

# KÉSZPÉNZ OPTIMALIZÁLÁS GLPK PROGRAM HASZNÁLATÁVAL<sup>1</sup>

ÁGOSTON KOLOS CSABA  
*Budapesti Corvinus Egyetem*

A készpénz-optimalizálás az operációkutatás régóta kutatott területe. Ebben a cikkben valós adatokon mutatok be egy banki készpénz-optimalizálást, melyet lineáris programozási feladatok segítségével végeztem el. A cikkben összehasonlítottam a determinisztikus és a sztochasztikus megközelítéseket is. A hagyományos készpénz-optimalizáción két területen léptem túl: egyrészt vizsgáltam a bankfiók valutagazdálkodását is, másrészt a bankfiók közötti készpénzszállítás lehetőségét is. A vegyes egészértékű lineáris programozási feladatok megoldására a glpk nevű szabad hozzáférésű szoftvert használtam, így a cikkből képet kaphatunk a megoldó (solver) felhasználhatóságáról és korlátairól is.

## 1 Bevezetés

A készpénz-optimalizálás az operációkutatás egyik sokat kutatott területe. A döntéshozónak szüksége van készpénzre mindennapi feladatai ellátására. Amennyiben a döntéshozó készpénzt tart, akkor ezen vagyonrész hozamáról le kell mondania. A készpénzhez jutás viszont tranzakciós költséggel jár. Ha a készpénzállomány túