttatja az egyes termelő vállalatokat. A tanulmány egyik legfőbb újdonsága a pénzügytanból ismert Markowitz-féle portfóliószemlélet módszertanának alkalmazása. A beszállítók kiválasztása során fontos figyelembe venni, hogy az üzleti partnerek viselkedéséből eredő kockázat jelentős hatással van a termelő vállalatok működésére, így az alkalmazott módszertannal is a kockázatkezelés fontosságát kívánjuk hangsúlyozni.

A dolgozatban javasolt döntési mechanizmus két lépésből áll (multi-stage megközelítés). Elsőként a potenciális beszállítók körét kell leszűkíteni a vállalatnak. Erre a hátizsák probléma módszertanából kiinduló algoritmust írunk fel, amelyben a várható megbízhatóságot szerepeltetjük döntési kritériumként. Megbízhatóság alatt a jó teljesítések arányát értjük, amelyet a szerződésekben megrendelt mennyiségből határidőre és jó minőségben leszállított termékek arányával mérünk. Ennek oka, hogy a vállalati gyakorlatban termelési anomáliákat okoznak a késve, illetve nem megfelelő minőségben leszállított termékek.

A beszállítói kosár kiválasztását követően a beszállítók súlyát, valamint az egyes beszállítóktól rendelendő inputok mennyiségét határozzuk meg a portfólióanalízis eszközei segítségével. A beszállítói kockázatot a megbízhatóság varianciájával mérjük, és a termelő vállalat célja ennek (pontosabban a varianciák súlyozott összegének) minimalizálása. A kockázat varianciával való mérése klasszikus eljárásnak számít a portfólió- és kockázatmenedzsment irodalmában (lásd Markowitz 1952), sőt mostanra már az ellátási láncok elemzésének területén is jelen van (lásd Hosseininasab & Ahmadi 2015).

Kétlépcsős modell alkalmazása nem újkeletű az irodalomban. Aissaoui et al. (2007) irodalmi összefoglalója szerint gyakori a beszállítók előzetes szűrése, amelyben objektív vagy szubjektív kritériumok alapján kizárják a jelöltek jelentős részét a halmazból, és csak a következő lépésben döntenek a beszállítók összetételéről. Jellemzően rangsor alapján történik a döntés, a mi modellünkben azonban a második kör a már kiválasztott beszállítók súlyát, valamint a tőlük rendelt inputok mennyiségét határozza meg. A portfóliószemlélet az elmúlt néhány évben jelent meg az irodalomban. A kockázat minimalizálásának céljával ajánl beszállítói portfóliót Lee & Chien (2014), Kellner et al. (2019) és Kellner & Utz (2019).

A tanulmány az alábbi struktúrát követi: A következő szakaszban áttekintjük az irodalmat, majd bemutatjuk a modell alapvetéseit, valamint a beszállítók kiválasztáshoz alkalmazott hátizsák problémát megoldó algoritmust. A 4. szakaszban a beszállítói súlyok és a rendelendő inputok mennyiségének optimalizálását tekintjük át egy egyszerűbb és egy összetettebb modell keretében. Általánosságban megfogalmazott eredményeinket az 5. részben numerikus példákkal illusztráljuk. Az utolsó szakaszban összegezzük tanulmányunk főbb gondolatait.

2 Irodalom

A termelésmenedzsment alaptankönyvei (lásd Krajewski et al. 2019, Heizer et al. 2017, magyar nyelven Vörös 2018) felhívják a figyelmet arra, hogy a vállalat minden egyes tevékenységének, döntésének összhangban kell lennie egymással, és ezeket a stratégia irányítja. Természetesen ez az integrált stratégia annál sikeresebb, minél inkább az egész ellátási hálózatra kiterjed, ezért a kiválasztott beszállítóknak is jól kell illeszkedniük hozzá.

A termelési stratégia alapján Fisher (1997) megkülönböztet hatékony és fogékony típusú ellátási láncokat. Előbbi standard termékek nagy volumenben történő termelését tűzi ki célul, amelynek következtében a beszállítók kiválasztásának alapvető szempontjai az alacsony költségszint és a konzisztens minőség. A fogékony ellátási láncokban a termék innovatív, minél inkább testre szabott és kis volumenben elérhető, a beszállítók reakcióidejének ezért nagyon gyorsnak kell lennie. Flexibilis, innovatív partnerekre van szükség. Mivel a sok beszállítót feltételező, nagy mennyiségben történő termelés inkább a tömegtermékek előállítására koncentrál, ezért megállapításaink inkább a hatékony típusú ellátási láncokra igazak, bizonyos feltevések mellett azonban utóbbiakra is értelmezhető.

Vörös (2018) szerint az ideális beszállító betartja a határidőket, a minőségi és mennyiségi követelményeket. Folyamatosan csökkenti a termelési költségeket és fejleszti a terméket, szolgáltatást. Képes gyorsan reagálni a változásokra, és minden információt önzetlenül megoszt az ellátási lánc többi tagjával. Ezek szerint a beszállítók kiválasztásakor ezeket a tényezőket a termelő vállalat a számára legmegfelelőbb súlyozással figyelembe tudja venni. Dickson (1966) és Chen (2011) szerint a szakirodalomban használt beszállítóválasztási kritériumok közül a minőség, a határidők betartása és a korábbi teljesítmény a legfontosabbak. Az általunk definiált megbízhatósági kritérium tulajdonképpen ezen három tényező kombinációja.

A beszállítók kiválasztásának módszertanát tekintve Chen (2011) és Chai et al. (2013) is az AHP, a DEA és az LP alkalmazásának gyakoriságát emeli ki. Chen (2011) a matematikai módszerek mellett a többváltozós statisztika, valamint a mesterséges intelligencia módszertanát alkalmazó modelleket különbözteti meg. A kombinált modellek kategóriájában pedig kettő, jellemzően matematikai modelltypust kombináló megoldásokat sorol fel. Chai et al. (2013) a döntési környezet alapján hét típust különböztet meg, amelyekből egy determinisztikus, a többi a fuzzy logikát követi. Determinisztikus modelljében az AHP módszert alkalmazza Levary (2008) egy úgynevezett megbízhatósági láncra. A szerző olyan nehezen számszerűsíthető kockázati tényezőket is figyelembe vesz, mint az országgkockázat, és a beszállítók megbízhatóságába beleérti a menedzsment iránti bizalmat vagy a sztrájk előfordulásának kockázatát. Döntési módszert objektív és szubjektív kritériumok együttes jelenlétével alakít ki.

Wetzstein et al. (2016) huszonöt év több mint kétszáz irodalmát áttekintve hat különböző kategóriába sorolja a beszállító-választás szakirodalmát. A tanulmányok csaknem fele matematikai modellezési technikákat mutat be.

A szerzők szerint feltörekvően vannak a stratégiai és a fenntarthatósági kérdéseket figyelembe vevő irányzatok. Utóbbinak magyar képviselőit, Dobos & Vörösmarty (2014) munkáját is kiemelik, akik a DEA módszertanát alkalmazzák a döntési probléma megoldására. Újabb tanulmányában Dobos & Vörösmarty (2019) a fenntarthatóság mellett a készletezéssel kapcsolatos költségeket is figyelembe veszik. Wetzstein et al. (2016) megemlíti továbbá a behaviorista irányzatot, valamint a több periódust feltételező modellek jelentőségét, amely megközelítés jelen munka egyik későbbi kiterjesztési iránya lehet. A legújabb tanulmányokban az adatbányászat eszközei is megjelentek. Su & Chen (2018) a beszállítók kockázatának mérésével foglalkozik ezen módszer segítségével.

Az ellátási kockázat minimalizálása is célja Kellner et al. (2019) modelljének, akik a portfólióelmélet eszközeit is felhasználják a beszállítóválasztási probléma megoldásában. A kockázat számszerűsítésére a varianciát alkalmazzák, amelyről megjegyzik, hogy széles körben elfogadott az irodalomban, azonban a kritikai észrevételektől sem tekinthetünk el.

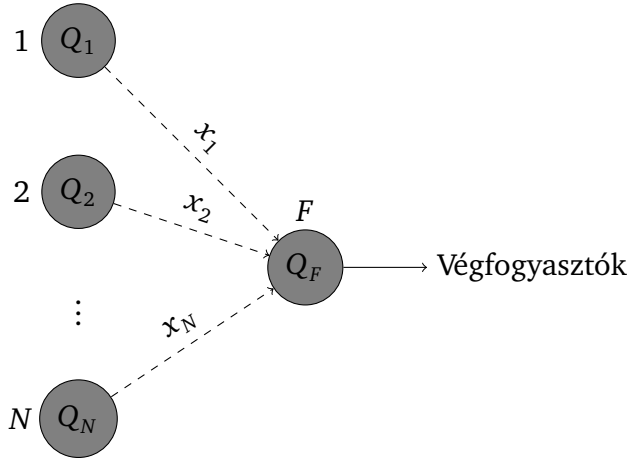
Kim & Wagner (2012) szerint a beszállító-választás egy olyan döntési folyamat, amelynek célja a legjobb beszállító(k) kiválasztása egy előszűrt merítési bázisból, előre meghatározott célok és kritériumok alapján. A választás vonatkozhat egy, azaz a legjobb beszállítóra vagy több beszállítóra együtt. Jelen tanulmányban legalább egy beszállító kiválasztását tűzzük ki célul, a partnerek számát tulajdonképpen a kapacitás- és a várható megbízhatósági szintek alapján határozzuk meg. Kim & Wagner (2012) alapján feltételezzük, hogy a merítési bázisban olyan potenciális beszállítók vannak, akik jól illeszkednek a termelő vállalat stratégiájához. Ha például a vállalat magas színvonalú JIT rendszerben termel, akkor a beszállító is tegyen úgy. Az előzetes elvárásoknak megfelelő potenciális partnervállalatokról ezután várható megbízhatóságuk és a hozzájuk kapcsolódó költségek alapján döntünk. Feltételezzük, hogy ezen információk a döntéshozók rendelkezésére állnak. Megállapításaink a Fisher-féle kategóriák közül inkább a hatékony ellátási láncokra lesznek igazak, azaz olyan vállalatok ellátási láncára, amelyeknél standard termékek nagy volumenben történő gyártásáról van szó.

Tanulmányunkban a beszállítók kiválasztása, így az egyszerű beszállítói, hálózati struktúra kialakítása endogén módon történik. A struktúra kiválasztásához a könnyen számszerűsíthető szempontokat vettük figyelembe. Amennyiben a termelő vállalat szeretne figyelembe venni kevésbé objektív módon mérhető tényezőket is, úgy érdemes lehet Slack et al. (2015) egy, illetve több beszállító alkalmazásának előnyeit és hátrányait elemző keretrendszerét felhasználni Slack et al. (2015, 238. o.)

3 A modell

Egy egyszerű ellátási láncból indulunk ki, amelyben az F termelő vállalatot és az \bar{o} összesen $N > 0$ számú lehetséges beszállítóját tekintjük, amelyeket az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmaz elemeivel indexelünk. Feltételezzük, hogy a terme-

lő vállalat közvetlenül a végfogyasztóknak értékesít, akiknek ismeri az összeresletét. Az ellátási lánc kiindulási struktúráját az 1. ábra mutatja. Az ábrán, illetve a tanulmány egészében alkalmazott jelöléseket az 1. táblázat tartalmazza.



1. ábra. A vizsgált ellátási lánc kiindulási struktúrája

Jelölés	Magyarázat
N	Az összes lehetséges beszállító száma (pozitív konstans egész szám)
M	F által kiválasztott beszállítók száma (pozitív egész szám)
x_i	Bináris változó, amelynek értéke pontosan akkor 1, ha i -edik vállalat beszállítója a termelő vállalatnak, egyébként 0 (döntési változó)
β_F	Az F termelő vállalat megbízhatóságát jellemző valószínűségi változó
b_F	Az F termelő vállalat várható megbízhatósága
σ_F	Az F termelő vállalat β_F megbízhatóságának szórása
β_i	Az i -edik beszállító megbízhatósága (százalékban mért pozitív értékű valószínűségi változó)
b_i	Az i -edik beszállító várható megbízhatósága (véges érték)
σ_i	Az i -edik beszállító β_i megbízhatóságának szórása (véges érték)
Q_F	Az F termelő vállalat által megrendelendő teljes inputmennyiség
Q_i	Az F termelő vállalat által az i -edik beszállítótól rendelendő inputmennyiség (döntési változó)
w_i	Az i -edik beszállító súlya F termelő vállalat rendelési portfóliójában (döntési változó)
S_F	A termelő vállalat várható kínálatának nagysága, azaz várható kibocsátási szintje
K_i	Az i -edik beszállítótól rendelendő input kapcsán felmerülő szállítási és járulékos költségek (pozitív állandó érték)
K_F	A szállítási és járulékos költségek összegének maximuma az F termelő vállalat szempontjából, azaz F egy költségvetési korlátja (pozitív állandó érték)
$v(\cdot)$	Az F termelő vállalattal kapcsolatban álló beszállítók várható megbízhatóságainak összege

1. táblázat. Alkalmazott jelölések

A vállalat tudja tehát, hogy milyen mennyiségű terméket kell a vizsgált időszakban előállítania. Ismeri saját termelési képességeit, így azt is, hogy a megfelelő mennyiségű eladásra szánt outputhoz mennyi jó minőségű inputra van szüksége. A döntési probléma ezen Q_F -fel jelölt mennyiség beszerzésének módjára irányul. Az egyes beszállítók által kínált inputok nagymértékben (a levezetés szempontjából feltesszük, hogy tökéletesen) helyettesíthetők egymással, tehát ebből a szempontból homogén a beszállítók halmaza. A termelő ugyancsak ismeri minden egyes beszállító pozitív értékűnek vett β_i megbízhatóságát. Megbízhatóság alatt a megrendelt mennyiség azon részét értjük, amely időben megérkezett és kifogástalan minőségű (röviden nem selejt). Ennek természete sztochasztikus lehet, így β_i egy (diszkrét vagy abszolút folytonos) valószínűségi változó véges várható értékkel és pozitív, véges szórással. A termelő megrendel tehát egy adott mennyiséget valamely beszállítótól, amelynek β_i szerint realizálódó százalékát fogja tudni ténylegesen inputként felhasználni. Se a minőségi hibás, se a késve leszállított árut nem fogadja el a vevő, vagyis esetünkben a termelő vállalat. Az újságáros problémához hasonlóan azt feltételezzük tehát, hogy a késve leszállított árut már nem lehet eladni, így az értéktelen a vállalat számára.

Az ismert beszállítói megbízhatóságok várható értéke és varianciája alapján a termelő vállalatnak ki kell választania, hogy melyik beszállítókkal köt szerződést, azaz kiktől rendel. Erre bevezetjük az x_i bináris változót, amelynek értéke akkor 1, ha a szerződés létrejött, és 0, ha nem. A termelőnek arról is döntenie kell, hogy az egyes beszállítóktól mennyi inputot rendel, ezzel mintegy súlyokkal is ellátja őket. Az i -edik beszállító súlya a tőle rendelendő $Q_i \geq 0$ mennyiség és az összesen megrendelendő mennyiség hányadosa, vagyis

$$w_i = \frac{x_i Q_i}{Q_F}, \quad (1)$$

ahol $Q_F = \sum_{i=1}^N x_i Q_i$, feltéve, hogy van olyan i , hogy $x_i = 1$ és $Q_i > 0$. A fenti definíció garantálja, hogy a súlyok összege egységnyi legyen, azaz $\sum_{i=1}^N w_i = 1$.

Megjegyezzük, hogy mivel a súlyokat a megrendelendő mennyiségekből számítjuk ki, ezért a beszállítók várható megbízhatósági szintjeitől függően akár jelentősen is eltérhetnek az $x_i b_i Q_i / \sum_{j=1}^N x_j b_j Q_j$ aránytól. Egy alacsonyabb b_i várható megbízhatósági szinttel rendelkező vállalatnál ugyanis nagyobb mennyiséget kell rendelnünk ahhoz, hogy a kívánt mennyiségű és minőségű inputot határidőre leszállítsa.

Cikkünk legfontosabb feltevéseit az alábbiakban összegezzük:

- 1) Egy adott F termelő vállalat $N \geq 1$ beszállítóval léphet kapcsolatba, amelyeket az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmaz elemeivel indexelünk.
- 2) F termelő vállalat minden, a döntéséhez szükséges információnak a birtokában van beszállítóival kapcsolatban.
- 3) F termelő vállalat nem beszállítója más vállalatnak, közvetlenül a végfogyasztókat szolgálja ki, akiknek a keresletét ismeri, és várható kínálati szintjét ezzel teszi egyenlővé.

- 4) Az $x_i \in \{0, 1\}$ bináris változó azt mutatja meg, hogy i vállalat beszállító-e F -nek vagy sem. Értéke pontosan akkor 1, ha F rendel i -től, egyébként 0.
- 5) F -nek van olyan i beszállítója, hogy előbbi $Q_i > 0$ mennyiséget rendel az utóbbtól.
- 6) Egy adott beszállító pontosan egyfajta inputot szállít F számára.
- 7) A beszállítói inputok tökéletesen helyettesíthetők egymással.
- 8) Minden beszállítóhoz hozzárendelünk egy megbízhatóságnak nevezett β_i valószínűségi változót $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, amely az i -edik beszállítótól rendelendő inputmennyiségből a határidőre leszállított jó minőségű input arányát adja meg. Feltesszük, hogy a szóban forgó valószínűségi változó az értékeit a $(0, 1]$ intervallumból veszi fel, tehát az inputarány mindig pozitív.
- 9) Az egyes beszállítókat pozitív vagy negatív hatások (például inkrementális innováció, néhány termelőegység átmeneti meghibásodása) érhetik, amelyek befolyásolják ezek megbízhatóságát, így a ténylegesen leszállított jó minőségű input mennyiségét is.
- 10) F minden beszállítójához hozzárendel egy w_i súlyt az (1) összefüggés szerint.

3.1 A beszállítók kiválasztása

A beszállítók optimális kiválasztásához egy, a 0/1-típusú hátizsák problémához kapcsolódó lineáris programozási feladatot mutatunk be. Ennek során F azokat a beszállítókat szeretné megtalálni, amelyek várható megbízhatóságainak $v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x_i b_i$ összege maximális egy bizonyos feltételrendszer mellett, ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$. Feltesszük, hogy a szóban forgó beszállítókhöz tartozó, a rendelendő inputmennyiségtől független K_i pozitív egész szállítási és egyéb járulékos költségek (vagyis K_i -k a rendelendő inputmennyiségektől független konstansok) $\sum_{i=1}^N x_i K_i$ összege egy K_F pozitív egész plafonnál nem lehet magasabb.

Az LP-feladat feltételi halmaza szempontjából definiálnunk kell F vállalat β_F megbízhatóságát. Ez azt mutatja meg, hogy F az eredetileg legyártani tervezett mennyiség hány százalékát képes előállítani a selejtes inputok miatt. A β_F megbízhatóság a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ megbízhatóságok alábbi konvex kombinációjának az eredménye:

$$\beta_F = \sum_{i=1}^N x_i w_i \beta_i, \quad (2)$$

ahol $\beta_i \in (0, 1]$. Vegyük mindkét oldal várható értékét, és használjuk ki a várható érték linearitását:

$$\mathbf{E}(\beta_F) = \sum_{i=1}^N x_i w_i \mathbf{E}(\beta_i). \quad (3)$$

Utóbbi összefüggés átírható a jelölésjegyzék szerinti jelöléseket alkalmazva:

$$b_F = \sum_{i=1}^N x_i w_i b_i. \quad (4)$$

Tudjuk, hogy minden $b_i \in (0, 1]$, azaz a várható megbízhatóság nem zérus, de elméletileg lehet akár 100 százalék is. Emiatt biztosan teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^N x_i b_i Q_i \leq \sum_{i=1}^N x_i Q_i. \quad (5)$$

Ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalát Q_F -vel osztva és felhasználva w_i definícióját (1), megkapjuk, hogy $b_F \in (0, 1]$, mivel

$$\sum_{i=1}^N x_i w_i b_i \leq \sum_{i=1}^N x_i w_i \leq \sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (6)$$

Továbbá, az (5) egyenlőtlenség bal oldalát nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \sum_{i=1}^N x_i (1 - b_i) Q_i, \quad (7)$$

ami a $b_F \in (0, 1]$ feltétel egy ekvivalens alakja, hiszen mind a (6), mind pedig a (7) összefüggés az (5) egyenlőtlenség eredménye, ekvivalens átalakításokat követően.

Az LP-feladatot tehát az alábbi módon adjuk meg:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N x_i K_i \leq K_F, \quad K_F \geq K_{\min}, \end{aligned} \quad (8)$$

ahol $K_{\min} = \min\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$. Az F termelő vállalat tehát a beszállítók várható megbízhatóságának összegét szeretné maximalizálni K_F költségvetési korlát figyelembe vételével. A második feltétel biztosítja, hogy F -nek legyen legalább egy beszállítója. Pontosan azok az i -k lesznek beszállítói, amelyekre az optimalizáció során az $x_i = 1$ eredményt kapjuk.

A megoldás megtalálásához az ilyenkor szokásos dinamikus programozás módszerét alkalmazzuk (lásd Vizvári 2006). Először indexeljük F beszállítóit úgy, hogy a $0 < K_1 < K_2 < \dots < K_N$ rendezés teljesüljön. Legyen $v[i, z] =$

$v(\mathbf{x})$, feltéve, hogy az első i beszállító közül választottuk és $\sum_{i=1}^N x_i K_i \leq z$, ahol $z \in \{0, 1, 2, \dots, K_F\}$. Megjegyezzük, hogy $v[i, 0] = 0$, ami azt jelenti, hogy nincs olyan beszállító, aki költségmentesen szállítana.

A (8) LP-feladat megoldását a $v[N, K_F]$ értékhez (lásd 1. Algoritmus) tartozó $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$ vektor adja meg. Előbbi vektort a fenti algoritmus segítségével határozzuk meg. Az algoritmus segítségével tehát az F termelő vállalat el tudja dönteni, hogy mely vállalatokkal kössön szerződést, azaz kik legyenek a beszállítói. Megjegyezzük, hogy a költségvetési korláttól, azaz K_F értékétől függően legfeljebb összesen $(2^N - 1)$ -féle ellátási lánc képezhető, ami azonban csak egy durva felső becslés a lehetséges ellátási láncok számának elméleti maximumára. A következő szakaszban a már kiválasztott beszállítók súlyait, valamint a tőlük rendelendő inputok mennyiségét optimalizáljuk.

```

input   :  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T$ ,  $\mathbf{K} = (K_1, K_2, \dots, K_N)^T$ ,  $K_F$ 
output :  $v[N, K_F]$ 
begin
  for  $1 \leq i \leq N$  do
     $v[i, 0] = 0$ ;
  for  $0 \leq z \leq K_F$  do
    if  $K_1 > z$  then
       $v[1, z] = 0$ ;
    else
       $v[1, z] = b_1$ ;
  for  $2 \leq i \leq N$  do
    for  $2 \leq z \leq K_F$  do
      if  $K_1 > z$  then
         $v[i, z] = v[i - 1, z]$ ;
      else
         $v[i, z] = \max\{v[i - 1, z], b_i + v[i - 1, z - K_i]\}$ ;

```

1. Algoritmus. Az LP-feladat megoldásának algoritmus (dinamikus programozás)

4 A beszállítói súlyok és a rendelendő input-mennyiség meghatározása

Ebben az egységben és a továbbiakban módszertani szempontból Dostál (2009) könyvére támaszkodunk. Ezenkívül felhasználjuk Markowitz (1952, 1971) műveit is. Ha σ_F jelöli a β_F megbízhatóság szórását, $1 \leq M \leq N$ pedig a kiválasztott beszállítók számát, amelyeket az $\{1, 2, \dots, M\}$ halmaz elemeivel indexelünk, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^M w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{j-1} w_j w_k \text{cov}(\beta_j, \beta_k), \tag{9}$$

és feltesszük, hogy az egyes β_i -k olyanok, hogy $\sigma_F^2 > 0$ tetszőleges w_1, w_2, \dots, w_M esetén, azzal együtt, hogy (1) miatt $\sum_{i=1}^M w_i = 1$ is teljesül. Ez a helyzet például, ha $\text{cov}(\beta_j, \beta_k) \geq 0$ minden j, k -ra.

A továbbiakban jelentős szerepet szánunk egy lényeges egyszerűsítésnek. Ugyanis a következő egységekben szereplő szélsőérték-feladatok közül az első esetén feltesszük, hogy β_i -k korrelálatlanok, ami azt eredményezi, hogy a fenti összefüggés a következőre redukálható:

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^M w_i^2 \sigma_i^2. \quad (10)$$

A megbízhatóság σ_i és σ_F szórását (vagy ezek négyzetét) a beszállító és F kockázatoságának mérőszámaként kezeljük.

Megjegyezzük, hogy a (9) egyenlet úgy is írható, hogy

$$\sigma_F^2 = \mathbf{w}^T \text{cov}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{w}, \quad (11)$$

ahol $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$, $\text{cov}(\boldsymbol{\beta})$ pedig a $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M)^T$ vektorváltozó kovariancia-mátrixa. Ha $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$ jelöli $\text{cov}(\boldsymbol{\beta})$ sajátértékeit, akkor a *spektrálfelbontás tételének* alkalmazása miatt:

$$\sigma_F^2 = \mathbf{w}^T \text{cov}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{w} = \widehat{\mathbf{w}}^T \mathbf{D}_\beta \widehat{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^M \varphi_i \widehat{w}_i^2, \quad (12)$$

ahol \mathbf{D}_β egy olyan diagonális mátrix, amely főátlójában a sajátértékek vannak, $\widehat{\mathbf{w}}$ pedig egy, a megfelelő normalizált sajátvektorokból képzett $M \times M$ -es (unitér) mátrix transzponáltja és \mathbf{w} szorzata ($\widehat{\mathbf{w}}$ i -edik eleme \widehat{w}_i). Ezenkívül $\widehat{w}_i = \sum_{j=1}^M e_{ij} w_j$, ahol e_{ij} a φ_i sajátértékhez tartozó normalizált sajátvektor j -edik koordinátája. Mivel ismert, hogy a kovariancia-mátrix pozitív szemidefinit, ezért a sajátértékei nemnegatívak. Következésképpen minden $\varphi_i \widehat{w}_i^2$ konvex, és így ezeknek az összege is. Vagyis noha az első szélsőérték-feladat az egyszerűbb (10) egyenletet vizsgálja, azonban már most jelezzük, hogy β_i -k korrelálatlanságát feloldva vizsgálható σ_F^2 általános alakja is. Utóbbi persze nem egyszerűen a σ_i^2 varianciák súlyozott összege, hanem annak értékére az említett kockázati mérőszámok mellett a kovarianciáknak is hatása van.

A továbbiakban bemutatunk több lehetséges modellt (ha tetszik döntési szabályt), amely alapján F dönthet a beszállítói súlyokat és a rendelendő inputmennyiségeket illetően. A fókuszban elsődlegesen varianciák minimalizálása áll, amely mögött az a burkolt feltételezés húzódik meg, hogy a termelő a kiszámíthatóság jegyében elsősorban a volatilitás csökkentésére törekszik.

4.1 A megbízhatóság varianciájának minimalizálása korrelálatlanság esetén

Ebben az egységben feltételezzük, hogy $\text{cov}(\beta_j, \beta_k) = 0$ minden $j \neq k$ esetén. Az egyes w_i súlyok nagyságának meghatározásához oldjuk meg az alábbi

problémát:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \text{cov}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^M w_i = 1, w_i \geq 0 \text{ minden } i\text{-re.} \end{aligned} \quad (13)$$

A feladat célfüggvénye a megadott feltételek mellett minimalizálható, hiszen σ_F^2 folytonos, konvex (ugyanis konvex függvények nemnegatív együtthatókkal vett lineáris kombinációja – kúp kombinációja – is konvex), a feltételi halmaz pedig kompakt.² Megjegyezzük, hogy a feltételi halmaz szerkezete biztosítja a regularitási követelmény teljesülését, így (13) megoldása biztosan stacionárius pontja a Lagrange-függvénynek.

A (13) megoldásainak megtalálásához felírjuk a feladathoz tartozó Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{w}, \lambda_1, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^M w_i^2 \sigma_i^2 - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^M w_i - 1 \right) - \sum_{i=1}^M \mu_i w_i, \quad (14)$$

ahol λ_1 a feladathoz tartozó Lagrange-szorzó, $\mu_i \geq 0$ pedig a KKT-szorzó minden i -re, $\boldsymbol{\mu}$ pedig ezeknek a vektora. Ekkor a w_i szerinti parciális deriválással adódó elsőrendű szükséges feltétel minden i -re a következő:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w_i} = 2w_i \sigma_i^2 - \lambda_1 - \mu_i = 0. \quad (15)$$

Az egyenlet mindkét oldalát w_i -vel szorozva, felhasználva, hogy $\mu_i w_i = 0$ és összegezve az egyenleteket minden i -re:

$$2 \sum_{i=1}^M w_i^2 \sigma_i^2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^M w_i = 0, \quad (16)$$

tehát $\lambda_1 = 2 \sum_{i=1}^M w_i^2 \sigma_i^2 > 0$. Ha $w_i = 0$ lenne valamely i -re, akkor az elsőrendű feltételből az jönne ki, hogy $\lambda_1 = -\mu_i \leq 0$, tehát $\mu_i = 0$ minden i -re. Vagyis $w_i > 0$ minden i -re.

Átrendezéssel kifejezhető w_i :

$$w_i = \frac{\lambda_1}{2\sigma_i^2}. \quad (17)$$

Utóbbit a $\sum_{i=1}^M w_i = 1$ feltételbe beírva λ_1 -re az alábbi összefüggés adódik:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (18)$$

²A Weierstrass-tétel miatt egy folytonos, többváltozós valós függvénynek van legkisebb és legnagyobb értéke egy kompakt halmazon.

Mivel $\lambda_1 > 0$, így $w_i > 0$, azaz a feladat második egyenlőtlenség feltétele is fennáll. Innen behelyettesítés után megkapjuk a szélsőérték-feladat általános megoldását:

$$w_i = \frac{2}{2\sigma_i^2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{\sigma_j^2}} = \frac{1}{1 + \sigma_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{1}{\sigma_j^2}} \geq 0. \quad (19)$$

Megállapíthatjuk, hogy σ_i növekedése csökkenti w_i -t, azonban σ_j növekedése w_i növekedését eredményezi. Utóbbit másként megfogalmazva, ha egy i -től különböző j beszállító megbízhatóságának varianciája növekszik, akkor F relatíve preferálni fogja i -t j -hez képest, hiszen w_i növekszik. Ezenkívül, ha σ_i -k megegyeznek, akkor $w_i = 1/M$, vagyis a beszállítókhöz rendelt súlyok is azonosak.

Végül a (19) egyenlet alapján és az (1) definíció segítségével Q_i kifejezhető, tehát meghatározható F -nek a i -edik beszállító termékével szembeni keresleti függvénye:

$$Q_i = \frac{Q_F}{1 + \sigma_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{1}{\sigma_j^2}}. \quad (20)$$

A beszállítóktól rendelendő mennyiségek birtokában pedig az S_F várható kínálati nagyságot az alábbi módon definiáljuk:

$$S_F = \sum_{i=1}^M b_i Q_i. \quad (21)$$

Utóbbi egyenlet az (1) felhasználásával egyszerűbb alakban is felírható:

$$S_F = \sum_{i=1}^M b_i Q_F \frac{Q_i}{Q_F} = Q_F \sum_{i=1}^M w_i b_i = b_F Q_F. \quad (22)$$

Következésképpen, ha S_F ismert, akkor b_F ismeretében Q_F kiszámolható. Azonban b_F -et a súlyok ismeretében meghatározhatjuk.

4.2 A megbízhatóság varianciájának minimalizálása korreláltság esetén

Ebben az egységben feltételezzük, hogy $\text{cov}(\beta_j, \beta_k)$ nem feltétlenül zérus, ha $j \neq k$. A w_i súlyokat az alábbi probléma megoldásával határozzuk meg:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \text{cov}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^M w_i = 1, w_i \geq 0 \text{ minden } i\text{-re.} \end{aligned} \quad (23)$$

A feladat célfüggvénye most is minimalizálható a megadott feltételek mellett, hiszen σ_F^2 folytonos, konvex (konvex függvények nemnegatív együttthattókkal

vett lineáris kombinációja), a feltételi halmaz pedig kompakt. A feltételi halmaz szerkezete biztosítja a regularitási követelmény teljesülését, így (23) megoldása biztosan stacionárius pontja a Lagrange-függvénynek.

A (23) megoldásainak megtalálásához felírjuk a feladathoz tartozó Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{w}, \lambda_2, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{i=1}^M \varphi_i \widehat{w}_i^2 - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^M w_i - 1 \right) - \sum_{i=1}^M \nu_i w_i, \quad (24)$$

ahol λ_2 a feladathoz tartozó Lagrange-szorzó, $\nu_i \geq 0$ pedig a KKT-szorzó minden i -re, $\boldsymbol{\nu}$ pedig ezeknek a vektora. Ekkor a w_i szerinti parciális deriválással adódó elsőrendű szükséges feltétel minden i -re a következő:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial w_i} = 2 \sum_{j=1}^M \varphi_j \widehat{w}_j e_{ij} - \lambda_2 - \nu_i = 0. \quad (25)$$

Az egyenlet mindkét oldalát w_i -vel szorozva, felhasználva, hogy $\nu_i w_i = 0$ és összegezve az egyenleteket minden i -re:

$$2 \sum_{j=1}^M \varphi_j \widehat{w}_j \underbrace{\sum_{i=1}^M e_{ij} w_i}_{\widehat{w}_j} - \lambda_2 \sum_{i=1}^M w_i = 0, \quad (26)$$

tehát $\lambda_2 = 2 \sum_{i=1}^M \varphi_i \widehat{w}_i^2 > 0$. Azaz egy M ismeretlenből és legfeljebb M egyenletből álló egyenletrendszerrel kapunk.

Az egység hátralévő részében az eddigiek egy speciális esetét vizsgáljuk. Megnézzük, hogy milyen eredményre jutunk akkor, ha $\nu_i = 0$ minden i -re, tehát $w_i > 0$. Megjegyezzük, hogy ez az eset megvalósulhat, ezt világosan mutatja az előző modellváltozat.

Az elsőrendű feltételt átrendezve, majd \widehat{w}_j -be helyettesítve

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^M \varphi_j e_{ij} \sum_{k=1}^M e_{jk} w_k &= \lambda_2 \\ \Downarrow \\ 2 \sum_{k=1}^M \left(\sum_{j=1}^M \varphi_j e_{ij} e_{jk} \right) w_k &= \lambda_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Ha \mathbf{U} jelöli azt a mátrixot, amelynek az i -edik oszlopa a φ_i -hez tartozó normalizált sajátvektor, valamint $\widehat{\mathbf{U}}$ egy olyan mátrix, amelynek i -edik sorvektora $(\varphi_1 e_{i1}, \varphi_2 e_{i2}, \dots, \varphi_M e_{iM})$, akkor az elsőrendű feltételekből álló egyenletrendszer fenti, átrendezett alakja a következő mátrixegyenlet alakját ölti:

$$2\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}\mathbf{w} = \lambda_2 \mathbf{1}_M, \quad (28)$$

ahol $\mathbf{1}_M$ a csupa 1-esekből álló $M \times 1$ -es vektor.

Ahhoz, hogy az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}$ mátrixnak létezzen inverze. Ezért számoljuk ki ennek a mátrixnak a determinánsát:

$$\det(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}) = \det(\widehat{\mathbf{U}}) \det(\mathbf{U}) = \prod_{j=1}^M \varphi_j \underbrace{\det(\mathbf{U}^T) \det(\mathbf{U})}_1 = \prod_{j=1}^M \varphi_j, \quad (29)$$

használva azt a lineáris algebrai tényt, hogy $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$. Vagyis kimondhatjuk a következőt:

1. Tétel. *A (28) mátrixegyenletnek akkor és csak akkor létezik megoldása, ha a kovariancia-mátrix φ_i sajátértékeire teljesül, hogy $\varphi_i > 0$.*

Felvethető a kérdés, hogy melyek azok a mátrixok, amelyek biztosan teljesítik, hogy $\varphi_i > 0$ minden i -re. Erre jelen cikkünkben a jól ismert *Gerschgorin-tétel* (Gerschgorin 1931) egy következményének segítségével adunk választ. Ha teljesül, hogy

$$\sigma_i^2 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M |\text{cov}(\beta_i, \beta_j)| \quad (30)$$

fennáll minden lehetséges i -re, akkor a sajátértékek mindegyike pozitív.

Folytatva a megoldás keresését célzó gondolatmenetet, ha $\varphi_i > 0$ minden i -re, akkor

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda_2}{2} (\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{1}_M. \quad (31)$$

Mivel $\sum_{i=1}^M w_i = 1$, ezért a $\mathbf{w}^T \mathbf{1}_M$ szorzat értéke 1. Azaz

$$1 = \frac{\lambda_2 \gamma}{2}, \quad (32)$$

ahol $\gamma = \mathbf{1}_M^T (\widehat{\mathbf{U}}^T)^{-1} \mathbf{U} \mathbf{1}_M$. A Lagrange-szorozót kifejezve

$$\lambda_2 = \frac{2}{\gamma}. \quad (33)$$

Tehát a súlyvektor úgy adható meg, mint

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\gamma} (\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{1}_M. \quad (34)$$

Tudjuk, hogy korrelálatlanság esetén $\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U} = \mathbf{I}_M$, ahol \mathbf{I}_M az $M \times M$ -es egységmátrix. Ekkor persze $(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} = \mathbf{I}_M$. Ha most \mathbf{w}^* jelöli a korrelálatlanság esetének megoldásvektorát, \mathbf{w} pedig az általánosabb modell megoldásvektorát (ha $\nu_i = 0$ minden i -re), akkor

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\|_\infty \leq \kappa \|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} - \mathbf{I}_M\|_\infty \|\mathbf{1}_M\|_\infty = \kappa \left\| (\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} - \mathbf{I}_M \right\|_\infty, \quad (35)$$

ahol $\kappa > 0$ alkalmas konstans. Következésképpen teljesül, hogy

$$\|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} - \mathbf{I}_M\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\|_\infty < \kappa\varepsilon, \quad (36)$$

ahol $\varepsilon > 0$. Így, ha az általánosított modell kovariancia-mátrixa olyan, hogy $(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}$ mátrixnak az egységmátrixtól való végtelen-norma szerinti eltérése „kicsi”, akkor \mathbf{w} és \mathbf{w}^* eltérése is „kicsi”.

Mivel ismert azonosságok miatt igaz, hogy

$$\|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}\|_\infty \leq \|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} - \mathbf{I}_M\|_\infty + 1 < \varepsilon + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon + 1} \leq \|(\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1}\|_\infty^{-1} \leq \|\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}\|_\infty, \quad (37)$$

ezért $\|\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U}\|_\infty \leq \|\widehat{\mathbf{U}}\|_\infty \|\mathbf{U}\|_\infty$ következtében $\|\widehat{\mathbf{U}}\|_\infty^{-1} \|\mathbf{U}\|_\infty^{-1} - 1 \leq \varepsilon$ teljesül. Könnyen mutatható olyan példa, amikor a kovariancia-mátrix nem diagonális és $\|\widehat{\mathbf{U}}\|_\infty^{-1} \|\mathbf{U}\|_\infty^{-1} \leq 1$.

Ha a Q_i -k vektorát \mathbf{Q} jelöli, akkor

$$\mathbf{Q} = \frac{Q_F}{\gamma} (\widehat{\mathbf{U}}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{1}_M. \quad (38)$$

A súlyok birtokában és az S_F várható kínálati szint ismeretében (22) alapján Q_F kiszámolható. Így már a rendelendő input mennyiségeket is kalkulálhatjuk.

5 Numerikus illusztráció

Ebben a fejezetben eddigi megállapításaink egy részét numerikus példák segítségével illusztráljuk. Célunk a korábbiakban bemutatott elméleti vizsgálódás mélyebb megértése. A szemléltetéshez érzékenységvizsgálatot végzünk, amelyet néhány számpélda bemutatása követ.

5.1 Érzékenységvizsgálat

Az előző egységekben, a (19) egyenletben szereplő beszállítói súlyok alapján megvizsgáljuk, hogy a súlyok mennyire érzékenyek a megbízhatóságok szórásainak (egyes beszállítók kockázata) változására. Ehhez rugalmasságokat definiálunk, amelyek megmutatják, hogy a szórás százalékos változása hány százalékos változást idéz elő az adott változó értékében.

Nézzük meg elsőként a (19) összefüggéssel megadott w_i súly elaszticitásait ($i \neq k$):

$$\mathcal{E}_{w_i}^{(i)} = \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_i} \times \frac{\sigma_i}{w_i} = -2w_i \sigma_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{1}{\sigma_j^2} \quad (39a)$$

$$\mathcal{E}_{w_i}^{(k)} = \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_k} \times \frac{\sigma_k}{w_i} = 2w_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_k} \right)^2. \quad (39b)$$

Látható, hogy az első képletben σ_i növekedése a kapcsolódó rugalmasság csökkenését idézi elő. Azaz minél nagyobb az i -edik beszállító kockázata,

annál kevésbé reagál érzékenyen annak változására az F által i -hez rendelt súly. A második képletben σ_k növekedése esetén a megfelelő rugalmasság szintén csökken. Ezért az első képlet tekintetében leírtakhoz hasonlóan minél nagyobb a k -adik beszállító kockázata, annál kevésbé reagál érzékenyen annak változására az F által i -hez rendelt súly. Másképp fogalmazva, az első rugalmasság negativitása azt jelenti, hogy ha nő az adott beszállító kockázata, akkor csökken a súly. A második elaszticitás pozitivitása pedig azt jelenti, hogy ha egy másik, a k -adik beszállító megbízhatóságának szórása nő, akkor az i vállalat súlya is növekszik.

5.1.1 Numerikus példa

A most következőkben egy numerikus példa segítségével próbáljuk megvilágítani az előbb elmondottakat. A példa a (39a) összefüggéshez kapcsolódik. A feladatban $N = 3$, vagyis F -nek három beszállítója van. A példa három esetet tartalmaz, amit összesen három táblázat segítségével adunk meg (2-4. táblázat). Az első táblázat az egyes változók kiindulási értékeit, az ezt követő kettő pedig egy-egy változó módosítását, valamint ezekből a módosításokból fakadó új eredményváltozókat tartalmazza. Első esetben σ_2 , a másodikban pedig σ_1 értékét változtatjuk meg. A példához kis szórásokat választottunk. Abszolút értelemben kis, relatív értelemben nagy különbségekkel. A megengedhető tűrészatórok iparáganként, a termék jellegétől, de a vállalat stratégiájától függően is változhatnak.

A kiindulási helyzetben az 1-es vállalat megbízhatóságának szórása a legalacsonyabb, így ő is kapta a legnagyobb súlyt, azaz tőle rendel a legtöbbet a termelő vállalat. A 2-eshez tartozó szórás a legmagasabb, így az ő súlya a legalacsonyabb. A táblázatban feltüntetettük továbbá a 2-es beszállítóhoz tartozó rugalmasságokat. A kiindulási helyzethez képest az első módosításban csökkentettük a 2-es beszállító megbízhatóságának szórását, így értelemszerűen súlya növekedett, és mindkét rugalmassági szint közelebb került 0-hoz, azaz javult. A második módosításban a kiinduláshoz képest az 1-es beszállítóhoz magasabb kockázati szintet rendeltünk, ezzel súlya csökkent. Mivel még így is ő a legkevésbé kockázatos beszállító, ezért arányaiban továbbra is tőle rendel a legtöbbet a vállalat. A 2-es beszállító súlya és rugalmassági értékei a kiindulási helyzethez képest most is javultak, hiszen annak ellenére, hogy nála nem következett be változás, összességében mégis csökkent a hátránya.

Változó	Érték/eredmény
σ_1	0,001
σ_2	0,005
σ_3	0,004
w_1	90,70%
w_2	3,63%
w_3	5,67%
$\mathcal{E}_{w_2}^{(2)}$	-1,9274
$\mathcal{E}_{w_2}^{(1)}$	1,8141

2. táblázat. Kiindulási táblázat

Változó	Érték/eredmény
σ_1	0,001
σ_2	0,001
σ_3	0,004
w_1	48,48%
w_2	48,48%
w_3	3,03%
$\mathcal{E}_{w_2}^{(2)}$	-1,0303
$\mathcal{E}_{w_2}^{(1)}$	0,9697

3. táblázat. Első változómódosítás

Változó	Érték/eredmény
σ_1	0,002
σ_2	0,005
σ_3	0,004
w_1	70,92%
w_2	11,35%
w_3	17,73%
$\mathcal{E}_{w_2}^{(2)}$	-1,7730
$\mathcal{E}_{w_2}^{(1)}$	1,4184

4. táblázat. Második változómódosítás

A modell, illetve a számpélda nemcsak a termelő vállalat, hanem az egyes beszállítók számára is tanulságos. Megmutatja ugyanis, hogy ceteris paribus milyen mértékű javulást kell elérnie adott beszállítónak, hogy az általa preferált mértékben növekedjenek az irányába intézett megrendelések.

6 Összegzés és következtetések

Jelen tanulmányban annak támogatására dolgoztunk ki módszereket, hogy adott termelő meg tudja találni a számára legmegfelelőbb beszállítókat és azoktól az optimális mennyiségű inputokat rendelje. A modell és bemutatott változatai leginkább standard termékeket nagy volumenben előállító termelő vállalatok problémájára alkalmazhatók. A volumen mellett figyelembe vettük a minőség, a költség és az idő tényezőket is mint versenyprioritások. A termelő ugyanis nem használ fel selejt inputokat és nem ad el selejt outputokat. Figyelemmel kíséri az ehhez kapcsolódó költségeket. Továbbá a beszállítók megbízhatóságának meghatározásakor a selejtarány mellett az időre történő szállítást is figyelembe veszi. A határidőn túl leszállított újabb mennyiség csökkenti a beszállítóhoz rendelt várható megbízhatósági szintet.

A modell elsőként egy hátizsák feladat megoldásával határozza meg a beszállítók optimális kombinációját. A termelő célja a minőséget és az időt definíció szerint magában foglaló várható megbízhatóság maximalizálása egy adott költségvetési korlát mellett. Bemutattunk egy algoritmust, amely az LP-feladat optimális megoldását számolja ki.

A már kiválasztott beszállítók súlyozását és a tőlük rendelendő input-mennyiséget két különböző modellváltozatban is meghatároztuk. Mindkét változatban a termelő vállalat célja a megbízhatóság szórásának, azaz a megbízhatósági kockázat minimalizálása. Azonban első esetben a beszállítók

megbízhatóságát korrelálatlannak tekintjük, míg a másodikban nem élünk ezzel az egyszerűsítéssel.

Az explicit formák meghatározásán túl bemutattunk néhány numerikus példát is, eredményeink illusztrálása céljából. Az érzékenység-vizsgálatban arra mutattunk be példákat, hogy bizonyos beszállítóhoz tartozó kockázat változása hogyan befolyásolja a beszállítói súlyokat. Amennyiben a beszállítók tisztában vannak kockázati értékeik javításának költségeivel, úgy az érzékenység-vizsgálat segítségével el tudják dönteni, hogy a javítással járó magasabb súly elég többletprofitot eredményez-e számukra a fejlesztés rentábilis meg-lépéséhez.

A dolgozatban igyekeztünk – valamilyen értelemben – minél egyszerűbb problémákat modellezni, így meglehetősen szerteágazó a továbbfejlesztési lehetőségek köre. Bevonható a vizsgálódási keretbe az újságárus probléma, amelyben a túl- és az alulkészletezés is szerepet játszik. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy a modell alapkonceptióját megtartva milyen modellek írhatók fel heterogén inputok esetére. Valamint a második modellváltozat kapcsán foglalkozni lehet azzal a kérdéssel is, hogy melyek az optimális súlyok, ha nem minden KKT-szorító zérus.

Irodalom

1. Aissaoui, N., Haouari, M., Hassini, E., 2007. Supplier selection and order lot sizing modeling: A review. *Computers & Operations Research* 34(12), 3516–3540.
2. Chai, J., Liu, J. N. K., Ngai, E. W. T., 2013. Application of decision-making techniques in supplier selection: A systematic review of literature. *Expert Systems with Applications* 40(10), 3872–3885.
3. Chen, Y.-J., 2011. Structured methodology for supplier selection and evaluation in a supply chain. *Information Sciences* 181(9), 1651–1670.
4. Dickson, G. W., 1966. An Analysis of Vendor Selection Systems and Decisions. *Journal of Purchasing* 2(1), 5–17.
5. Dobos, I., Vörösmarty, G., 2014. Green supplier selection and evaluation using DEA-type composite indicators. *International Journal of Production Economics* 157(1), 273–278.
6. Dobos, I., Vörösmarty, G., 2019. Inventory-related costs in green supplier selection problems with Data Envelopment Analysis (DEA). *International Journal of Production Economics* 209(1), 374–380.
7. Dostál, Z., 2009. *Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, NY.
8. Fisher, M. L., 1997. What is the right supply chain for your product? *Harvard Business Review* 75(2), 105–117.
9. Gerschgorin, S., 1931. Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. *Izv. Akad. Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk*(6), 749–754.
10. Heizer, J., Render, B., Munson, C., 2017. *Operations Management: Sustainability and Supply Chain Management*, 12. kiad. Pearson Education Limited, England, UK.

11. Hosseininasab, A., Ahmadi, A., 2015. Selecting a supplier portfolio with value, development, and risk consideration. *European Journal of Operational Research* 245(1), 146–156.
12. Kellner, F., Liendland, B., Utz, S., 2019. An a posteriori decision support methodology for solving the multi-criteria supplier selection problem. *European Journal of Operational Research* 272(2), 505–522.
13. Kellner, F., Utz, S., 2019. Sustainability in supplier selection and order allocation: combining integer variables with Markowitz portfolio theory. *Journal of Cleaner Production* 214, 462–474.
14. Kim, D. Y., Wagner, S. M., 2012. Supplier selection problem revisited from the perspective of product configuration. *International Journal of Production Research* 50(11), 2864–2876.
15. Krajewski, L. J., Ritzman, L. P., Malhotra, M. K., 2019. *Operations Management. Processes and Supply Chains*, 11. kiad. Pearson Education Limited, England, UK.
16. Lee, C. Y., Chien, C. F., 2014. Stochastic programming for vendor portfolio selection and order allocation under delivery uncertainty. *OR Spectrum* 37(3), 761–797.
17. Levary, R. R., 2008. Using the analytic hierarchy process to rank foreign suppliers based on supply risks. *Computers & Industrial Engineering* 55(2), 535–542.
18. Markowitz, H., 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance* 7(1), 77–91.
19. Markowitz, H. M., 1971. *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press, New Haven, CT.
20. Porter, M. E., 1979. How competitive forces shape strategy. *Harvard Business Review* 57(3), 137–145.
21. Slack, N., Brandon-Jones, A., Johnston, R., Betts, A., 2015. *Operations and Process Management: Principles and Practice for Strategic Impact*, 4. kiad. Pearson Education Limited, Harlow, UK.
22. Su, C.-J., Chen, Y.-A., 2018. Risk assessment for global supplier selection using text mining. *Computers & Electrical Engineering* 68, 140–155.
23. Thornton, L. M., Autry, C. W., Gligor, D. M., Brik, A. B., 2013. Does Socially Responsible Supplier Selection Pay Off for Customer Firms? A Cross-Cultural Comparison. *Journal of Supply Chain Management* 49(3), 66–89.
24. Vizvári, B., 2006. *Egészértékű programozás*. Typotex Kiadó, Budapest.
25. Vörös, J., 2018. *Termelés- és szolgáltatásmenedzsment*. Akadémiai Kiadó, Budapest (e-book).
26. Wetzstein, A., Hartmann, E., Benton Jr, W. C., Hohenstein, N.-O., 2016. A systematic assessment of supplier selection literature – State-of-the-art and future scope. *International Journal of Production Economics* 182, 304–323.

OPTIMISATION METHODS TO SUPPORT SUPPLIER SELECTION DECISIONS

In this paper, a quite common supply chain management decision making problem is being taken into consideration, namely, the selection of suppliers. The companies

that are the most often facing this challenge are producing high amounts of goods. The aim of these firms is to meet a considerable demand at the highest possible level of expected reliability. Hence, they have to purchase all predetermined necessary and – as we assume – homogeneous inputs (raw materials, semi-finished products, parts, other components). The decision has to be made based on a firm’s unflinching awareness of its own production capabilities and all pieces of information about the reliability and costs of the potential suppliers.

Our goal is to elaborate a new decision making mechanism which creates an optimal supplier portfolio for the producer (denoted later on by F). The biggest methodological novelty of our paper is the application of the well-known Markowitzian portfolio approach (Markowitz 1952). The idea stems from the fact that during the decision making process, one needs to take into consideration the impact of the risky behaviour of suppliers, which accounts for the use of the mentioned methodology.

A multi-stage model is proposed as the decision mechanism which is not rare in the supply chain literature. A systematic review is provided by Aissaoui et al. (2007). Our model consists of two stages. First, we determine the optimal set of suppliers based on an algorithm starting off from the methodology of the knapsack problem. The selection criterion here is the reliability of the potential suppliers. In the next step the weights are calculated and the purchase decision concerning input quantity is carried out by minimizing the riskiness of the firm, i.e. by using a well-known method also used in portfolio analysis. We illustrate our results with numerical examples as well.

In the first stage we formulate an LP problem and an algorithm which contains reliability as a decision variable. Reliability denotes the ratio proper performance, i.e. appropriate quality inputs received in due time. Therefore, the use of such a variable has a strong practical side.

<i>Notation</i>	<i>Explanation</i>
N	Possible number of suppliers (positive constant)
M	Suppliers chosen by producer F (positive integer)
x_i	Binary variable, which takes the value 1, if i is a supplier of the producer, otherwise it is 0 (decision variable)
β_F	Random variable describing F 's reliability
b_F	Expected reliability of producer F
σ_F	Standard deviation of β_F
β_i	Reliability of supplier i (positive valued random variable in percentage)
b_i	Expected reliability of supplier i (finite number)
σ_i	Standard deviation of β_i (finite number)
Q_F	Total purchasable input by producer F
Q_i	F 's purchasable input amount from supplier i (decision variable)
w_i	Weight of supplier i in F 's supplier portfolio (decision variable)
S_F	Expected supply of the producer, i.e. its expected output
K_i	Shipping and other additional costs in case purchased from supplier i (positive constant)
K_F	Maximum of all shipping and other additional costs concerning producer F , i.e. the one of F 's budget constraint (positive constant)
$v(\cdot)$	Sum of the expected reliabilities of F 's suppliers

Applied notations

By applying the symbols introduced in Applied notations, the following LP needs to be solved:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N x_i K_i \leq K_F, \quad K_F \geq K_{\min}, \end{aligned}$$

After the first stage we determine the appropriate weights and the purchasable amount of inputs by applying the tools of portfolio analysis. Supplier risk is measured by reliability variance, and the aim of the producer is to minimize its own riskiness. This approach has already been introduced into the analysis of supply chains (see Hosseininasab & Ahmadi 2015).

Again using the above notations, our attempt is to solve the

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \text{cov}(\beta) \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^M w_i = 1, w_i \geq 0 \text{ for each } i. \end{aligned}$$

problem under different assumptions, where $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$.

In the next step, the composition of suppliers is to be determined. In other papers of literature, typically a ranking selection process takes place, however, in our model in the second step we calculate the weights and the amounts to be purchased. The portfolio approach appeared in the literature in the past few years, which proposes a supplier portfolio using risk minimization. Lee & Chien (2014), Kellner et al. (2019) and Kellner & Utz (2019) recommends a supplier portfolio based on risk minimization.

Beside the theoretical results, we have also shown some numerical examples regarding sensitivity analysis in our paper. We attempted to demonstrate how risk affects the assigned weights. This provides an opportunity for suppliers to determine whether it is worth improving their performance or not.

In our paper, we were motivated to model relatively simple problems in some sense. Therefore, the possible extensions are quite diverse. In our framework, the newsvendor’s problem might be introduced, or heterogeneous inputs might be taken into account as further research.

Key words: supplier selection, reliability, optimization, Markowitzian portfolio logic. *JEL:* C6, D8, G1

ÚJ FAKTOROK TESZTELÉSE AZ EMPIRIKUS ESZKÖZÁRAZÁSBAN¹

MÉRŐ BALÁZS – NAGY OLIVÉR – NESZVEDA GÁBOR
Budapesti Corvinus Egyetem

A keresztmetszeti részvényhozamok előrejelzése és alakulásuk megértése a pénzügyi kutatások, azon belül is az eszközárak egyik alapvető kérdése. A részvényhozamok magyarázatára a legelterjedtebb és legismertebb elmélet a CAPM (Capital Asset Pricing Model), amely azonban számtalan előnyös tulajdonsága ellenére az empirikus adatok magyarázatában nem bizonyult megfelelőnek. Többek között ez nyitott teret a faktormodellek megjelenésének, amelyek már jobb magyarázó erővel bírnak. Ebben a cikkben áttekintjük azokat a statisztikai módszereket, amelyek a nemzetközi szakirodalomban elterjedtek annak eldöntésére, hogy egy új faktor szignifikánsan befolyásolja-e a részvényhozamokat.

Kulcsszavak: Részvényhozamok, tesztek, CAPM, Fama-French, momentum

Bevezetés

Korunk pénzügyi kutatásainak egyik legnagyobb területe az eszközárak kérdése, azon belül is, hogy mi határozza meg a részvények várható hozamát. A tanulmány célja, hogy bemutassa a nemzetközi irodalomban leginkább elterjedt tesztek és módszertant az empirikus eszközárakban. Példaként a momentum hatást teszteljük a magyar tőzsdén.

A legelterjedtebb és legismertebb modellje ennek a kérdéskörnek a CAPM (Capital Asset Pricing Model, például Sharpe [1964], Lintner [1965]). A CAPM modell arra a következtetésre jut, hogy egy részvény hozamát csak az határozza meg, hogy mennyire van kitéve a részvény a szisztematikus kockázatnak, mivel minden más kockázat elkerülhető a diverzifikáció segítségével. A CAPM modellt sok kritika érte az erős feltevései miatt, de a legnagyobb kihívást mégis az jelenteti, hogy számos kutatási eredmény alapján az empirikus eredmények nem állnak összhangban a CAPM modell következtetéseivel.

Újabb modellek és empirikus megközelítések jelentek meg ennek hatására, de egyértelműen Fama és French [1992] három faktoros modellje vált a legelfogadottabb megközelítéssé. Fama és French [1992] a CAPM modell azon következtetését vizsgálta meg többek között, hogy egy részvény várható hozamát csak az határozza meg, hogy mennyire mozog együtt a piaccal. Ezzel

¹E-mail: mero.balazs1@gmail.com, nagyoli@mmb.hu, gabor.neszveda@uni-corvinus.hu. Beérkezett: 2018. december 18.

szemben azt találták, hogy a cégek mérete, valamint a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosa jelzi előre a részvények várható hozamát, míg az nem, hogy mennyire mozog együtt a piaccal. Ezek az eredmények tették végleg elfogadottá, hogy létezhet számos olyan faktor, ami megmagyarázhatja a részvények várható hozamát. Számptalan új faktor jelent meg a szakirodalomban az elmúlt évtizedekben. A teljesség igénye nélkül ilyen például a rövid-távú visszafordulások hatása (Short-term reversal) (Jegadeesh [1990]), a momentum hatás (Carhart [1997]), az elemzői vélemények szóródása (Diether et al. [2002]), az idioszinkretikus volatilitás (Ang et al. [2006]), a MAX hatás (Bali et al. [2011]) és a kilátás-elmélet érték hatás (Barberis et al. [2016]).

Jellemzően ugyanazzal a módszertannal tesztelik ezeket a faktorokat annak eldöntésére, hogy szignifikáns-e a magyarázó ereje, és a már ismert faktorokhoz képest új összefüggésről van-e szó. Ennek a tanulmánynak a fő célja, hogy bemutassa ezt a módszertant és annak alkalmazását. Nevezetesen, a három legelterjedtebb teszt típust: az egyváltozós sorbarendezést, a kétváltozós sorbarendezést és a Fama-MacBeth regressziókat [1973]. A tesztek és sajátosságainak bemutatásához a magyar tőzsdén teszteljük a momentum hatást és ezen keresztül tekintjük át a főbb tesztek alkalmazását, valamint azoknak előnyeit és hátrányait. Ezek a tesztek átfogó képet adnak egy lehetséges hatásról, de természetesen ezeknek a módszereknek is vannak hiányosságai. Az irodalom leginkább azt bírálja, hogy sok esetben a szokásos szignifikanciaszintek nem elegendők, és erősebb hatást kellene elvárunk a faktoroktól (Harvey et al. [2016]), mivel az amerikai részvénytőzsdén számos lehetőséget ki lehet próbálni, ami miatt sérül a statisztikai tesztek azon feltétele, hogy egymástól függetlenül vizsgálnák meg ezeket a faktorokat.

A következő fejezetekben először áttekintjük röviden a CAPM modell fő következtetését és annak empirikus kihívásait. Ezek után bemutatjuk a területen végzett kutatásokhoz alkalmazott főbb nemzetközi adatbázisokat, külön kiemelve a tanulmányban használt magyar adatokat. Az adatok után az egyváltozós sorbarendezés alapján készült tesztek mutatjuk be, melynek célja annak tesztelése, hogy az adott faktor alapján képzett kereskedési stratégia képes-e szignifikáns és gazdaságilag is jelentős hozamot hozni. Példánkban azt vizsgáljuk, hogy a momentum hatás (Jegadeesh és Titman [1993]) nyereséges stratégiát biztosít-e a magyar tőzsdén is. A kétváltozós sorbarendezést ezek után tekintjük át, amely annak eldöntésére szolgál, hogy nem egy másik már ismert faktor hatását sikerült-e újra kimutatni. Ebben az esetben azt nézzük meg, hogy a momentum hatást nem magyarázza sem a piaci béta, sem a cég mérete, sem a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosa. Végül a Fama-MacBeth [1973] regressziókat mutatjuk be, és szintén azt teszteljük, hogy a momentum magyarázó ereje eltűnik-e, ha a piaci bétára, a méretre valamint a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosára egyszerre kontrollálunk. Végezetül összefoglaljuk a bemutatott eredményeket.

CAPM és a faktor modellek

A részvényhozamok várható értékének legismertebb modellezése a Sharpe [1964] és Lintner [1965] által alkotott tőkepiaci árfolyamok modellje², vagyis a CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). A CAPM árazási szempontból vett legfőbb állítása, hogy az egyedi eszköz várható hozamprémiuma $E(R_i - R_f)$ csak a piaci hozamprémiumhoz ($E(R_m) - R_f$) való kapcsolatától (β_i) függ. Ez a kapcsolat lineárisan leírható, ahol $E(R_i)$ az egyedi eszköz várható hozama, $E(R_m)$ a piaci portfólió várható hozama és R_f a kockázatmentes hozam. Az R_f a kockázatmentes eszköz hozama, tipikusan az amerikai állampapír hozama az empirikus elemzésekben, mint a legbiztonságosabb befektetés a vizsgált időszakban. A β_i definíció szerint egyedi és a piaci hozam közti kovariancia osztva a piaci hozam varianciájával az adott időszakban

$$\beta_i = \text{Cov}(R_i, R_m) / \sigma_m^2,$$

ami a piaci és az egyedi hozam együttmozgásának mértékét adja meg. Tehát a CAPM az alábbi módon írja le egy eszköz várható hozamát:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f). \quad (1)$$

Elméletben a piaci portfólió egy olyan portfólió, amiben az összes lehetséges befektetés benne van a piaci értékének arányában, gyakorlati elemzésekben ennek közelítésére egy részvénypiaci indexet szokás használni.

Természetes, feltevések egész sorának kell teljesülnie, hogy az elméletet elfogadjuk. Számos bírálat is érte a CAPM modell egyes feltételeit (Lintner [1965]), mint például, hogy a befektetők egyéb jövedelem nélkül működő aktorok, akik mindannyian árelfogadóak, tökéletesen racionálisak, döntéseiket homogén várakozások alapján hozzák meg mindig a következő 1 periódusra vonatkozóan, szigorúan a várható hozam és a variancia függvényében. Továbbá, a tőkepiacok tökéletesek, ezért nincsenek adók, a tranzakcióknak és az információszerzésnek nincsen költsége, az értékpapírok végtelenül oszthatóak, megvalósítható a rövidre eladás és létezik formája a kockázatmentes eladósodásnak/hitelnyújtásnak.

Az egyik leghíresebb kritika (Roll [1977]) szerint a CAPM-mel kapcsolatos hipotézist szinte lehetetlen igazából tesztelni, mivel az egyenlet elemei nem megfigyelhetők. Az alkalmazott tőzsdeindexek nem egyeznek meg a piaci portfólióval, hiszen az összes elérhető eszköz hozamának benne kellene lennie a piaci portfólióban (tőzsdén kívüli vállalatok, ingatlanok, nemesfémek, bélyeggyűjtemények, ékszerek, stb.). Ezen felül az eszközök várható hozamát sem tudjuk megfigyelni, csak a realizált hozamokat vagy a várható hozam valamilyen közelítését. Így a CAPM a gyakorlatban nem tesztelhető. Amennyiben feltesszük, hogy a piaci portfólióra és a hozamokra vonatkozó feltételek helyesek, akkor empirikus úton az (1) modell β_i paramétere lineáris regresszióval becsülhető múltbeli adatokon. Ez egy újabb empirikus kihívást jelent, hiszen nincs egyértelmű garancia arra, hogy a múltbeli összefüggések

²Tőkepiaci árazás modellje névre is fordítható.

és folyamatok a jövőben is azonosak lesznek.³ Mindezen kihívások ellenére gyakran becsülik a részvények bétáját az említett összefüggések alapján az alábbi módon:

$$R_{i,t} - R_{f,t} = \alpha + \beta_i(R_{m,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{i,t}. \quad (2)$$

A β_i paraméter becsléséhez általában felteszik, hogy a súlyozott piaci hozam jól megragadja a piaci portfólió R_m hozamát, míg a tőzsdén jegyzett részvény hozama megfelelően megragadja az eszközár R_i változását. A két leggyakrabban vizsgált időhorizont az elmúlt egy hónap napi hozamai (például Bali et al. [2011]) és az elmúlt 5 év havi hozamai (például Wang et al. [2017]). A béta különböző becslésének széles körű irodalma van, például Scholes és Williams [1977] valamint Dimson [1979] szerepelteti a regresszióban az adott nap előtti és utáni piaci hozamot is, és kiátlagolja a három becsült béta paramétert, hogy így csökkentse a zaj hatását.

A CAPM-t számos módon tesztelték az elmúlt évtizedekben. Az első teszt, hogy a (2)-es egyenletben megfigyelhető α egyenlő 0-val ($\alpha = 0$), hiszen csak a piaci hozamprémium határozza meg a várható hozamprémiumot a CAPM modellben. A többi teszt azon alapszik, hogy a részvényenként becsült β_i paraméter a kockázatosságát jelöli, és mivel a történelmi hozamokban megfigyelt eredményeink alapján feltehetjük, hogy $E(R_m - R_f) > 0$, így egy részvény várható hozama pozitív kapcsolatban áll a β_i paraméterével, és csak ez határozza meg a várható értékét. Ezzel szemben az empirikus eredmények azt mutatják, hogy az α konstans nem nulla és vannak a piaci portfólión kívül még olyan tényezők, amik magyarázzák az eszközök hozamait, ráadásul a piaci béta sem áll pozitív kapcsolatban a jövőbeli hozamokkal (Baker et al. [2011]).

Fama és French [1992] egy olyan modellt alkotott, amelyben további két tényezőt azonosítottak. Az első a kis és nagy kapitalizációjú vállalatok alkotta portfóliók között megfigyelhető hozamkülönbség (*Small-Minus-Big*), amit a vállalatok mérete által nyújtott stabilitással és az ebből fakadó kisebb kockázattal is lehet magyarázni. A második tényező a magas és az alacsony könyv szerinti érték és a piaci érték (B/M) hányadosú részvények portfólióinak hozamkülönbsége (*High-Minus-Low*), amit a várható teljesítményre alapoznak, így a potenciálisan alulértékelt részvények jobban fognak teljesíteni, mint a felülértékelt részvények. Fama és French [1992] ezek alapján a következő módon modellezik a hozamprémiumokat:

$$E(R_i) - R_F = \beta_1(E(R_m) - R_f) + \beta_2SMB + \beta_3HML. \quad (3)$$

A faktorok teljesítményének pontos magyarázata viszont továbbra is nyitott kérdés. A piaci kapitalizáció hatása a hozamokra például a januári hónapban koncentrálódik az amerikai részvénytőzsdéken (Keim [1983], Brown et al. [1983]).

³Az említett elméleti kihívások mellett sokszor statisztikai módszertani kihívások is felmerülnek. Például a becsült β_i paraméterek a gyakorlatban nem konzisztensek, mivel az OLS becslés feltevései nem teljesülnek az részvényhozamokra.

A Carhart modell [1997] a Fama-French féle háromfaktoros modellt egészítette ki egy további, momentum faktorról (MOM). A momentum faktor korábban is létezett Jegadeesh és Titman [1993] cikke óta a szakirodalomban, amely definícióját követjük, miszerint az az adott részvény hozama a $t - 2$ -től a $t - 12$ hónapig tartó időszakban, ahol $t - 1$ az utolsó ismert megfigyelés és t -re szeretnénk előrejelezni. Példa szintjén ez azt jelenti, hogy ha 2018 januárjára szeretnénk várható hozamokat előrejelezni, akkor a 2017 januárja és 2017 novembere között kumulált hozamot számoljuk ki. A momentum egy olyan várakozásként értelmezhető, miszerint azok a részvények, amik a múltban jól teljesítettek, továbbra is felülteljesítők maradnak, míg a gyengén teljesítő részvények a jövőben is alulteljesítők lesznek. Carhart (1997) eredményei szerint a momentum faktor szignifikánsan tudja magyarázni a hozamok alakulását a korábbi 3 faktor megléte mellett is, és az alábbi modellel írja le az eszközök hozamprémiumát:

$$E(R_i) - R_F = \beta_1(E(R_m) - R_f) + \beta_2SMB + \beta_3HML + \beta_4MOM. \quad (4)$$

Fama és French [1992] modellje és a Carhart [1997] modell nagyban javította az eszközhozamok magyarázatát, de ennek ellenére számtalan újabb faktor és szempont jelent meg, ami javítani kívánja az eszközök hozamának magyarázatát. A következő fejezetben először a használt adatbázisokat és az adat előkészítésének módjait mutatjuk be, majd azokat a teszteket, amelyek segítenek statisztikailag megítélni egy lehetséges új faktor jelentőségét és relevanciáját.

Adatok

Az amerikai részvényhozamok elemzéséhez a CRSP adatbázis a legelterjedtebb míg az amerikai vállalati adatok kapcsán a COMPUSTAT adatbázist szokás használni (például Ang et al. [2006], Bali et al. [2011], Barberis et al. [2016]). A nemzetközi részvénytörzsek kapcsán a Datastream adatbázis a legelterjedtebb (például Annaert et al. [2013] Cheon és Lee [2017]), de használnak saját egyedi adatbázisokat is, leginkább Kína esetében (*CSMAR*) például Nartea [2017].

Ezeknek az adatbázisoknak fontos előnye, hogy tartalmazzák az osztalékkal és a részvénytörzsek változással korrigált hozamokat, így ezek nem torzítják az elemzéseket. Emellett ezeket az adatbázisokat használja leginkább a nemzetközi irodalom, és egyben ezeket a forrásokat tartja a legmegbízhatóbbnak, valamint a leginkább teljes körűnek az adatok szempontjából. Az elemzések szempontjából fontos, hogy ezek az adatbázisok ne csak a ma is jegyzett részvényekről tartalmazzanak adatokat, hanem az időközben kivezetésre került részvényekről is, így elkerülhető a túlélési torzítás (*survival bias*).

Az adatbázisok megválasztása mellett fontos az elemzések szempontjából a minta kiválasztása. A nemzetközi irodalomban elfogadott, hogy csak a tradicionális részvényeket elemzik, és a mintából elhagyják a befektetési alapokat

vagy egyéb más termékeket. Emellett van több olyan döntés is az empirikus kutatásokban, amelyek lényegesek, de nincs általánosan elfogadott módszer.

Egyik fontos kérdés a szélsőséges megfigyeléseknek a kezelése. Az amerikai adatok esetén gyakori a winzorizálás, amely kapcsán az adott hónap megfigyelései közül az 1. percentilis alatti értékeket kicserélik az 1. percentilis értékével és a 99. percentilis feletti értékeket kicserélik a 99. percentilis értékével. Ezzel megőrzik a megfigyeléseket, de a szélsőséges értékek nem tudják túlságosan befolyásolni az eredményeket. A nem amerikai adatok kapcsán gyakori az extrém értékek elhagyása, például, ha a megfigyelt napi vagy havi hozam 200% felett van, ezzel csökkentve a potenciális adathibák okozta zajt (például Nartea [2017]).

Második nagyobb témakör az illikvid és az alacsony árú részvények helyzete. Ezeknek a részvényeknek az ára sokszor nem ad valódi képet a cég értékéről, mert kevesen kereskednek vele, vagy az ára olyan alacsony egy részvénynek, hogy egy már kis elmozdulás is az árban egyből nagy mértékű hozamváltozást eredményezhet. Az illikvid részvények kapcsán gyakran elhagyják az adatbázisból a legillikvidebb megfigyeléseket az amihud illikviditás mutató (Amihud [2002]) vagy a turnover illikviditás mérőszám alapján. Az alacsony részvényárakból fakadó kihívások esetén legtöbbször elhagyják a legkisebb értékekkel rendelkező részvényeket. Az amerikai részvénypiacok esetén ez a határ leggyakrabban az 5 dollár, tehát kihagyják az elemzésből az összes olyan megfigyelést, amikor a részvény ára ez alatt a küszöbérték alatt van. Továbbá felmerülhet a legkisebb piaci kapitalizációval rendelkező cégek elhagyása is, ha csökkenteni akarják annak a valószínűségét, hogy az eredményeket csak a kis cégek részvényei hajtják. Végül, egyes szektorok sajátos szerepei miatt, néha külön kezelik a pénzügyi és a közmű cégek részvényeit.

Ebben a tanulmányban a Magyarországon kereskedett részvényeket elemezzük, a mintában nem szerepelnek befektetési alapok vagy más termékek. A vizsgált napi és havi hozam adatainkat (*pl.: osztalékkal és részvénytávvaltozással korrigált hozamokat (Total Return Index)*), a napi és havi forgalom adatainkat (*Turnover by Volume*), a piaci árakat (*Unadjusted Price*), az összes részvénytávvaltot (*Common Shares Outstanding*) és a BUX indexre vonatkozó adatokat a Datastream adatbázisból vettük, míg a könyvviteli adatok (*pl.: könyv szerinti érték (Book value per share)*) a Worldscope adatbázisból származnak. Ezeket egységesen a Thomson Reuters Eikon adatbázisból értük el. Minden értéket dollárban számolunk, valamint a minta azon elemeit, amik a napi vagy havi 200%-nál magasabb hozamot értek el, nem vesszük figyelembe (üres elemként kezeljük). Végül a kockázatmentes hozamnak az amerikai egy havi kincstárjegyek hozamát tekintjük⁴.

A magyar adatok esetén, mint minden amerikai piacon kívül eső részvényt elemző kutatás kapcsán felmerül a kérdés, hogy mit tekinthetünk kockázatmentes hozamnak, és hogy milyen pénznemben számolt árfolyamokkal számolunk. Az elemzéseinkben azért választottuk az amerikai dollárban számolt értékeket, mert a magyar tőzsdén nagy mértékben jelen vannak a külföl-

⁴Az amerikai állampapír hozamokban Fama és French [1992] modelljét követjük és French honlapján elérhető adatokat használjuk.

di befektetők a kezdetektől fogva, és az ő tulajdonrészük, befolyásolási lehetőségük nagyobb, mint a hazai befektetőké⁵, illetve az intézményi befektetői kör is szintén hozzáfér a nemzetközi piacokhoz, így nem érinti kizárólagosan a magyar befektetési lehetőségek. Másrészt ezáltal könnyebb összehasonlítani több különböző piac eredményeit, ezért a nemzetközi kutatások is gyakran használják ezt a megközelítést (például Cheon és Lee [2017]).

A gyakorlatnak megfelelően a mintákból törölünk minden olyan megfigyelést, amelyre nincs érték valamelyik az elemzésben használt változónk közül, tehát minden, a mintában szereplő megfigyelésnek rendelkeznie kell hozammal, jövő havi hozammal, piaci béta értékkel, cégmérettel, könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosával, turnover likviditás mutatóval és momentummal. Mivel a momentum értékhez rendelkeznie kell legalább egy évnnyi adattal a részvénynek, ezért például az adatbázis első egy éve automatikusan elveszik ebben az esetben, sok más megfigyeléssel együtt.

Továbbá törölünk minden olyan megfigyelést, aminek nincs legalább 5 kereskedési adata egy hónapban, valamint minden hónapban a 10% legillikvidebb részvényt szintén töröljük. Ez utóbbit azért tesszük meg, mert általában ezek az extrém illikvid részvények gyakran akár 0 forgalommal rendelkeznek az adott hónapban, ami megkérdőjelezi az adat jelentőségét és értelmét. Ennél nagyobb százalékban azért nem töröljük a részvényeket, hogy ne veszítsünk el túl sok adatot, mivel a magyar tőzsde egyébként is kevés megfigyeléssel rendelkezik. Végül töröljük azokat a részvényeket azokból a hónapokból, amikben nincsen legalább 10 megfigyelés ezek után. Erre azért van szükség, mert a statisztikai tesztek megkövetelnek egy minimális megfigyelésszámot egy hónapban, hogy értelmezni lehessen őket.

Összesen ezután 5674 havi részvényt megfigyelésünk marad 1996 januárjától 2017 decemberéig, ami átlagosan kicsivel több, mint havi 21 megfigyelést jelent a mintánkban. A nemzetközi elemzésekhez képest ez egy lényegesen kisebb szám, de ez tovább erősíti az eredményeket, ha a kis elemszám és a zajos adatok ellenére is szignifikáns összefüggéseket találunk. Természetesen az elvek nagyobb adatbázisokon ugyanígy alkalmazhatók.

A használt változókat a következőképpen definiáljuk. A Beta minden hónap napi adatain a (2) egyenlet alapján becsült érték. A Size az elmúlt egy hónap végén megfigyelt piaci részvény ára szorozva az összes részvényt (shares outstanding) és ennek a logaritmusával. A B/M a könyv szerinti érték és piaci érték hányadosának logaritmusával. A Turnover likviditás mutató pedig a forgalom osztva az összes elérhető részvényt számmal. Végül a momentum hatás (MOM) a kumulált hozama az elmúlt egy évnek az elmúlt egy hónap kivételével, követve Jegadeesh és Titman [1993] tanulmányát.

⁵Például az OTP külföldi tulajdonhányada 60% felett volt 2018-ban (www.otpbank.hu/portal/hu/IR_Tulajdonosi_struktura).

Faktor tesztelés

Ebben a fejezetben áttekintjük a három legáltalánosabb megközelítést új faktorok tesztelésére és a momentum hatást vizsgáljuk meg a magyar tőzsdén. Először az egyváltozós sorbarendezést ismertetjük, kitérve annak előnyeire és hátrányaira. Az egyváltozós sorbarendezés tekinthető az új faktor megalkotásához szükséges első lépésének, mivel ez a teszt dönti el, hogy a faktor szignifikánsan előrejelzi-e a keresztmetszeti részvényhozamokat. Másodszor a kétváltozós sorbarendezés módszertanát tekintjük át. Ez a módszer már alkalmas arra, hogy tesztelje, vajon az új faktor nem egyszerűen csak egy már ismert faktor hatását ragadja meg újra. Végül a Fama-MacBeth [1973] regresszió módszerét mutatjuk be, rávilágítva ennek az eljárásnak is az előnyeire és hátrányaira. A Fama-MacBeth [1973] regresszió szintén azért terjedt el, mert egy tesztet biztosít annak eldöntésére, hogy az új faktor szignifikáns előrejelző marad-e, ha kontrollálunk több már ismert hatásra és figyelembe veszi a részvénytípusú információt is, szemben a portfóliókkal.

Egyváltozós sorbarendezés

Az új faktor tesztelésének első és legegyszerűbb formája az egyváltozós sorbarendezés (*Univariate sort*). Ebben az esetben egy olyan kereskedési stratégiát vizsgálunk, ami a múltban hozzáférhető adatok alapján megvalósítható volt. A részvényeket a vizsgált változó értéke szerint sorba rendezzük minden hónapban, majd portfóliót képzünk, esetünkben a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosa (*Book-to-Market*), a cégméret (*Size*), a piaci béta (*Beta*) és a momentum (*MOM*) szerint. A portfóliók képezhetőek számos módon, de a legelterjedtebbek a decilis, kvintilis vagy tercilis alapon.

Követve a Fama és French [1992]-féle konvenciót, tercilisekbe rendezzük minden hónapban a részvényeket a *Size*, *B/M* arány, piaci béta és a momentum szerint. A vizsgált változó szerinti legmagasabb 30% kerül a felső tercilisbe, míg a legalacsonyabb 30% kerül az alsó tercilisbe. Bár a tercilis kifejezés terjedt el, Fama és French [1992] cikkét követve nem 33,3% az osztópont érték, hanem az alsó és felső 30% a szakirodalomban. Ezt követően kiszámoljuk minden portfólió következő havi hozamát és a piaci mérettel súlyozott következő havi hozamát. Ezek alapján mind a három tercilisből képzett portfóliónak van egy következő havi hozama minden hónapban. A havi hozamokat kiátlagoljuk, hogy ezáltal egy közelítést kapjunk a várható értékekre. Végül ezek alapján tudjuk tesztelni a potenciális kereskedési stratégiát, ami szerint megvásároljuk a legmagasabb értékekkel rendelkező portfóliót és eladjuk a legalacsonyabb értékekkel rendelkezőt minden hónapban. Az átlagos havi hozamait a portfólióknak az 1. táblázat mutatja.

Esetünkben ez annyit jelent, hogy minden hónapban megvesszük a legnagyobb momentum értékkel rendelkező portfóliót, és eladjuk a legkisebbeket tartalmazót. A portfóliókat lehet egyenlően súlyozni, tehát a részvényekből ugyanolyan értékben veszünk, vagy a robusztusabb eredmények érdekében piaci értékük arányában súlyozzuk őket a portfóliókon belül. A piaci értékkel

súlyozott portfólió egy realisabb képet ad, mivel kevésbé húzzák el az átlagot a kisebb részvények, és jellemző, hogy a kis cégekből nehezebb ugyanolyan értékben vásárolni mint a nagy cégekből, valamint a piaci értékkel súlyozott portfóliót nem kell minden hónapban újraszúlyozni az árfolyamváltozások miatt.

Ezt követően azt a hipotézist vizsgáljuk meg, hogy ennek a kereskedési stratégiának havi hozamai szignifikánsan különböznek-e 0-tól. Ennek tesztelésére a Newey-West [1987] korrigált t -statisztikát szokás használni, hogy a becslés heteroszkedaszticitás és autokorreláció mellett is torzítatlan legyen⁶. A leggyakoribb késleltetési paraméter a 12 havi késleltetés Newey-West [1987] korrigált t -statisztikánál, ami az éves szintű szezonálisra kontrollál.

Az 1. táblázat bemutatja a magyarországi részvényekből képzett egyenlően és értékkel súlyozott tercilis portfóliók átlagos havi hozamait 1996 januárja és 2017 decembere között. Az első érdekes eredmény, hogy a piaci béták szerint képzett portfóliók között nincs szignifikáns hozamkülönbség. Ez a CAPM egyik tesztje is egyben, mivel a CAPM szerint a magasabb bétákból képzett portfólió magasabb hozamot hoz, mint az alacsonyabb bétákból képzett. Ez az eredmény egyértelműen nem támasztja alá ezt a hipotézist, ami összhangban van a nemzetközi irodalommal, amely szintén nem talál ilyen általános érvényű összefüggést a múltbeli piaci béták és a jövőbeli hozamok között (Baker et al. [2011]). Ennek az eredménynek számos értelmezése lehet. Például fakadhat abból, hogy nehéz mérni a piaci bétát, de van olyan viselkedési pénzügyekből vett megközelítés is, ami szerint veszteségben kockázatkedvelők a befektetők, ami miatt eltűnik az egységes pozitív kapcsolat a várható hozam és piaci béta között (Wang et al. [2017]).

A nemzetközi irodalomnak megfelelően a kis piaci kapitalizációjú részvényekből képzett portfólió magasabb hozamot hoz (1.46%), mint a nagy részvényekből képzett (1.34%). Ennek ellenére az 0.12% havi átlagos hozamkülönbség a két szélső portfólió között nem szignifikáns az egyenlően súlyozott portfóliók esetén. A piaci értékkel súlyozott portfóliók esetében sem találunk szignifikáns hozamkülönbséget. Ez az eredmény összhangban van a szakirodalommal, amely szerint a cégmérete sok esetben nem rendelkezik erős előrejelző képességgel a nem amerikai részvénytőzsdéken (Fama és French [2012]).

A könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosa viszont már komolyabb előrejelző képességgel rendelkezik a magyar piacon is. A legkisebb B/M értékkel rendelkező részvények portfóliója 0.82 százalékot hoz átlagosan havonta, míg a legnagyobb értékkel rendelkezők havi 1.71%-ot. A kereskedési stratégia ezáltal 0.89% havi hozamot ígér, amely nemcsak gazdasági értelemben, de statisztikailag is szignifikáns ($t = 1.87$). A piaci mérettel súlyozott portfóliók esetén is statisztikailag szignifikáns ez a kereskedési stratégia.

⁶Annak ellenére, hogy nemzetközileg elfogadott sztenderd a Newey-West [1987] t -statisztika használata, fontos megjegyezni, hogy Petersen [2009] azt találta, hogy ezen eljárás esetén is torzítottak a standard hibák, bár kisebb mértékben, mint az OLS esetén. Akkor kapunk valóban torzítatlan standard hibákat, ha kontrollálunk a variancia céges szintű és időbeni klasztereződésére is.

A momentum hatás alapján készült kereskedési stratégia viszont már a piaci értékkel és az egyenlően súlyozott portfóliók között is 5%-on szignifikáns hozamot hoz. A vesztes részvények 0.68% havi átlagos hozamot hoznak, míg a nyertes részvények havi 1.80%-ot, a piaci értékkel súlyozott portfóliók esetén. Az erre épülő kereskedési stratégia 1.11% havi hozamot ígér, aminek a t értéke (2.19) szignifikáns eredményt jelent. A momentum hatásnak szintén számos értelmezése van. Például az egyik elterjedt magyarázata a befektetői túlzott önbizalomra vezeti vissza az eredményeket (Cooper – Gutierrez [2004]). Az ő értelmezésük szerint, ha a befektetők pozitív hírt várnak és ez be is következik, akkor még erősebben és egyben már túlzottan is hisznek abban, hogy jól fog teljesíteni a cég, ami újabb pozitív hozamokat generál. Ugyanez a túlzott önbizalom a cég negatív teljesítményével kapcsolatban is kialakulhat a rossz hírek esetében, ami további alacsonyabb hozamokat generál.

Tercilis portfóliókat képezzünk minden hónapra 1996 januárjától 2017 decemberéig, sorba rendezve őket egyenként, a piaci bétájuk (BETA), a méretük (SIZE), a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosuk (B/M) és a momentum változó (MOM) szerint. Az 1-es (3-as) részvényportfóliónak van a legkisebb (legnagyobb) értéke a vizsgált változó szerint. Az 1. táblázat bemutatja az egyenlően súlyozott és az értékkel súlyozott portfóliók átlagos havi hozamait, és a hozzájuk tartozó Newey-West-féle [1987] korrigált t -statisztikákat (a zárójelen belül). Minden változóhoz kiszámítottuk a 3-as és az 1-es portfóliók közötti átlagos hozamkülönbséget, valamint a momentum esetén Fama-French-féle három faktorról kontrollált alfa értékeket. Az átlagos nyers és a korrigált hozamok százalékos alakban vannak megadva.

Változó	Tercilis	Egyenlően súlyozott portfólió		Értékkel súlyozott portfólió	
		Átlagos hozam	Newey-West-féle t	Átlagos hozam	Newey-West-féle t
BETA	1	1.23*	(1.84)	0.89	(1.41)
	2	1.02	(1.63)	1.34**	(2.57)
	3	1.39*	(1.76)	1.62**	(2.34)
	3-1	0.17	(0.31)	0.73	(1.40)
SIZE	1	1.34*	(1.75)	0.68	(0.98)
	2	0.92	(1.19)	0.78	(1.10)
	3	1.46**	(2.50)	1.47**	(2.35)
	3-1	0.12	(0.22)	0.78	(1.52)
B/M	1	0.82	(1.15)	1.10*	(1.70)
	2	1.12*	(1.73)	1.51***	(2.62)
	3	1.71**	(2.46)	2.04***	(2.64)
	3-1	0.89*	(1.87)	0.94*	(1.81)
MOM	1	0.57	(0.76)	0.68	(1.00)
	2	1.07*	(1.79)	1.22*	(1.85)
	3	2.03**	(2.55)	1.80**	(2.57)
	3-1	1.45**	(2.56)	1.11**	(2.19)
	FF3	2.39***	(4.21)	1.56***	(3.43)

* $p < 0.10$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.01$

1. táblázat. Részvényportfóliók hozamai piaci béta, méret, könyv szerinti és piaci érték hányadosa és momentum szerint rendezve. Forrás: Saját számítás és szerkesztés.

Fama-French modell

Az 1. táblázat mutatja a cégméret, valamint a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosából képzett faktort is egyben, amely a magas értékekből képzett portfólió mínusz az alacsony értékekből képzett portfólió hozama. Annak belátására, hogy a momentum hatásból képzett új faktor különbözik-e a már előtte ismert cégméret, valamint a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosából képzett faktoroktól, egy újabb tesztet kell lefuttatnunk.

Az egyváltozós sorbarendezés előnye az egyszerűségéből fakad, valamint, hogy egyértelműen meghatározható az új faktor relevanciája, függetlenül a kapcsolat struktúrájától, tehát nem kell előzetes megkötést tenni az új magyarázó változó és a hozamprémium közötti hatások linearitására. Jelentős hátránya ezzel szemben, hogy több tényező hatása egyszerre nem határozható meg, ezért erős magyarázó változók közti korreláció esetén elképzelhető, hogy csupán egy létező kockázati hatás ismételt lemodellezése történt. Ennek kezelésére megoldás, hogy a vizsgált portfóliók hozamkülönbséget regresszáljuk eredmény változóként, magyarázó változónak a Fama-French-féle három, vagy a Fama-French-Carhart-féle négy faktort használjuk. Amennyiben ennek a regressziónak a konstans tagja szignifikáns, akkor az új stratégia nem modellezhető teljes egészében a már létező faktorokkal.

Tehát a momentum hatásból képzett hozamkülönbséget regresszáljuk a piaci hozamprémiumra (ezzel kontrollálva a CAPM-re), a cégméretből képzett hozamkülönbségre, a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosából képzett hozamkülönbségre és a konstansra (α). Összesen a mintában szereplő hónapok számával megegyező megfigyelésünk lesz a regresszióban, ami esetünkben 264 megfigyelés.

Ennek a tesztnek az eredménye az utolsó sorban szerepel a 1. táblázatban. Azt találjuk, hogy a momentum hatás nem hogy gyengébb, hanem inkább erősebb lesz, ha kontrollálunk a Fama-French modellre. Mind az egyenlően súlyozott és a piaci értékkel súlyozott portfólió esetben a momentum hatásra épülő kereskedési stratégia körülbelül 2% feletti havi hozamot ér el, statisztikailag is szignifikáns t értékekkel.

Összegezve, az egyváltozós sorbarendezés nagy előnye, hogy egyszerű, és jól értelmezhetők az eredményei. Ez alapján képezhető egy kereskedési stratégia, ami jól mutatja, hogyan befolyásolhatja az adott összefüggés a részvényhozamokat. További pozitív tulajdonsága, hogy az összefüggés tesztelésekor nem feltételez semmilyen függvényformát a vizsgált tulajdonság és a jövőbeli hozamok között. Mindemellet előnye még, hogy a portfólióképzés csökkenti annak az esélyét, hogy néhány egyedi eset jelentősen befolyásolja az eredményeket, amik így megbízhatóbbak. Ezekon felül könnyen megoldható a megfigyelések súlyozása, például piaci érték szerint, de bármely súlyozási megközelítés rugalmasan kezelhető.

Ezzel szemben számos hátránya is van a módszernek. A legfontosabb, hogy nem kontrollál más, már ismert faktorokra. A Fama-French féle 3 faktoros modell bővíthető további faktorokkal, így tesztelhető, hogy a modellben szereplő faktorok magyarázzák-e az új faktor eredményeit. Ez az egyik legel-

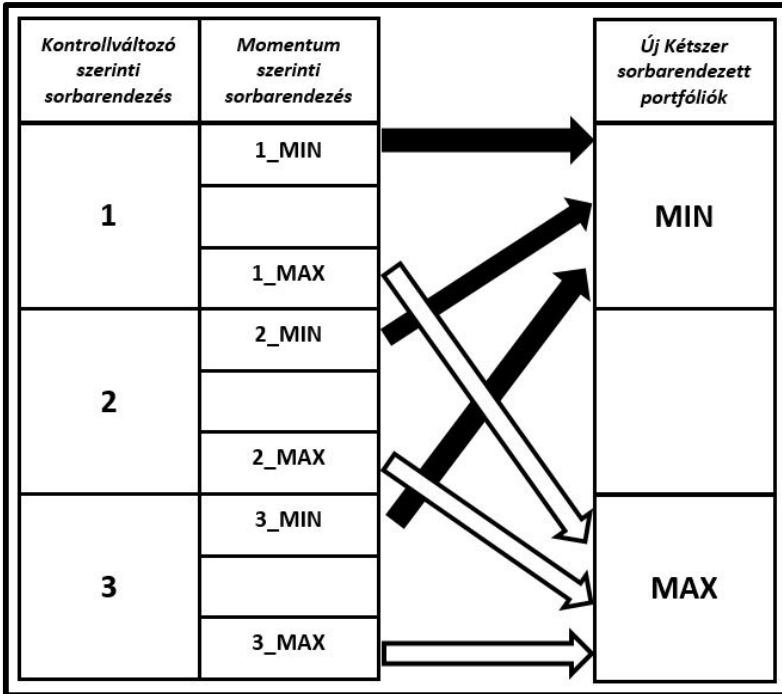
terjedtebb teszt, amelyet szinte minden esetben megkövetelnek annak érdekében, hogy megmutassa, hogy egy új faktor nem magyarázható könnyen ezen elterjedt faktorokkal. Viszont elterjedtségük hatására több kritikai megközelítés is született, amelyek leginkább azt emelik ki, hogy a modellek magas R^2 értéke könnyen lehet a véletlen eredménye is, így azokat nem érdemes figyelembe venni (Lewellen et al. [2010]). Emellett sok információt is veszít azzal, hogy portfóliókat képez, mivel az egyedi részvényekből kinyerhető információ mennyiségének egy része az aggregálás során elveszik.

Ezen kritikai elemek miatt érdemes további tesztekkel megvizsgálni egy új faktor hatását a jövőbeli részvényhozamokra. A következő lépésben a kétváltozós sorbarendezést mutatjuk be, majd a Fama-MacBeth regressziókat.

Kétváltozós sorbarendezés

Fontos, hogy az új faktor ne egy már ismert hatás újra alkotása legyen. A Lakonishok et al. [1994] által először alkalmazott kétváltozós sorbarendezés (*Bivariate sort*) célja ennek tesztelése. A részvényeket egy kontrollváltozó értéke szerint sorba rendezzük, majd portfóliókat képzünk minden hónapban. Ezt követően minden kontrollváltozó szerinti portfólión belül további portfóliókat képzünk a vizsgálni kívánt tényező (esetünkben a *momentum*) értékei alapján. Tehát új portfóliót képzünk úgy, hogy a kontroll változó szerinti portfóliókon belül vesszük a legmagasabb 30% momentummal rendelkező részvényeket és egy portfóliót képzünk, majd a második legmagasabb 40% momentum értékű részvényeket és így tovább. Ezek után úgy képzünk új portfóliókat, hogy minden kontrollváltozó szerinti portfólión belül vesszük a legmagasabb momentum értékkel rendelkező portfóliókat és azt egy új portfólióként kezeljük. Ezt követően vesszük minden kontrollváltozó szerinti portfólión belül a második legmagasabb momentummal rendelkező portfóliót és azt egy új portfólióként kezeljük. Ezt folytatva olyan új portfóliókat kapunk, amikre a kontrollváltozó értéke hasonló, de a vizsgált változó (esetünkben a momentum) szóródása még mindig nagy. Ezt a portfólióképzési folyamatot mutatja be az 1. ábra.

Amennyiben a kontroll változó és a momentum között kicsi a korreláció, akkor a második portfólióképzést ténylegesen nem fogja befolyásolni, hogy korábban más logikával lett sorbarendezve. Ha viszont a korreláció magas, akkor az B/M portfóliók képzése a momentum értékeit is sorba teszik, így a második sorbarendezés olyan portfóliókat képez, amiben egyszerre lesznek jelen az alacsony és a magas momentummal rendelkező részvények. Továbbiakban is azt vizsgáljuk, hogy a két szélső portfólió között a megfigyelt időszakon fennáll-e szignifikáns hozamkülönbség. Az eredményeket a 2. táblázatban közöljük.



1. ábra. Kétféle változó sorbarendezés és faktor portfóliók képzése tercilis alapon.

Forrás: Saját szerkesztés.

A 2. táblázatban bemutatott eredmények alapján az látható, hogy az egyszerű kétféle változó sorbarendezésnél mind az egyenlően súlyozott, mind a piaci értékkel súlyozott portfólió hozamok esetében a momentum hatás erős, kivéve egy esetet. Ha a piaci bétára kontrollálunk és a piaci értékkel súlyozunk, akkor 0.56% havi hozamkülönbséget kapunk, de ez az eredmény nem szignifikáns. Ha a Fama-French 3 faktoros modellre kontrollálunk, akkor viszont minden eredmény tovább erősödik, és már nincs olyan eset, amikor ne kapnánk szignifikáns eredményt. Összegezve, a kétféle változó sorbarendezés előnye, hogy nem feltételez semmilyen függvényszerű kapcsolatot a változók és a jövőbeli hozam között. Ezen felül figyelembe tudja venni az egyenlően súlyozott és a piaci értékkel súlyozott eseteket is. Szintén előnye lehet ennek a megközelítésnek, hogy portfólió szinten vizsgálja az összefüggéseket, ezzel csökkentve az egyedi zaj hatásokat a tesztstatisztikákban.

Ezzel szemben számos hátránya és kihívása is van ennek a megközelítésnek. Például nem tud egyszerre több ismert változóra is kontrollálni. Nagy mintaelemszámot igényel a portfólió képzés, ami sok esetben, így a magyar tőzsdén is kevésbé áll rendelkezésre minden hónapra. A portfólióképzés során sok egyedi részvény információ veszhet el. Végül, ha nagyon magas a korreláció a kontroll változó és a vizsgált változó között, akkor az gyengítheti a teszt erejét, és félrevezető lehet az eredmény.

Tercilis portfóliókat képezzük minden hónapra 1996 januárjától 2017 decemberéig, a kontroll változó szerint sorba rendezve, majd minden portfólión

belül újabb portfóliót képzünk a momentum szerint. Végül új, kétszer sorba rendezett portfóliót képzünk úgy, hogy minden kontrol változó szerinti portfólión belül vesszük a legnagyobb momentum értékkel rendelkező portfóliókat, majd a második legnagyobb értékkel rendelkezőket, és így tovább. Az 1-es (3-as) részvényportfóliónak van a legkisebb (legnagyobb) momentum értéke. A 2. táblázat bemutatja az egyenlően súlyozott és a piaci értékkel súlyozott portfóliók átlagos havi hozamait, a 3-as és az 1-es portfóliók közötti átlagos hozamkülönbséget, a Fama-French-féle faktorról kontrollált alfa értékeket és az utóbbiakhoz tartozó Newey-West-féle [1987] korrigált t-statisztikákat (a zárójelen belül). Az átlagos nyers és a korrigált hozamok százalékos alakban vannak megadva.

Tercilis	Egyenlően súlyozott portfólió			Értékkel súlyozott portfólió		
	BETA	SIZE	B/M	BETA	SIZE	B/M
1	0.51	0.60	0.53	0.73	0.88	0.72
2	1.24*	1.36*	1.13*	1.37**	1.35**	1.26*
3	2.00***	1.79**	2.04***	1.29**	1.96***	1.72***
3-1	1.48***	1.18**	1.52***	0.56	1.07**	0.99**
	(3.34)	(2.29)	(3.02)	(1.41)	(2.08)	(2.32)
FF3	2.36***	1.95***	2.17***	0.76*	1.35**	0.90**
	(5.31)	(3.43)	(4.09)	(1.76)	(2.23)	(2.13)

* $p < 0.10$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.01$

2. táblázat. Részvényportfóliók hozamai és szórásai momentum szerint rendezve, kontrollálva a piaci bétával, a mérettel és a könyv szerinti és piaci érték hányadosával. *Porrás:* Saját számítás és szerkesztés.

Fama-MacBeth regressziók

Eddig az új faktorok jövőbeni hozamokra gyakorolt hatásainak szignifikanciáját portfólió szinten vizsgáltuk. Mint többször is hangsúlyoztuk, az eddig ismertetett módszereknek nagy előnyük, hogy nem határoznak meg funkcionális formát a várható hozamok és a változók közötti kapcsolatra. Viszont általánosan a portfólió szintű vizsgálatnak jelentős hátrányai is vannak. Először is jelentős mennyiségű információtól válunk meg, amikor a részvényeket portfóliókba aggregáljuk. A következő, hogy nem könnyű megoldani, ha egyszerre több hatásra kell kontrollálnunk. Ezen problémák orvoslása végett a továbbiakban bemutatjuk a Fama-MacBeth-féle [1973] regressziót, ami a részvényt szintű hozamprémiumokat magyarázó tényezők meghatározására használt módszertan.

A keresztmetszeti havi adatokon megbecsüljük, hogy milyen változók magyarázzák a hozamprémiumokat (5) és a kapott havi együtthatókat ki-átlagoljuk. Akkor tekintünk egy tényezőt megfelelőnek, amennyiben a keresztmetszeti kockázati prémiumok átlaga szignifikánsan különbözik nullától (3. táblázat). Ennek ellenőrzésére a Newey és West [1987] által kialakított t-statisztikát használjuk. A módszer egyik sajátos eleme, hogy havonta futtatja le a keresztmetszeti regressziót és nem egy nagy mintaként kezeli a megfigyeléseket. Természetesen a megfelelően megválasztott panel regresszió is megfelelő tesztet biztosíthat, de ebben az esetben több kihívás is felmerülhet. Például jellemző, hogy a jelenhez közelebbi hónapokban lényegesen több megfigyelés van, mint a régebbi hónapokban, így az eredményeket ezek a friss

hónapok aránytalanul befolyásolhatják. Továbbá a Fama-MacBeth regressziókban könnyebb a hatás időbeli alakulását is vizsgálni.

Ennek a módszertannak az előnye, hogy a regresszióban több kockázati faktor is becsülhető egyszerre, és a keresztmetszeti regressziók miatt a heteroszkedaszticitásra robusztusabb eredményt kapunk. A mi esetünkben az alábbi regressziót és ennek rész eseteit futtatjuk le minden hónapra:

$$R_{i,t+1} = \alpha_i + \beta_{i,t}\gamma_{1,t} + Size_{i,t}\gamma_{2,t} + B/M_{i,t}\gamma_{3,t} + MOM_{i,t}\gamma_{4,t} + e_{i,t}, \quad (5)$$

ahol $R_{i,t+1}$ az i -ik részvény hozama a $t + 1$ periódusban, $\beta_{i,t}$ a piaci béta becsült értéke a t -ik periódusban, $Size_{i,t}$ a piaci érték logaritmus a t -ik periódusban, $B/M_{i,t}$ a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosának logaritmus a t -ik periódusban és $MOM_{i,t}$ a momentum érték a t -ik periódusban az i -ik részvényre. A γ együtthatók pedig az adott változó hatását ragadják meg. A 3. táblázat ezen változók átlagát és az átlaghoz tartozó t értékeket tartalmazza az (5) regresszió különböző specifikációira. Gyakori még a változók normalizálása a regresszió lefuttatása előtt, hogy könnyebben összehasonlíthatók legyenek a hatások mérete. Ettől mi most eltekintünk.

Az eredmények összhangban vannak az általunk kapott és a nemzetközi eredményekkel. Sem a piaci béta, sem a cégméret nem jelzi előre szignifikánsan önmagában a hozamokat, míg a momentum és a könyv szerinti érték és a piaci érték hányadosa szignifikáns előrejelzője a jövő havi hozamoknak. Szintén az eddigi eredményekkel összhangban, az összes változó egyszerre szerepeltetése mellett továbbra is szignifikánsan jelez előre a momentum hatás.

Összegezve, a Fama-MacBeth regressziók előnye, hogy egyszerre tudnak több változóra is kontrollálni és minden információt figyelembe vesznek, mivel részvényszintű és nem portfólió szinten aggregált változókat használ. Ezzel szemben hátrány, hogy a multikollinearitás nincs kezelve, a hibatagok autokorrelációja torzíthatja a regressziós eredményeket, valamint a regresszió szerkezete maga egy szigorú lineáris megkötést tesz. Emellett felmerülhet, hogy egy kihagyott változó miatt torzított, vagy túl sok faktor mellett már nem hatékony a becslés.

Vállalati szintű keresztmetszeti regressziókat futtattunk a hozamok magyarázására 1996 januárja és 2017 decembere között minden hónapra az eddig vizsgált magyarázó változók szerint. A 3. táblázat minden oszlopában a keresztmetszeti regressziók eredményének idősoros átlaga található és a hozzájuk tartozó Newey-West-féle [1987] korrigált t-statisztikák (a zárójelen belül).

Változók	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
BETA	-0.0647 (-0.12)				-0.1607 (-0.25)	-0.1024 (-0.18)
SIZE		0.0147 (0.14)			0.3866** (2.22)	0.3019** (2.28)
B/M			0.8195*** (2.75)		1.5109*** (3.69)	1.5700*** (4.37)
MOM				1.5547* (1.90)		1.9281*** (2.86)
R^2	0.0851	0.0830	0.0755	0.1053	0.2203	0.2991

* $p < 0.10$, ** $p < 0.05$, *** $p < 0.01$

3. táblázat. Vállalati szintű Fama-Macbeth regressziók a hozamokra. Forrás: Saját számítás és szerkesztés.

Összefoglalás

Tanulmányunkban áttekintettük a faktormodellek jelentőségét az empirikus vizsgálatokban és azt a három megközelítést, amit a leggyakrabban használnak a nemzetközi irodalomban annak eldöntésére, hogy egy új faktor vagy összefüggés szignifikánsan befolyásolja-e a várható hozamokat. Ezeket a teszteket arra használtuk, hogy a momentum hatás jelentőségét vizsgáljuk meg a magyar tőzsdén, kontrollálva a Fama-French 3 faktorra.

Először egyváltozós sorbarendezeit alkalmaztunk, aminek előnye, hogy egyszerű és jól értelmezhető eredményeket biztosít, viszont nehéz már ismert faktorokra megfelelően kontrollálni a megközelítésben. Azt találtuk, hogy a momentum hatás erős és szignifikáns hozamot biztosít függetlenül attól, hogy egyenlően vagy a piaci értékkel súlyoztuk a portfóliót.

Ezek után a kétváltozós sorbarendezeit alkalmaztuk, melynek szintén előnye a rugalmas és egyszerű megközelítés, de egyszerre csak egy változóra tud kontrollálni és magas mintaelemszámot követel meg, ami sajnos sok esetben nem áll rendelkezésre. Azt találtuk, hogy a momentum hatás ereje megmarad egy esettől eltekintve, de a Fama-French 3 faktoros modell esetén már minden esetben szignifikáns eredményt kapunk.

Végül Fama-MacBeth regressziókat futattunk, aminek előnye, hogy egyszerre tud kontrollálni több változóra is, és nem veszít el egyedi részvény információt a portfólióképzés miatt. Viszont hátránya, hogy lineáris összefüggést feltételez, és nem súlyozza a megfigyeléseket. Ebben az esetben a momentum hatás önmagában is előre jelezte a hozamokat és kontrollálva a többi változóra csak erősítette a hatást.

Ennek a cikknek a célja az volt, hogy bemutassuk, milyen gyakorlati módszerekkel lehet megvizsgálni az eszközárzási modelleket, és egy áttekintést adjunk a jelenleg elfogadott nemzetközi sztenderdről. Ennek keretében részletesen bemutattuk az egy- és kétváltozós sorbarendezeit, valamint a Fama-Macbeth regressziót, és leírtuk, milyen előnyei és hátrányai vannak a különböző módszertanoknak. Ezek vizsgálata után az látszik, hogy egyik sem alkalmas egymagában egy átfogó elemzés elkészítésére, ezek együttes alkalmazása küszöbölheti ki a bennük rejlő egyedi hiányosságokat.

Irodalom

1. Amihud, Y. [2002]: Illiquidity and stock returns: cross-section and time-series effects. *Journal of Financial Markets*, 5(1), 31–56. [https://doi.org/10.1016/s1386-4181\(01\)00024-6](https://doi.org/10.1016/s1386-4181(01)00024-6)
2. Ang, A. - Hodrick, R. J. - Xing, Y. – Zhang, X. [2006]: The cross-section of volatility and expected returns. *Journal of Finance*, 61(1), 259–299. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2006.00836.x>
3. Annaert, J. – De Ceuster, M. – Versteegen, K. [2013]: Are extreme returns priced in the stock market? European evidence. *Journal of Banking & Finance*, 37(9), 3401–3411. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.05.015>
4. Bali., T. G. – Cakici, N. –Whitelaw, R. F. [2011]: Maxing out: Stocks as lotteries and the cross-section of expected returns. *Journal of Financial Economics*, 99(2), 427–446. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2010.08.014>
5. Baker, M. – Bradley, B. – Wurgler, J. [2011]: Benchmarks as limits to arbitrage: Understanding the low-volatility anomaly. *Financial Analysts Journal*, 67(1), 40–54. <https://doi.org/10.2469/faj.v67.n1.4>
6. Barberis, N. – Mukherjee, A. – Wang, B. [2016]: Prospect theory and stock returns: an empirical test. *Review of Financial Studies*, 29(11), 3068–3107. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhw049>
7. Brown, P. – Kleidon, A. W. – Marsh, T. A. [1983]: New evidence on the nature of size related anomalies in stock prices. *Journal of Financial Economics* 12, 33–56. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(83\)90026-0](https://doi.org/10.1016/0304-405x(83)90026-0)
8. Carhart, M. M. [1997]: On Persistence in Mutual Fund Performance. *Journal of Finance*, 52(1), 57–82. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x>
9. Cheon, Y. H. – Lee, K. H. [2017]: Maxing out globally: Individualism, investor attention, and the cross section of expected stock returns. *Management Science*. <https://doi.org/10.1287/mnsc.2017.2830>
10. Cooper, M. J. – Gutierrez Jr, R. C., – Hameed, A. (2004). Market states and momentum. *Journal of Finance*, 59(3), 1345–1365. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2004.00665.x>
11. Diether, K. B. – Malloy, C. J. – Scherbina, A. [2002]: Differences of opinion and the cross section of stock returns. *Journal of Finance*, 57(5), 2113–2141. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00490>
12. Dimson, E. [1979]: Risk measurement when shares are subject to infrequent trading. *Journal of Financial Economics*, 7, 197–226. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(79\)90013-8](https://doi.org/10.1016/0304-405x(79)90013-8)
13. Fama, E. F. – French, K. R. [2012]: Size, value, and momentum in international stock returns. *Journal of Financial Economics*, 105(3), 457–472. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2012.05.011>
14. Fama, E. F. – French, K. R. [1992]: The Cross-Section of Expected Stock Returns. *Journal of Finance*, 47(2), 427–465. <https://doi.org/10.2307/2329112>
15. Fama, E. F. – Macbeth, J. D. [1973]: Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of Political Economy*, 607–636. <https://doi.org/10.1086/260061>
16. Harvey, C. R. – Liu, Y. – Zhu, H. [2016]: . . . and the cross-section of expected returns. *The Review of Financial Studies*, 29(1), 5–68. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhw059>
17. Jegadeesh, N. [1990]: Evidence of Predictable Behavior in Security Prices, *Journal of Finance*, 45, 881–898. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1990.tb05110.x>

18. Jegadeesh, N. – Titman, S. [1993]: Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implication for Stock Market Efficiency. *Journal of Finance*, 48(1), 65–91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb04702.x>
19. Kleim, D. B. [1983]: Size-related anomalies and stock return seasonality: further empirical evidence. *Journal of Financial Economics*, 12, 13–32. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(83\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0304-405x(83)90025-9)
20. Lakonishok, J. – Shleifer, A. – Vishny, R. W. [1994]: Contrarian Investment, Extrapolation and Risk. *Journal of Finance*, 49(5), 1541–1578. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb04772.x>
21. Lewellen, J. – Nagel, S. – Shanken, J. [2010]: A skeptical appraisal of asset pricing tests. *Journal of Financial Economics*, 96(2), 175–194. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2009.09.001>
22. Lintner, J. [1965]: The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13–37. <https://doi.org/10.2307/1924119>
23. Nartea, G. V. – Kong, D. – Wu, J. [2017]: Do extreme returns matter in emerging markets? Evidence from the Chinese stock market. *Journal of Banking & Finance*, 76, 189–197. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2016.12.008>
24. Newey, W. – West, K. D. [1987]: A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica*, 55(3), 703–708. <https://doi.org/10.2307/1913610>
25. Petersen, M. A. [2009]: Estimating Standard Errors in Finance Panel Data Sets: Comparing Approaches, *The Review of Financial Studies*, 22(1), 435–480. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhn053>
26. Roll, R. [1977]: A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests' Part I: On Past and Potential Testability of the Theory. *Journal of Financial Economics*, 4(2), 129–176. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(77\)90009-5](https://doi.org/10.1016/0304-405x(77)90009-5)
27. Scholes, M – Williams, J. [1977]: Estimating betas from nonsynchronous data. *Journal of Financial Economics*, 5, 309–327. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(77\)90041-1](https://doi.org/10.1016/0304-405x(77)90041-1)
28. Sharpe, W. F. [1964]: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 19(3), 425–442. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>
29. Wang, H. – Yan, J. – Yu, J. [2017]: Reference-dependent preferences and the risk–return trade-off. *Journal of Financial Economics*, 123(2), 395–414. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2016.09.010>

TESTING NEW FACTORS IN EMPIRICAL ASSET PRICING

Understanding the cross-section of expected stock returns is one of the key challenges of both theoretical and empirical finance. CAPM is one of the most well-known theory to provide testable implications for the cross-section of expected stock returns. However, several studies find that CAPM fails most of its empirical tests. This challenge of empirical asset pricing has been addressed by multi-factor asset pricing models and their tests. In this paper, we review the most standard and most widely used empirical tests that help to decide whether a new factor can significantly explain the cross-section of stock returns.

According to CAPM, there is only one characteristic that shapes the expected return of a stock because all other type of risk can be eliminated by diversification. This characteristic is the sensitivity to the change in the return of the market. Low covariance between the return of a stock and the market return means low risk, while high covariance between the return of a stock and the market return means high risk in the conceptual framework of CAPM.

Although the model of CAPM is intuitive and has a well-established theoretical background, empirical studies fail to support its implications. First of all, the covariates between the return of a stock and market return, known as market beta, do not explain the cross-section of stock returns. Second, there are other characteristics that can explain the cross-section of stock returns such as the market capitalization of a firm or the last twelve-month cumulative return without the most recent monthly return, known as the momentum effect. Furthermore, nowadays, tremendous number of proposed characteristics appeared in the literature to explain the cross-section of expected stock returns. These empirical studies provide evidence on the failure of the CAPM, however, it is still a hard task to reject the theory of CAPM since, in each empirical study, it is a challenge how to define the basic concepts of the CAPM. For instance, it is common to assume that the value-weighted market return can be a proxy of the market return in the model even though it is usually argued that the market return in the model of CAPM should characterize the average return of all possible investments including human capital and everything else.

Even though these open questions about the CAPM is still in the focus of many studies in the literature of finance, new questions emerged from observing that many characteristics seem to contribute to better understanding of the cross-section of expected stock returns. However, it is also an important question how to decide whether a proposed characteristic can predict the expected return of a stock in a robust way.

In this study, we review standard tests that can help to evaluate the economic and statistical significance of a proposed characteristic. These tests can divide into two parts. First, there are the portfolio-level analyses. Second, there are the firm-level regressions. In this study, we present the advantages and disadvantages of the univariate portfolio sorts, the bivariate portfolio sorts and the Fama-MacBeth regressions. For instance, portfolio-level analyses have the advantage to examine even non-linear relationship. However, it has the disadvantage that it loses information by forming portfolios. On the other hand, firm-level regression does not lose information since it uses firm-level information. However, it only tests linear relationships.

We also present the most common tests to control for other characteristics that are already known to be the predictor of future returns. Besides the tests, it is also important how to collect and prepare data before one applies the tests.

To illustrate these tests and data collection, we perform portfolio level-analyses and Fama-MacBeth regression in the sample of stocks listed on the Hungarian Stock Exchange and we also show that the predictive power for future returns of momentum effect is both economically and statistically significant in this sample.

Furthermore, we also discuss the challenges of these standard approaches when they are applied in a sample with relatively small number of observations and relatively small number of stocks.

Key words: cross-section of expected stock returns, empirical tests, CAPM, Fama-French, momentum

FOGALMAK, MÓDSZEREK

A WAVELETEKRŐL¹

HUNYADI LÁSZLÓ
Budapesti Corvinus Egyetem

A wavelet elemzést, melynek alapjait a Haar-féle függvényrendszer és az azal történő függvényközelítés adta meg, elsődlegesen a változó hullámhosszú folytonos jelek és diszkrét idősorok hullámtermészetének vizsgálatára fejlesztették ki. A cikk ezen alapok felvázolása után bemutatja a kiinduló folytonos wavelet transzformációt, azt, hogy a számítástechnika miként járult hozzá a diszkrét wavelet transzformáció (DWT) és annak iteratív algoritmusai kialakulásához. Részletesen foglalkozik a népszerű piramis algoritmus egy egyszerű változatával, de a fő hangsúlyt a gazdasági – társadalmi modellezés alkalmazási lehetőségeire helyezi. Ezek keretein belül bemutatja a DWT alkalmazását idősorok hullámtulajdonságainak elemzésében, az információ-tömörítésben, az outlier szűrésben, az idősorok hasonlóságának vizsgálatában és az idősorok fordulópontjainak detektálásában. Véggkövetkeztetése az, hogy a terület igen nagy lehetőségeket ígér az idősoros és területi soros alkalmazások terén, de ennek megvalósításához az érintett szakterületek (matematika, statisztika, modellezés, informatika) együttműködésére van szükség.

Bevezetés

A waveletek (kis hullámok) története sajátos, szinte regényes, de a tudományban nem egyedülálló. Sok tudományterületen találkozhattunk már olyannal, hogy egy kutatás a melléktermékeiről lett híres, hogy az eredeti célt nem érte ugyan el, ehelyett egy másodlagos eredmény legitimálta². Így van ez a waveletekkel is: egy viszonylag egyszerű, általános, nem szakirányú matematikai probléma megoldása ötletet adott egy, a fizikai jelek hullámtermészetének vizsgálati módszerére. A számítógépek fejlődésével előtérbe került a probléma diszkrét (digitalizált) kezelése, az erre szolgáló hatékony algoritmusok kidolgozása és gépi megvalósítása. Ekkor már a diszkrét jelek (idősorok) alkalmazói is érdeklődéssel fordultak a waveletek felé, de az igazi fordulatot az alkalmazásokban az jelentette, hogy az informatikusok felismerték, milyen hatékony eszközt kapnak nagy hang- és képfájlok veszteség nélküli, ill. veszte-

¹A szerző a Budapesti Corvinus Egyetem nyugalmazott egyetemi tanára. E-mail: hunyadi44@gmail.com. Beérkezett: 2019. január 4.

²A waveletek evolúciójáról jó leírás található Hubbard [1998] könyvében.

séges (de gazdaságos) tömörítésére. Ez pedig, a rohamosan fejlődő technikai eszközök lehetőségeinek kihasználása szempontjából kritikus fontosságú volt.

Mostanra a waveleteken alapuló elemzések elérték a társadalom- és közgazdaságtudományi alkalmazásokat is. Elsősorban a waveletek diszkrét kezelése, valamint a rohamosan növekvő adatmennyiség vezetett oda, hogy egyre több alkalmazás született és születik ezen a területen is. Ez indokolja számunkra azt, hogy a gazdaság- és társadalomtudományi szakmát megismertessük a waveletek elméletének alapjaival, és beszámoljunk e gyorsan fejlődő terület adta alkalmazási lehetőségekről.

Világszerte intenzív kutatások folynak a waveletek elméletét és főleg alkalmazását illetően. Természetesen Magyarországon sem más a helyzet, ám itthon főként matematikusok foglalkoznak ezzel a témával. Ezek és a kapcsolódó kutatások – melyek nagy része természetesen messze túlmutat e tanulmányon – jó áttekintése megtalálható Schipp átfogó matematikai munkájában (Schipp [2015]).

Ez a cikk bevezető a waveletek elméletébe és alkalmazásába. Először bemutatja a kiinduló matematikai problémát és annak megoldását, majd a spektrálanalízis analógiájából származtatja a folytonos wavelet transzformációt. Ezt követően a számítógépes applikációhoz szükséges diszkrét átmenetet tárgyalja, majd bemutat egy egyszerű algoritmust a diszkrét wavelet transzformációra. A cikk talán leglényegesebb fejezete a gazdasági és társadalmi idősor-modellezési, statisztikai alkalmazásokat mutatja be, jellegzetes példákkal. A dolgozatot a következtetések és a felhasznált szakirodalom jegyzéke zárja.

1 A kezdetek

A waveletek történetét két ágról lehet indítani. Az egyik a matematikai indíttatású megközelítés. Haar Alfréd szegedi matematikus a XX. század elején definiált egy lépcsős alapfüggvényt,

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & \text{ha } 1/2 \leq x < 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

formában, majd ebből az alapfüggvényéből és annak egyszerű transzformáltjaiból (eltolásaiból, és összenyomás-széthúzásaiából) ortogonális sort képezett (Haar [1910]). Ezt bázisnak tekintve, e sor segítségével közelített függvényeket. Maga az ötlet nem volt új, hiszen függvénysorok segítségével közelített más függvényeket egyebek közt Taylor, vagy Fourier (Hunyadi [2017]). A Haar-függvényrendszer általános tagja

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 2^{j/2}, & \text{ha } k2^{-j} \leq x < (k+1/2)2^{-j}, \\ -2^{j/2}, & \text{ha } (k+1/2)2^{-j} \leq x < (k+1)2^{-j}, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $n = 2^j + k$, $j \in \mathbb{N}$ és $0 \leq k < 2^j - 1$.

Ha ezt a rendszert kiegészítjük egy meglehetősen egyszerű ún. skálázó (kalibráló) függvénnyel:

$$\xi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \quad (1)$$

akkor az első 4 Haar-függvény a következő alakot ölti:

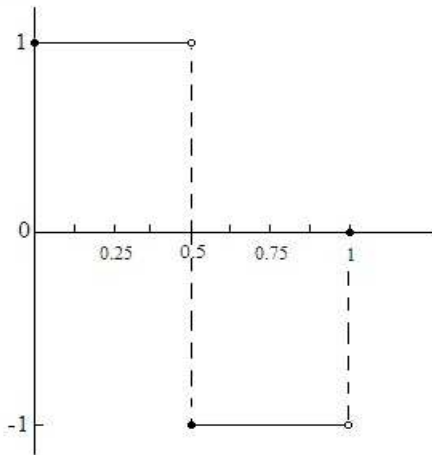
$$\xi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$\xi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & \text{ha } 1/2 \leq x < 1, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

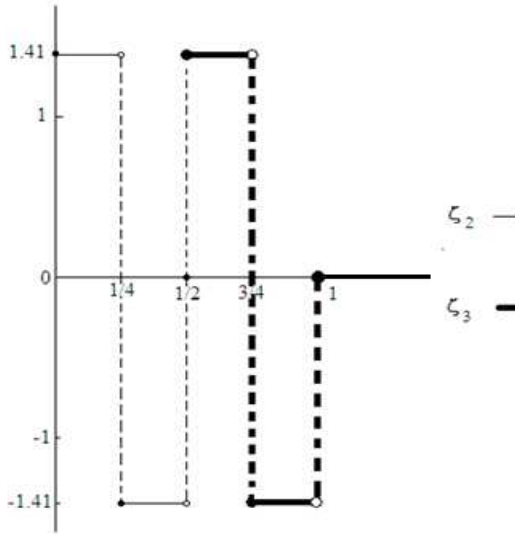
$$\xi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{ha } 0 \leq x < 1/4, \\ -\sqrt{2}, & \text{ha } 1/4 \leq x < 1/2, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$\xi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{ha } 1/2 \leq x < 3/4, \\ -\sqrt{2}, & \text{ha } 3/4 \leq x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Mindez az 1. és 2. ábrán a következőképpen néz ki:

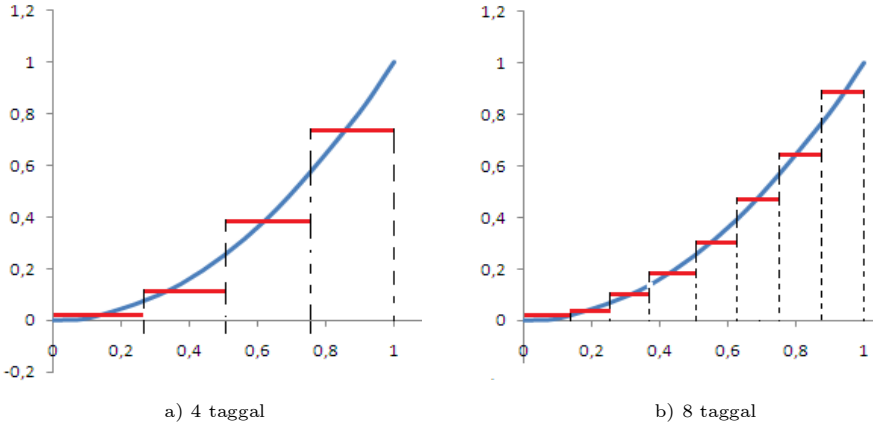


1. ábra. Haar alapfüggvénye (ξ_1). Forrás: saját szerkesztés.



2. ábra. A Haar-féle függvényrendszer 3. és 4. eleme.
Forrás: saját szerkesztés.

Már most előrebozsátjuk, hogy majd később, a waveletek bevezetése után, az azoknál alkalmazott terminológiával a ξ_0 skálázó függvényt apa-waveletnek, a ξ_1 -et anya-waveletnek, a többi, származtatott függvényt gyermek-waveletnek nevezzük.



3. ábra. Az $y = x^2$ függvény közelítése Haar-függvényekkel. Forrás: saját szerkesztés

A függvényközelítés pontos leírása megtalálható pl. Vidakovic [1999] művében, egy nagyon egyszerű példaként az $y = x^2$ függvényközelítését Haar-függvényekkel Hunyadi [2018a] mutatja be³. Mivel mindez csak előjáték a waveletekhez, itt csupán a 3. ábrán mutatjuk be azt, hogy 4 illetve 8 tagú

³A hivatkozott elektronikus füzetet a Szerző kérésre megküldi.

Haar-sorral milyen közelítést lehet elérni. Az ábrák magukért beszélnek, hiszen látható a jó közelítés. Az ábrák értékeléséhez csupán annyit kell hozzátennünk, hogy a közelítő függvények természetesen maguk is lépcsős függvények, és ha több tagú sort vonunk be a közelítésbe, a közelítés egyre pontosabb lesz.

Haar alapötlete akkoriban csak matematikai körökben talált visszhangra, alkalmazásokra a kor még nem volt kész. Így eredménye évtizedekig aludt, hogy aztán a manapság igen komoly alkalmazások alapja legyen.

A waveletek másik indító eleme az idősorok hullámelemzésének egyik eszköze, a Fourier-analízis, amelyik spektrálemzés néven vonult be a statisztikába, és amelyik az idősorokban meglévő rejtett, de ismétlődő trigonometrikus hullámok segítségével írja le (közelíti) az idősorokat. Mind az egész alapjául szolgáló Fourier-analízis, mind pedig az azt felhasználó spektrálanalízis módszere részletesen dokumentált a szakirodalomban. Ezek közül a közgazdasági-társadalmi idősorok elemzésével foglalkozó szakirodalom néhány elemét: Granger – Hatanaka [1964] alapmunkáját, Harvey [1981] könyvének megfelelő fejezetét, Freschl [1978], valamint Pintér [2005] tanulmányait és Hunyadi [2017] elektronikus füzetét ajánljuk az olvasók figyelmébe. A spektrálanalízis lényege az, hogy trigonometrikus függvényekből és azok transzformáltjaikból alkotnak függvénysorokat, amelyeket bázisnak tekintve segítségükkel közelítenek tetszés szerinti idősorokat.

Ez a koncepció elsősorban a fizikában és a műszaki gyakorlatban – elsősorban persze a hullámokkal foglalkozó területeken – már jóval korábban lényeges alkalmazásokat nyert, ám amikor korlátai felszínre jöttek, a spektrálanalízis katalizátora lett a wavelet-elemzés kialakulásának.

2 Nemstacionárius hullámok kezelése

A Fourier-analízisen alapuló módszerek az időtérből a frekvenciatérbe transzformálják az időben lezajló jeleket, illetőleg az idősorokat. Segítségükkel megtudhatjuk, hogy egy jel kialakításában (a gazdasági modellezés fogalmi szerint a DGP-ben⁴) milyen frekvenciájú hullámok és milyen súllyal vesznek részt. Így fényt tudunk deríteni a folyamat bizonyos hullámtulajdonságaira. Ez az elemzés mellett lehetőséget ad – a hullámjellemzők állandóságát feltételezve – az előrejelzések pontosítására és finomítására, de emellett a különféle alkalmazott tulajdonságú szűrők tulajdonságainak vizsgálatára, a transzformációk hullámérzékenységre, és általában a jelek és idősorok elemzésére a hullámok terében. Ez a módszercsalád a fizikában, az akusztikában talált jelentős alkalmazásokra egyebek közt és jellemzően a jelek és zajok szétválasztásában, hangfelvételek minőségének javításában, hangtömrítésben stb. Közgazdasági és társadalomtudományi alkalmazásai azonban alig jutottak túl a kísérleti stádiumon.

A spektrálanalízis alaposan kidolgozott módszertana jó eszköz a hullámok elemzésére, de van egy komoly hiányossága, ami erősen korlátozza alkalmaz-

⁴DGP: data generating process – adatgeneráló folyamat (Hunyadi [1994]).

zását, ez pedig az, hogy *csak* a frekvenciatérbe transzformál, azaz ki tudja mutatni, hogy milyen frekvenciájú hullámok vannak az adott jelben, de azt nem, hogy ezek a hullámok hol, a megfigyelt tartomány mely részén jelennek meg, hiszen a transzformáció során elveszítjük az idődimenziót. Ez pedig azt is jelenti, hogy ez a módszer nem tudja kezelni a változó hosszúságú hullámokat, azaz nem alkalmas nem-stacionárius folyamatok elemzésére.⁵

Kezdetben a nem-stacionaritás problémáját úgy kezelték, hogy az eredeti intervallumot kis részekre osztották, és az egyes részekre külön-külön végeztek spektrálemzést. Ez az ún. rövid távú Fourier-elemzés (Short Time Fourier Analysis) azonban elég nehézkes, kényelmetlen és meglehetősen munkaigényes eljárás volt (lásd pl. Polikar [1994]). A kutatók e helyett Haar eredményeihez nyúltak vissza, és kerestek olyan eszközt, amely segítségével egy lépésben, kényelmesen elemezhetőek a nem-stacionárius idősorok (Kaiser [1994]). Így jutottak el a wavelet koncepcióhoz, amelynek lényege az, hogy definiál valamiféle hullámalakú alapfüggvényt (anya-wavelet), bevezet két transzformációt (eltolás és tágítás/összenyomás), majd az alapfüggvényből és a transzformáltakból függvényt sor képez, amely segítségével elemezni lehet az időbeli jeleket. Mindez formálisan következőt jelenti.

A wavelet (hullámocska) eredendően olyan folytonos (vagy szakaszonként folytonos)

$$\Psi_{s,t}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (2)$$

alakú függvény, amelyik

- a t időtérből a τ idő- és s frekvenciatérbe (2 dimenziós térbe) transzformál,
- hullám alakú (ezért integrálja 0), azaz $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$,
- és teljesít néhány, nem túlságosan korlátozó regularitási feltételt, pl. $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty$.

A wavelet függvények különböző paraméterek mellett ortogonális sort alkotnak, belőlük bázis készíthető. Maga a folytonos wavelet transzformáció (valós esetben):

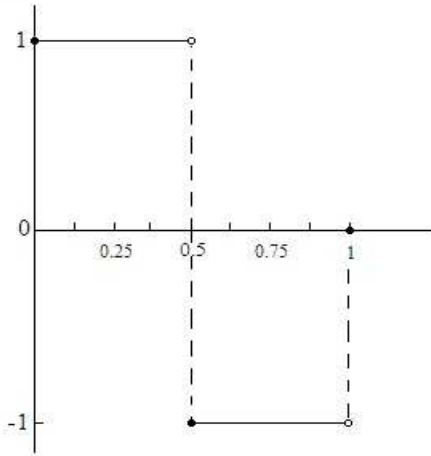
$$y = y(\tau, s) = CWT_x^\Psi(\tau, s) = CWT = \frac{1}{\sqrt{s}} \int x(t) \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt. \quad (3)$$

A (3) transzformáció, melynek elnevezése CWT, azaz continuous wavelet transformation (folytonos wavelet transzformáció), inverze is létezik és egyértelmű, azaz a folytonos wavelet transzformáció megfordítható (Vidakovic [1999]).

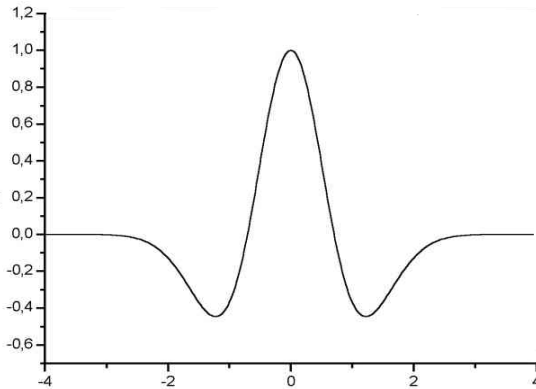
Az első és legegyszerűbb wavelet a Haar-függvény volt, de ahogy terjedt az alkalmazása, egyre bonyolultabb és kifinomultabb waveleteket készítettek.

⁵Nem-stacionárius jelen, vagy idősoron most pontos definíció híján azt értjük, hogy a hullámzás tulajdonságai nem állandók a vizsgált időtartományban.

Elsősorban fizikusok, geofizikusok alkalmazták őket. Eleinte különböző hullámfüggvényeket definiáltak, és azokból alakítottak ki a wavelet tulajdonságoknak megfelelő függvényeket, de később Daubechies [1992] már bizonyos tulajdonságokat definiált, és ezekből vezette le implicit wavelet-családját. Mára rengeteg különböző formájú wavelet létezik, és számuk alighanem még nőni fog. A következőkben, a 4-6. ábrákon csak néhány jellemző és gyakori wavelet (anya-wavelet) alakját mutatjuk meg⁶

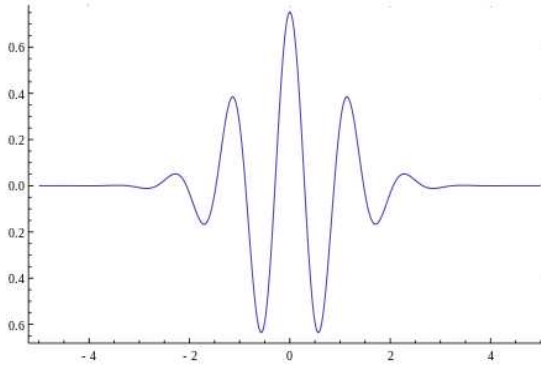


4. ábra. Haar wavelet. *Forrás:* saját szerkesztés



5. ábra. Ricker wavelet (Mexikói kalap). *Forrás:* <http://en.wikipedia.org>

⁶Csupán érdekességképp említjük arra, hogy maga a wavelet konkrét alakja mennyire nem lényeges, hogy a szakirodalomban találkozni lehet olyan tanulmányokkal, amelyek részletesen tárgyalják a wavelet elemzés lényegét, értelmét, módszereit, alkalmazását anélkül, hogy megmutatnának konkrétan akár egyetlen részletesen kifejtett waveletet is (!) Erre példa Polikar [1994] korábban már idézett tanulmánya.



6. ábra. Morlet (Gábor) wavelet.⁷ Forrás: <http://en.wikipedia.org>

A folytonos wavelet transzformáció már alkalmas eszköz a nem-stacionárius hullámok elemzésére: megmutatja, hogy milyen frekvenciájú hullám, és hol (a tartomány melyik részén) helyezkedik el. Így alkalmazási lehetőségei sokkal szélesebb körűek, mint a korábban említett spektrálanalízisé, bár meg kell jegyeznünk, hogy a két módszer együttes, illetőleg párhuzamos használata jól kiemeli mindkét eszköz előnyös oldalát. A waveletek és a folytonos wavelet transzformáció korai alkalmazása elsősorban fizikai, műszaki területen volt jellemző: földrengések előrejelzése a geofizikában, napfoltok elemzése a csillagászatban, hangfelvételek javítása (zajszűrés) az akusztikában.

3 A waveletek diszkrét kezelése

A bemutatott CWT folytonos (vagy szakaszonként folytonos) függvényekkel dolgozik, ám a gyakorlatban a folytonos függvényeket digitális számítógépen csak közelíteni lehet, pontonként. A megoldást eleinte az jelentette, hogy a folytonos transzformáltat utólag pontonként értékelve diszkrétte alakították. Elég sűrű pontok („minták”) esetén ez természetesen megvalósítható volt, de itt is, mint más területeken, már korán felmerült az, hogy hatékonyabb megoldás lenne eleve diszkrét problémaként kezelni a feladatot. Ha diszkrét adatokból indulunk ki (és számos esetben ez a helyzet pl. digitalizált hang, kép, vagy gazdasági, társadalmi idősorok esetén), az eredményt diszkrét formában várjuk, akkor miért kell a folytonos esethez oda-vissza fordulni? Egyszerűbb eleve diszkrét problémaként kezelni: a bemenő adat diszkrét, a transzformáció csak diszkrét pontokat (idő és frekvencia) követ, így a kimenő adat is diszkrét (vektor), így az egész probléma viszonylag egyszerű lineáris algebrai feladattá válik. Maga a transzformáció

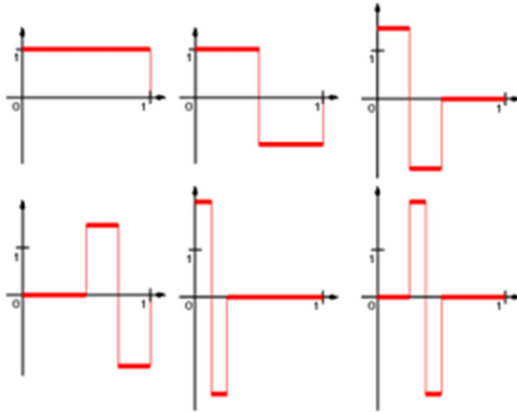
$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

⁷A 6. ábrán látható waveletet a magyar származású fizikus, Gábor Dénes alkalmazta először, nevét mégis a tulajdonságait részletesen bemutató G. Morlettől kapta.

alakú lesz, ahol \mathbf{x} a bemenő idősor, \mathbf{W} a transzformáció négyzetes mátrixa, \mathbf{y} pedig a diszkrét wavelet transzformált (DWT). A \mathbf{W} négyzetes mátrix tartalma a wavelet fajtájától függ. Például 8 elemű idősorra a diszkrét Haar-transzformáció (DHT) (nem normált) mátrixa ($\mathbf{H} = \mathbf{W}$):

$$\mathbf{H}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

A mátrix értelmezéséhez elegendő emlékeztetni a Haar-függvényekre. A mátrix első sora az (1)-ben említett kalibráló (skalázó) függvénynek felel meg (apa-wavelet), a második sora az anya-wavelet, a harmadik és negyedik sora az első két transzformált gyermek-wavelet, és így tovább. A mátrix mérete természetesen igazodik a vizsgálandó idősor méretéhez, és elemeit úgy is lehet tekinteni, mint a kiinduló intervallumot egyenletesen felosztva n részre, minden intervallum közepén egy mintaelemet választunk, így alakítva diszkrétté a folytonos feladatot⁸. Ez az eljárás a 7. ábrán, ahol vázlatosan ismét bemutatjuk a Haar-függvényeket, jól követhető.



7. ábra. Az első 6 Haar-függvény. Forrás: <http://en.wikipedia.org>

Összefoglalva a \mathbf{H} mátrixok tulajdonságait a következőket állíthatjuk:

- Haar-hullámokat képeznek le;

⁸Az itt bemutatott eljárás egyik komoly nehézsége, és egyben alkalmazásának korlátja az, hogy alapértelmezésben csak olyan méretű feladatokat tud kezelni, ahol a kiinduló adatok (és így az output) száma 2 egész kitevőjű hatványa. A problémára természetesen van megoldás (pl. Wickerhauser – Mladen [1994]), de mi itt csak az alapesettel foglalkozunk.

- ortogonálisak, sőt egyszerű, konstanssal történő normalizálás után ortonormáltak, azaz inverzük megegyezik a transzponáltjukkal;
- szorzásuk, invertálásuk csak egyszerű műveleteket tartalmaz, ami igen gyors oda-vissza transzformációt tesz lehetővé.

Ezek után a DHT példája alapján összefoglalhatjuk általában a DWT fontosabb tulajdonságait. Ezek pedig a következők:

- A DWT ugyanolyan méretű vektor, mint amilyen a kiinduló idősorvektor, azaz \mathbf{x} és \mathbf{y} elemszáma megegyezik, hiszen \mathbf{W} (és \mathbf{H}) négyzetes mátrixok;
- a transzformált \mathbf{y} vektor struktúrája olyan, hogy *elején* vannak a hosszú hullámok, közben a különböző hosszúságú középhullámok, a végén a rövid, átmeneti, zajnak tekinthető hullámok együtthatói;
- viszonylag könnyen belátható az információmegmaradás⁹ egy sajátos esete: \mathbf{x} és \mathbf{y} elemeinek négyzetösszege megegyezik, de az eloszlásuk természetesen nem: \mathbf{y} vektor sokkal koncentráltabb, mint \mathbf{x} ;
- ezért a DWT jellemző alkalmazása az, hogy transzformáció után a *küszöböléssel* \mathbf{y} kis elemeit elhagyjuk (0-vá tesszük), és az így küszöbölt DWT inverze jó közelítést ad a kiinduló vektorra, az eredeténél sokkal kevesebb elem felhasználásával. Ez az információ-tömörítés a modellezés másodlagos, de igen lényeges értelme.

Ezekre az eredményekre már sokan felkapták a fejüket, egyebek közt közgazdászok, társadalomtudósok, hiszen új lehetőségeket vetettek fel az idősorok hullámelemzésének terén. De még ennél is nagyobb volt az informatikusok érdeklődése, hiszen meglátták benne a lehetőséget nagy adattömegek gyors és egyszerű tömörítésére, kezelésére. Így ez vált napjainkra a waveletek alkalmazásának kiemelt területévé, ám az igazi áttöréshez még egy lépés kellett. A mátrixok nagy adattömeg esetén ugyanis igen nagy méretűek és elég üresek (sok bennük a 0 elem), így kezelésük felettébb nehézkessé tette volna az eljárást, aminek épp a könnyűsége lenne az előnye. Helyettük kellett valami más megoldás, ami nem is késett sokáig, hiszen a kutatók elég hamar eljutottak az eljárást tökéletesen leíró, ugyanakkor könnyen gépesíthető algoritmusokhoz.

4 DWT algoritmusok

Elsősorban a számítástechnika és az informatika gyors fejlődése vezetett oda, hogy a zárt formulák mellett, vagy inkább helyett, a könnyen programozható, egyszerű műveleteket nagy számban végző algoritmusok kerülnek előtérbe.

⁹Ezt az összefüggést a fizikai-műszaki alkalmazásokban energiamegmaradásként emlegetik.

Ez történt a DWT esetén is: bár lineáris algebrai megoldást akár zárt formában is lehet találni (ez bonyolultabb waveletek esetén azért nem nyilvánvaló), a gépi alkalmazásokhoz jobban illeszkedő algoritmusok váltak dominánssá. Ezek közül talán legismertebb az ún. Piramis algoritmus (Pyramide Algorithm), amit, illetőleg aminek változatait a szakirodalom sok más néven is ismeri (Cascade Algorithm, Subband Coding, Lifting Scheme). Ezek részletes ismertetése helyett itt csupán a piramis algoritmus működését mutatjuk be Haar-waveletek esetére egy igen egyszerű, könnyen nyomon követhető példán.

Legyen a bemenő idősor $\mathbf{x} = [1, 2, 3, 4]$ alakú, és tekintsük át lépésként a diszkrét Haar-transzformáció piramis algoritmusát!

Az algoritmus alapötlete az, hogy az \mathbf{x} elemeiből meghatározott rend szerint párosítva az elemeket, *összeg és különbség* jellegű mutatókat számol, majd a különbséget tárolva, az összegeket (melyek száma már az induló elemszám fele) újból összeg- és különbség típusú elemekké alakítja. Az egész eljárás addig folytatódik, ameddig csak egyetlen elem marad. Ha a kiinduló vektor elemszáma 2 egész kitevőjű hatványa volt ($n = 2^q$), akkor az eljárás q lépésben befejeződik. Ekkor az eredményvektor az egyes lépések (szintek) során képződött különbség jellegű elemekből, valamint az utolsó lépésben maradt összegből adódik. Az algoritmus pontos leírása, sőt lineáris algebrai reprezentációja is megtalálható pl. Vidakovic [1999] könyvében.

Példánkban ezt az algoritmust alkalmazva először particionáljuk az idősort $\mathbf{x} = [(1, 2), (3, 4)]$ alakban, majd a transzformáció első lépéseként készítsük el a normált *összegeket* és *különbségeket*

$$s_{11} = \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad s_{12} = \frac{7}{\sqrt{2}}, \quad d_{11} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad d_{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

majd foglaljuk össze ezeket egy munkavektorban:

$$\mathbf{x}_1 = \left[\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right].$$

Ezzel az algoritmus első lépése készen van (ezt nevezzük *első szintnek*). A második lépésben ebből a vektorból kiindulva, a különbségeket (mint a végeredmény részét) félretesszük, a maradó kételemű összeg vektort újból felbontjuk, úgy, ahogy ezt az első lépésben tettük:

$$s_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3+7}{\sqrt{2}} \right) = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{és} \quad d_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3-7}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-4}{2} = -2.$$

Mivel 2 lépésben az eljárás végére értünk, most már összerakhatjuk a végeredményt:

$$\mathbf{y} = \left[5, -2, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right].$$

A feladat mérete 4 volt (4 elemű idősor-vektorból indultunk ki), azaz $2^2 = 4$, így az eljárás 2 lépésben befejeződik, az iterációnak *2 szintje* van.

Könnyű belátni, hogy a normalizált Haar-mátrixszal végzett transzformáció ugyanezt az eredményt adja (egy lépésben). Mivel

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

és normalizált változata $\mathbf{H}_4^* = \frac{1}{2}\mathbf{H}_4$, így

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_4^* \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A vissza-transzformáció (rekonstrukció) kézi számítással egy kicsit hosszadalmas, de működik, könnyen ellenőrizhető. A példából jól látható, hogy az eljárás nagy feladatok esetén is kényelmesen, gyorsan működik.

Más waveletek esetén természetesen más, de az itt bemutatotthoz hasonló, egyszerű, gyors és megfordítható algoritmusok készültek, amelyek számítógépes megvalósítása is elég egyszerű. Ezek az algoritmusok olyan gyorsak, hogy már alkalmasak nagy fájlok igen rövid idő alatt történő tömörítésére és kibontására.

Mivel a feladat (a wavelet transzformáció) problémája egyszerűen kiterjeszhető 2, sőt 3 dimenzióra, egy sor manapság igen elterjedt számítógépes alkalmazás alapjául szolgál. Jellemző alkalmazás egy dimenzióban a hangtömörítés, két dimenzióban a képtömörítés, 3 dimenzióban a mozgóképek tömörítése. Ezen alkalmazások során a mátrixokká alakított hang- és képfájlokat DWT-vel transzformálják, majd a kis, zavaró elemeket küszöbölik, így a feladatot méretben erősen redukálják (akár az eredeti méret tizedére), majd szükség esetén inverz DWT-vel visszaalakítják az eredeti dimenzióba. Tapasztalatok szerint az ilyen eljárás csak néhány %-kal rontja az eredeti hang- illetve kép minőségét, ami általában az érzékelés számára észrevehetetlen marad. Az egyik első híres, ilyen irányú alkalmazást az FBI végezte el több millió darabot számláló ujjlenyomat bankjával, ahol a tömörítés után a felismerhetőség teljes értékű maradt (Vidakovic – Mueller [1991]). A számítógépes alkalmazások közül legismertebb a jpeg formátumú képtömörítés, amely szintén DWT alapokon nyugszik. A televíziózásban a HD képminőségű adás, illetve vétel gyors elterjedésének egyik fő akadályja az volt, hogy nagy információmennyiséget kellett gyorsan mozgatni. Amikor a HD szabványt készítették, egy Fourier-analízist felhasználó algoritmus teremtette meg erre a lehetőséget, de akkor a DWT még gyerekcipőben járt (Strang [1994]). Nincs információnk róla, de könnyen lehetséges, hogy az UHD kifejlesztése, a még nagyobb mennyiségű információ gyors átvitele DWT algoritmuson alapul.

A waveletek elmélete és alkalmazása igen gyorsan fejlődő terület a matematikában, a fizikában, az informatikában és más alkalmazott területen is. Elterjedéséhez nagyban hozzájárulhat az is, hogy hatékony algoritmusok mel-

lett jól hozzáférhető számítógépes csomagok állnak rendelkezésre, elsősorban S és R nyelveken.

5 Nekünk mire jók a waveletek?

Eddig sokat írtunk a waveletek fizikai, műszaki alkalmazásairól, de természetesen felvetődik a kérdés, hogy mire alkalmazhatók a waveletek a társadalom- és gazdaságtudományok területén? Természetesen erre a kérdésre azonnal nem lehet egyszerű választ adni, hiszen maga az elmélet eléggé kevésbé ismert ezen tudományágak művelői, és elsősorban modellezői körében, így nem lehet tudni, hogy egy kicsit jobban megismertetett módszertani alapokkal milyen alkalmazásokra lehetne számítani. Ezért csupán azokra a triviálisnak tűnő alkalmazásokra mutatunk itt be példákat, amelyek részben a meglévő műszaki jellegű feladatokból analógiák folytán származtathatók, részben pedig a hagyományos idősorlemzési eszközök továbbfejlesztésével alakíthatók ki. Tehát a statisztika idősorlemzési alkalmazásaiból indulunk ki, de meg kell említenünk, hogy a területi sorok elemzése hasonlóképp érdekes és hasznos céltérület lehet, bár a területi statisztika eszköztára ez ideig kevésbé kidolgozott, mint az idősoroké.

A következőkben tehát néhány jellemző alkalmazást mutatunk be példák-
kal illusztrálva¹⁰.

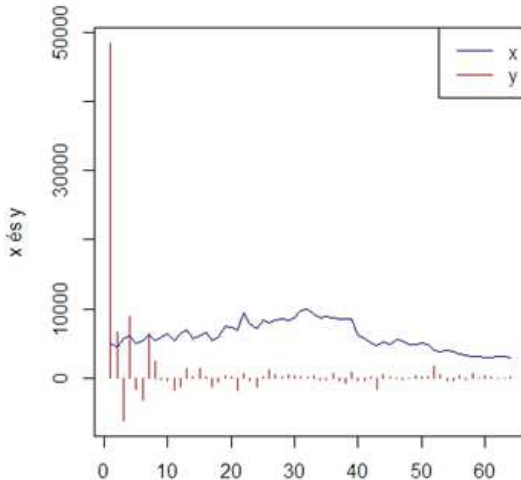
a) Hullámok kimutatása, elemzése

A waveletek elsődleges alkalmazása természetesen a hullámok elemzése, hiszen segítségükkel ki lehet mutatni, hogy a vizsgált idősorban hol és milyen hosszúságú hullám detektálható. Meg kell jegyeznünk, hogy a módszer korlátja lehet a rövid idősor, hiszen pl. a Haar-waveletekkel csak erősen korlátozott számú és nagyságú hullámot tudunk elemezni. Az itt következő példákban 64 vagy 32 elemű éves idősorokat vizsgálunk, ami a makromodellezésben hosszúnak minősül, ugyanakkor a wavelet elemzés legfeljebb 6 különböző, 1,2,4,8,16 és 32 éves ciklusokat tud azonosítani, és ilyen ciklusokat tud elhelyezni a teljes intervallum (64 év) megfelelő szakaszán. Ez természetesen elég durva eredmény, de ismételten hangsúlyozzuk, hogy az elemzés igazi területe a valóban hosszú idősorok (big data) vizsgálata.

Példaként a magyarországi sertésállomány 1960-2016 közötti éves idősorát és annak DHT-jét mutatjuk be (8. ábra). Ennél a feladatnál a diszkrét Haar-transzformációt használjuk fel annak érdekében, hogy megismerjük a jelenség hullámtermészetét, különös tekintettel arra, hogy korábban az ökonometria egyik „slágerfeladata” volt a sertésciklus kimutatása és elemzése (például Kornai [1981]). A waveletek segítségével most eggyel több, adekvát eszközünk adódik a sertésállomány ciklikus alakulásának vizsgálatára.

¹⁰A számításokat a KSH éves idősorai alapján végeztük saját fejlesztésű R-kódok segítségével. A számítások részletei megtekinthetők Hunyadi [2018a és 2018b] tanulmányaiban.

A 8. ábrán látható, hogy az első (pálcikával jelölt) együtttható pozitív és nagy: ez a kalibráló változó együttthatója, és csak nagyságrendet jelöl: az átlag szorozódik egy konstanssal. A 2. együtttható, amelyik ez esetben pozitív, de nem túl nagy, az alaptendenciát jelzi, hiszen ez a Haar-alapfüggvény (anyawavelet) együttthatója. Tárgyi jelentése az, hogy az idősor, akár az alapfüggvény az egész vizsgált intervallumon alapvetően csökkenő tendenciát mutat, de ez a tendencia (trend?) nem túl erős. Az ezt követő két együtttható (a 3. negatív, a 4. pozitív) a hosszú hullám meglétére utal. A negatív együtttható egy "fel" alakú hullámot jelöl az időszak első felében, míg a 4. pozitív együtttható egy hasonló hosszúságú "le" alakot az időszak második felében. Ezek eredője adja ki az ábrán látható hosszú hullám konkáv szakaszát, ami lényegesen meghatározza az idősor lefutását. A DHT ábrán látszik még, hogy a 5-8 együttthatók viszonylag nagyok. Ezek a 16 éves középhullámokat mutatják. Ezekből az látszik, hogy ezek közül a 3. együtttható (valójában a 7.) a legnagyobb, azaz az időszak 3. negyedében érvényesül leginkább egy középhullám csökkenő ága. Az ezt követő együttthatók, melyek a rövid hullámokat mutatják, kisebbek, nem jeleznek számottevő hullámzást. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy ha célunk az lenne, hogy a sertésciklust, nem pedig a DHT tulajdonságait elemezzük a lehető legalaposabban, érdemes lenne megnézni, hogy pl. trendszűrés után (amikor a tartós tendenciát, esetleg a leghosszabb hullámot, vagy hullámokat kiszűrjük) mit mutat a transzformáció, hiszen egy ilyen eljárás felezősítheti a maradék idősorban lévő, nagyobb frekvenciás hullámokat, és jobb betekintést adhat az idősorban megjelenő rövid hullámok létébe és elhelyezkedésébe.

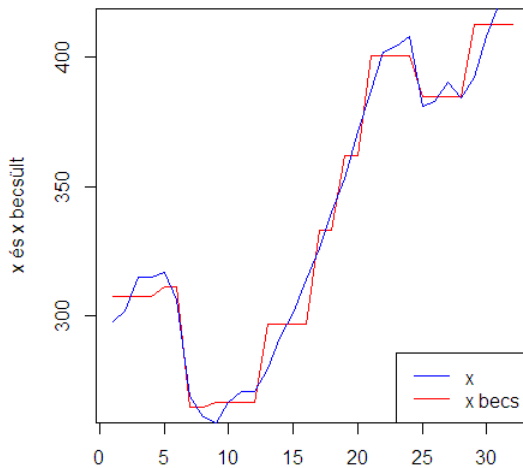


8. ábra. A sertésállomány idősora és annak DHT-je.
Forrás: saját szerkesztés.

b) Simítás, közelítés, outlier szűrés, tömörítés

A DWT a korábban elmondottak alapján egyre inkább elveszíti eredeti funkcióját, és a hullámmozgások elemzése helyett idősorok tömörített közelítésére, a kiugró értékektől való megszabadítására, általában egyszerűbb, modellszerű leírására használják. Ennek módja az, hogy a wavelet transzformáltból küszöböljük a kis elemeket, majd az így rövidített, tömörített transzformáltakból a vissza-transzformációt alkalmazva, megkapjuk az eredeti idősor közelítését. Ezt az eljárást úgy is fel lehet fogni, mint outlier szűrést, amikor a kis, eseti, tranzien hullámoktól megtisztítjuk az idősort.

A 9. ábrán a GDP indexének idősorát (1965-2018) és annak DHT-vel történő közelítését láthatjuk. Ebben az esetben úgy jártunk el, hogy a DHT y vektorának elemeiből lenulláztuk a legkisebb abszolút értékű 70%-ot, majd elvégeztük az inverz transzformációt. A 70% természetesen csak egy lehetőség, a lényeg persze az, hogy az idősor egy nem elhanyagolható részét töröljük, és így a feladatot egyszerűsítsük. Több kísérlet után jutottunk el oda, hogy ez esetben a 70%-os szűrés látszik olyannak, ami lényegesen egyszerűsíti (modellezi) a feladatot, ugyanakkor az idősor fő jellegzetességeit is megtartja. Az ábráról ugyanis jól látható, hogy a közelítés a nehezen követhető ingadozások ellenére jónak mondható, hiszen a két sor között a determinációs együttható $r^2 = 0.97$, azaz bizonyos értelemben azt is állíthatjuk, hogy az eljárás csak 3% az információvesztéssel járt. Lényegileg ugyanezt az eljárást követik természetesen bonyolultabb módon a már említett hang- és képtömörítő eljárások. Ennél a kis példánál az eljárás előnyei nem tűnnek ki, de nagy adatmennyiség (pl. big data környezetben esetleg több százezer adat) esetén az adattárolás és manipuláció, valamint a feladat átláthatósága szempontjából ez már lényeges lehet.



9. ábra. A GDP idősora és annak DHT-vel történő közelítése.

Forrás: saját szerkesztés.

c) Hasonlóságok keresése idő- és területi sorokban

Ez az alkalmazás, bár érdekesnek tűnik, egyelőre nem valamiféle bizonyított elméleten, hanem egy sejtésen nyugszik. Lényege az, hogy ha idősorokat szándékozunk összehasonlítani, nem az eredeti idősorokat, hanem azok wavelet transzformáltjait hasonlítjuk össze. Emögött az a feltételezés áll, hogy a wavelet transzformáltak tömör és rendezett formában hordozzák azoknak az idősoroknak a tulajdonságait, amelyekből származnak. Ezért, ha a wavelet transzformáltakat hasonlítjuk össze, hatékonyabb lesz az összehasonlítás, az jobban kiemeli a közös tulajdonságokat, illetve jobban szelektál. Ezt a gondolatot még nem láttuk egzaktan bizonyítva, de alkalmazását már nyomon lehet követni. Uliha [2016] ezt az elvet használta a svéd és norvég makrogazdasági változók olajárral való együttmozgásának jellemzésére. Ezzel kapcsolatban az elmélet helyességén túlmenően természetesen egy sor kérdés vethető fel, így pl. az, hogy milyen waveletet célszerű használni, a teljes vagy a küszöbölt DWT vektort használjunk, vagy az, hogy a hasonlóságot milyen mutatóval mérjük?

Az elv bemutatására elkészítettük 4 makró változó (GDP, fogyasztás, ipari termelés, beruházás) 32 elemű (1985-2016) volumen-idősorainak összehasonlítását egyszerű korrelációs mutatók segítségével, ahol a korrelációs mátrixokat először az eredeti idősorokból, másodsor a DHT transzformáltakból számítottuk ki. Az eredményeket az 1. és 2. táblázat korrelációs mátrixaiban foglaltuk össze.

	GDP	Fogyasztás	Ipari termelés	Beruházás
GDP	1	0.9435	0.9728	0.9286
Fogyasztás		1	0.8882	0.9051
Ipari termelés			1	0.9306
Beruházás				1

1. táblázat. Az eredeti sorokból számított korrelációs mátrix

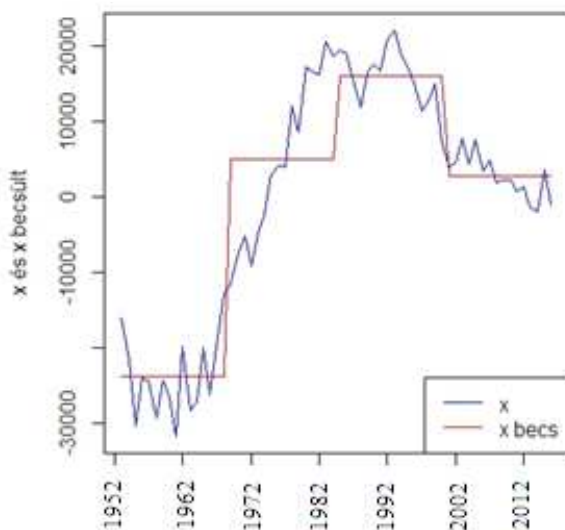
	GDP	Fogyasztás	Ipari termelés	Beruházás
GDP	1	0.9985	0.9804	0.9941
Fogyasztás		1	0.9710	0.9910
Ipari termelés			1	0.9885
Beruházás				1

2. táblázat. A DWT-ből számított korrelációs mátrix

A két mátrix elemenkénti összevetése az mutatja, hogy a transzformáltakból számított korrelációk *minden esetben* magasabbak, azaz a transzformáltak mindenütt erősebb kapcsolatot mutatnak, mint az eredeti sorok. Ha még azt is hozzávesszük, hogy az idősorok közti korrelációs együtthatók tartalmazzák a közös trendhatást, ami nyilván felfelé torzítja az eredeti sorokból számított mutatót, míg ez a transzformáltaknál nem, illetve másképp jelenik meg, azt mondhatjuk, hogy ezen a példán a wavelet transzformáltak felerősítik az együttmozgást leíró kapcsolatokat. Ez természetesen nem bizonyíték, csak indikáció, de maga a gondolat alighanem érdemes arra, hogy a későbbiek során alaposabban megvizsgáljuk.

d) Outlier szűrés és a legfontosabb fordulópontok elemzése

A 10. ábrán egy demográfiai idősort, a magyarországi halálozások számának idősorát és annak durva DHT közelítését láthatjuk (Hunyadi [2018b]). A függőleges skálán látható, hogy az alapadatokat a saját átlaguktól vett eltérésekkel helyettesítettük, ami az itt felvetendő kérdést – a kritikus pontok elhelyezkedését – nem érinti. Itt tehát a halálozások idősorának kritikus fordulópontjait kerestük $p = 0.96$ szűrés esetén, azaz úgy, hogy a DHT elemeinek legkisebb 96%-át 0-ra redukáltuk. A kapott fordulópontok: 1969, amikor megugrik a sor, 1985-ben kezdődik a lassulás, 1985 és 2001 közt megfordul a tendencia, végül 2001-től alacsony szinten stagnál, illetve lassan csökken.



10. ábra. A halálozások száma és lépcsős közelítése.
Forrás: saját szerkesztés.

Ez az alkalmazás hasonlít arra, amit korábban már említettünk. A különbség mindössze annyi, hogy a DHT-t ezúttal erősen küszöböljük (szűrjük), azaz pusztán 3-4 elemét hagyjuk meg, amelyek visszatranszformálás után kirajzolják azt a függvényt, amely durván ugyan, de megragadja az eredeti idősor lényegét, ugyanakkor megadja azt a néhány kulcsévet, amelyekben a folyamat lényeges fordulópontjai bekövetkeznek. Ehhez az elemzéshez kifejezetten előnyös a Haar-transzformáció lépcsős jellege.

A fenti néhány alkalmazás csak bemutató volt, azonban nem szabad elfelejteni, hogy a waveletek igazi elterjedése alighanem még előttünk áll. Korábban tettünk említést más, műszaki, fizikai, informatikai alkalmazásokról. A fent bemutatott néhány, társadalom- és gazdaságtudományi alkalmazáshoz még hozzá lehet tenni, hogy általában nagy lehetőség adódik a nem stacionárius idősorok elemzése esetén, hiszen ezen a téren a wavelet elemzés kiválthatja, sőt ki is kell váltania a hagyományos Fourier-elemzéseket. Már

említettük, de talán nem árt újra hangsúlyozni, hogy a nagyon nagy adatmennyiségek (big data) esetén, ami jelenleg már a statisztika kézzel fogható valósága, a wavelet elemzés szintén igen sikeres lehet. Végül megemlíjtjük a területi statisztikai elemzéseket, amelyek az idősoros módszerek mintájára azokhoz hasonló, illetve közel álló módszereket használnak (Dusek T. – Kotosz B. [2016]), és a jövő előttük áll. Azt sem szabad elfelejteni, hogy a wavelet-elmélet még viszonylag új, társadalmi-gazdasági alkalmazásai még csak kialakulóban vannak, de biztosak lehetünk abban, hogy amint ez a nagyon hasznos terület megerősödik és elterjed, újabb és újabb alkalmazásokat indukál, olyanokat is, amelyenekre most talán még nem is gondolunk.

6 Záró gondolatok

Ez a cikk csupán bevezető a waveletek elméletének és alkalmazásának világába. Bevezető, mégpedig elég rövid, és talán felszínes bevezető, de tudatában kell lennünk annak, hogy a waveletek mélyebb megértése és alkalmazása transzdiszciplináris ismereteket követel. Maga a téma meglehetősen divatos és jól mutatja a modern matematika jellemzőit, a diszkrét probléma-kezelést, a számítástechnika felé fordulást, az alkalmazás-orientáltságot. Az átalakulóban, paradigmaváltás előtt álló statisztika jellemzői is megmutatkoznak ezen a területen, hiszen az induló adatok forrásainak minősége és mennyisége, a nagy számításigény, a sokoldalú felhasználhatóság, mind beleillik a statisztika átalakulásának egyre jobban kirajzolódó trendjébe.

A waveletek társadalmi-gazdasági modellezésben történő alkalmazásának is csak néhány egyszerű kezdetét villantja fel ez az összeállítás. Alighanem joggal gondolhatjuk, hogy az alkalmazásokban ennél jóval több lehetőség van. Ahhoz azonban, hogy ezeket a lehetőségeket jobban kihasználjuk, éppen a terület korábban említett transzdiszciplináris jellege miatt az érintett szakterületek, azaz a matematika, az informatika, a statisztika, valamint a társadalmi-gazdasági modellezés együttműködésére lenne szükség. Ennek a cikknek elsődleges célja és értelme az, hogy egy ilyen együttműködés szükségességére felhívja a figyelmet.

Irodalom

1. Daubechies, Ingrid [1992]: *Ten Lectures on Wavelets*, 2nd ed. Philadelphia: SIAM, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 61.
2. Dusek Tamás – Kotosz Balázs [2016]: *Területi statisztika*. Akadémiai Kiadó, Budapest
3. Freschl György [1978]: *Bevezetés a spektrálanalízisbe*. Ökonometriai Füzetek 15. KSH Ökonometriai Laboratórium, Budapest
4. Granger, Clive William John – Hatanaka, Michio [1964]: *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton University Press, Princeton
5. Haar Alfréd [1910]: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Mathematische Annalen*, 69, pp. 331-371

6. Harvey, Andrew [1981]: *Time Series Models*. Philip Allan Publisher Limited, Oxford.
7. Hubbard, Barbara Burke [1998]: *The World according to Wavelets*. AK Peters, Natick, MA
8. Hunyadi László [1994]: Egységgyökök és tesztjeik. *Sigma* 25, 135–169.
9. Hunyadi László [2017]: Bevezetés a spektrálanalízisbe. HLM1, Budapest (kézirat)
10. Hunyadi László [2018a]: A wavelet elemzés alapjai, HLM3, Budapest (kézirat)
11. Hunyadi László [2018b]: Demográfiai változók hullámtulajdonságairól. In: *Emlékkötet Hoóz István 90 éves jubileuma alkalmából*, PTE, Pécs, 255–268.
12. Kaiser, Gerald [1994]: *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser, Boston
13. Kornai Gábor [1981]: Megszűnt-e a sertésciklus? A magyarországi sertéstartás ökonometriai modellje. *Közgazdasági Szemle*, 28(3). 316–332.
14. Pintér József [2005]: A spektrálanalízisről. *Statisztikai Szemle*, 85(2), 130–156.
15. Polikar, Robi [1994]: *Wavelet Tutorial*. Iowa State University web.iitd.ac.in/~sumeet/WaveletTutorial.pdf
16. Schipp Ferenc [2015]: Hiperbolikus waveletek. Arató Máttyás professzor emlékére. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 32, 1–39.
17. Strang, Gilbert [1994]: Wavelets. *American Scientist* 82, 250–255.
18. Uliha Gábor [2016]: Az olajár és a makrogazdaság kapcsolatának elemzése folytonos wavelet transzformáció segítségével. *Statisztikai Szemle*. 95(5), 506–534.
19. Vidakovic, Brani [1999]: *Statistical Modeling by Wavelets*. Wiley, New York
20. Vidakovic, Brani – Mueller, Peter [1991]: *Wavelets for Kids. A Tutorial Introduction*, Duke University Durham, NC 27708-0251 brani@isds.duke.edu pm@isds.duke.edu
21. Wickerhauser, Mladen Victor [1994]: *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*. AK Peters Ltd, MA.
22. <http://en.wikipedia.org>

ON THE WAVELETS

The wavelet problem is not a new one, the first wavelet, that resembles to the ones used nowadays, were constructed by the Hungarian mathematician Alfred Haar in the beginning of the 20th century. Naturally, he tackled with a problem of pure mathematics, and he solved this one: using his famous stepwise function, among others, he could approximate any continuous functions. However, the results, obtained by Haar were rather unprecedented, so that time it did not obtain real applications outside the narrow field of theoretical mathematics. Many decades later, in the second half of the century, first in connection with physical, and later informatical problems, the real wavelet problem has been outlined and used. This proved to be a very effective tool to analyse non-stationary time series, a good means that complete the Fourier analysis, which can exceed it in some points. This article is an introductory study: it deals with some basic properties of wavelets, introduces the

discrete wavelets, shows an algorithm that is popular nowadays and useful, to accomplish wavelet transformation in both directions by using a computer. After this methodological section the article shows some eventual application in economic and social modelling and at the end it demonstrates some further hints of the hidden application facilities of the topic.

In the beginning, the article shows some results of Haar. Results, that later became the basic foundation of the whole topic. First it demonstrates the Haar-type basic stepwise function (the so called mother wavelet), the calibration function (or father wavelet), and the transformed (translated and dilated) versions of the mother wavelet (children wavelets). The series, formed from these elements – and this is a famous result of Haar – is orthogonal, and using this series, any continuous function can be approached with a voluntary precision. This result – in some aspects – resembles to the results of Taylor and Fourier, and the approximation is more or less similar, but evidently based on different functions. The article shows a very simple and well known quadratic function and its stepwise approximation by Haar series of 4 and 8 elements.

For a long time, a half century, this result was only that of mathematicians, it had not application outside this area, and only in the mid of the last century begin first of all physicists to reveal the connection of this type of methods and the Fourier transformation. Starting from Haar's results, constructing, introducing and using new wavelets they get efficient tools for time series analysis. So, new wavelets have been created (Gabor – Morlet wavelet, the Mexican hat wavelet, the implicitly defined Daubechies wavelet and a lot of other wavelets). This made necessary the unification of the theory based on wavelets. Following this, application of wavelets grown rapidly – this period is called by some authors the revolution of wavelets. The applications reached further territories like social and economic analysis, and not only time series analysis. In this field modern informatics was the first that used and applied wavelet analysis to manipulate (coding, storing and compressing of pictures) spatial data as well.

In connection with the applications, one of the main bottleneck of the original wavelet theory was, that it based on continuous (or at least partly continuous) functions, so there was a separate phase, when the results had to transform to discrete form or to digitalize them. A comparatively new result in the wavelet theory is the discrete transformation, which starts from the fact that the data are discrete (or at least discrete on the level of observation), so the wavelet mapping and compression of such data can be done by discrete methods only. The article deals with the discrete wavelet transformation in a detailed way. First the Haar matrix was introduced, but it was easy to understand that for large scale problems the quasi-empty transformation matrix (the large share of its elements is 0), is rather inconvenient for practical use. Therefore, starting from the original Haar transformation and using a rather simple but rather efficient stepwise method – the Cascade Algorithm – we show how to apply the wavelet transformation to discrete time or spatial series. The article shows this algorithm via a small numerical example. As the result of the transformation – which operates in this case as well in both directions – a series (a vector) of coefficients of the same size can be obtained. From this vector, by cutting or thresholding – i.e. deleting and replacing some coefficients by 0 – and an inverse transformation an approximation of the original series (vector) can be obtained.

After this transformation

- the DWT (Discrete Wavelet Transform) of a series remains a vector of the same size as the original one, that is the number of their elements is equal, since the transformation matrix is quadratic;
- the structure of the result vector (\mathbf{y}) is special: at the beginning (on the left hand side) the coefficients of the long waves, at the middle the coefficients of the middle waves, while on the right hand side of the short waves, which

refers to irregular sound, can be found;

- it is easy to see an interesting case of the information-conservation: the sum of squares of the elements of vector \mathbf{x} and \mathbf{y} are equal, but their distribution is very different: vector \mathbf{y} is much more concentrated than the original vector (\mathbf{x});
- that is why a peculiar application of the DWT is as follows: after the transformation by mean of thresholding we delete the small absolute valued elements of \mathbf{y} (i.e. they get 0 value), and after re-transformation the new vector \mathbf{x} gives a good approximation of \mathbf{y} but using much less nonzero-elements. This is a simple way of information compression, and so this is an important point of wavelet modelling.

As far as the applications are concern, the problem (the wavelet transformation) is easily extended to 2, or 3 dimensions, so it becomes the base of a lot of extended computer applications. A peculiar application in 1 dimension is the compression of voices in music files, in 2 dimensions the compression of images, in 3 dimensions the compression of TV pictures together with voices. In these applications first the files of sound or images are mapped to matrices, than transform by DWT. The small, nuisance elements are thresholding, so the original problem is reduced (sometimes by 90 percents), and then using the inverse DWT it will be re-transformed to the original scale. According to some reports, such double transformation will not reduce the quality of the original file in a considerable way, so in general it remains hidden for the users. The first famous application was due to the FBI with its famous fingerprint data bank: the data bank that contains millions of prints, which was compressed by using wavelet transformation. After a more then 90% compression rate, it remained fully operable. Among the computer application the jpeg image compression is well known: it is based a discrete wavelet transformation too. In the modern TV broadcasting a relevant obstacle of peak-quality HD (High Definition) transmission was the lack of means that could save and move a huge amount of information in a very short time. When the HD broadcasting was prepared, an algorithm, based on the Fourier-analysis was applied, but in that time there were no effective DWT algorithms. We have no information on the details, but it can easy be that the UHD television, where manipulation with much more information is necessary, is based on DWT algorithms.

In the last, but rather important part of the article some applications of wavelet transformation in the field of economic and social analysis are treated. The first one is the analysis of the Hungarian hog-cycle. According to former investigations the stock of the Hungarian hogs has a 3-5 year cyclical movement, which was analysed in details by many authors in the last decades. Now we tried to show the cycle from a 64 element annual time-series by means of wavelet analysis. The results are a bit ambiguous, perhaps, because in the last two decades there were huge changes of the system of the Hungarian economic management and foreign relations, but the analysis revealed remarkable cyclic tendencies.

The second example shows how the wavelet transformation smoothes and compresses time series. The base of this application was the annual series of Hungarian GDP. In this application after a DHT (Discrete Haar Transformation) 70 percents of the wavelet coefficients (obviously the less absolute valued coefficients) have been deleted and using the inverse transformation, a good fitness of the new series has been detected. This example shows in a rather convincing way the information compression of the wavelet transformation. It is to note that in case of a much extended data base (which can often be getting in the big data analysis), this method of information compression can yield much more spectacular results.

The next example was only a trial: according to some views the common features of time series are much more detectable from the transformed series than from the original ones. So our hypothesis was that the similarities of two or more series are higher in case of wavelet transformed series. The correlation matrix among

the main macroeconomic indicators proved that the hypothesis is good – all of the elements of the new correlation matrix are higher than those, computed from the original series.

Finally in a demographic example we investigate the problem of Hungarian mortality. Our task was to separate the key-points of this 64 element time series, points that separate the particular parts of the mortality curves. Using the wavelet (Haar) transformation, 3 points of the curve has been detected and analysed. These points (1969, 1985, 2001) show those years, when the mortality curve has important, long-range turns.

The conclusion of the article is that this method is extremely promising in the field of time series and spatial series applications, but in order to realize it a more intensive cooperation among mathematics, statistics, modelling and informatics seems to be necessary.

HELYREIGAZÍTÁS

Tisztelt Olvasó!

Folyóiratunk műszaki szerkesztése során minden esetben igyekszünk a lehető legnagyobb gondossággal eljárni, ennek ellenére előfordul, hogy hibázunk. Ez történt a Sigma 2019/1-2. számának nyomdába küldése során is, amikor Kiss Tibor „Négysektoros ÁKM vizsgálata az ökológiai hálózatelemzés módszertanával” című cikkében a 99. oldalon az 5. táblázat első sorából néhány adat lemaradt. A következő oldalon a hiányzó adatokkal együtt közöljük korábbi számunk 99. oldalát.

A Sigma folyóirat szerkesztőségének munkatársai a történetek miatt sajnálkozásukat fejezik ki, és kérik a Szerző és az Olvasó elnézését. Azon leszünk, hogy hasonló hiba a jövőben ne fordulhasson elő.

Bessenyei István

Szimmetrikus ÁKM (szervezet x szervezet) tábla a hazai kibocsátásra, alapján, folyó áron TEÁOR 08 (ESA2010)										
Nemzetgazdaság, (2010. év; 2017. évi módszertan szerint) milliárd forint										
Szimmetrikus ÁKM (termék x termék) tábla a hazai kibocsátásra, sor (YPSIO TB)										
Hazai termelőfelhasználás (mFt)										
Ágazatok	Végző felhasználás (mFt)									
	Mező-erdő-gazdálkodás és halászat	Energia szektorok (erdő-gazdálkodásból, bányászattól, kölel-feldolgozás, villamosenergia-gáz-elosztás, hőellátás)	Egyéb ipari ágazatok	Szolgáltatások	Háztartások + NPISH*-k végző fogyasztói kiadásai	Kormányzat végző fogyasztói kiadásai	Bruttó állásközvetítés felhalmozás	Készlet-változás +ÉBEE**	Export	Felhasználás/ Kibocsátás összesen
Hazai termelőfelhasználás (mFt)	450 274	12 230	592 732	109 022	285 302	5 112	73 616	-44 407	575 469	2 059 350
Mező-erdő-gazdálkodás és halászat	86 190	273 852	638 432	754 206	835 468	15 771	74 269	5 710	574 532	3 258 430
Energia szektorok (erdő-gazdálkodásból, bányászattól, kölel-feldolgozás, villamosenergia-gáz-elosztás, hőellátás)	212 935	136 553	1 625 953	1 347 799	1 237 817	99 549	564 628	-275 704	14 489 033	19 438 652
Egyéb ipari ágazatok	238 593	517 184	1 760 165	7 314 533	8 165 843	5 434 014	3 167 958	-3 725	3 822 336	30 414 901
Szolgáltatások	985 991	939 819	4 617 282	9 525 560	10 524 430	5 554 546	3 880 471	-318 126	19 461 370	55 171 343
Folyó termelőfelhasználás/ Végző felhasználás alapján, hazai kibocsátásból	234 963	1 293 190	10 146 075	3 348 638	1 956 795	233 894	1 268 395	433 996	1 729 800	20 645 746
Importált termékek és szolgáltatások	38 016	38 246	126 813	822 721	2 531 598	66 419	362 312	-2 239	186 684	4 170 570
Termékek és támogatások egyenlege	1 258 970	2 271 255	14 890 170	13 696 919	15 012 823	5 854 859	5 511 178	113 631	21 377 854	79 987 659
Folyó termelőfelhasználás / Végző felhasználás piaci beszerzési áron	254 340	269 953	2 215 486	9 239 121						11 978 900
Munkavállalói jövedelem ebből bérek és keresetek	213 685	199 171	1 802 669	7 517 725						9 733 270
Egyéb termelési adók és támogatások egyenlege	-323 501	15 945	38 816	266 400						-2 340
Nettó működési eredmény	599 612	414 253	1 337 094	3 827 079						6 176 038
Amortizáció	269 930	287 024	957 095	3 385 382						4 899 431
Bruttó működési eredmény ebből vegyes jövedelem	869 542	704 277	2 294 189	7 212 461						11 077 469
Egyéb működési eredmény ebből vegyes jövedelem	614 756	3 328	59 354	1 670 128						2 347 586
Bruttó hozzáadott érték alapján	800 390	987 175	4 548 491	16 717 982						23 054 028
Forrás/Kibocsátás alapján összesen	2 059 350	3 258 430	19 438 662	30 414 901						55 171 343
*NPISH-Háztartások, segítő, non-profit szervezetek										
**ÉBEE - Értéktárgyak beszerzésének és eladásának egyenlege										

5. táblázat. Négyszektoros szimmetrikus ÁKM (szervezet x szervezet) a hazai kibocsátásra. Forrás: saját szerkesztés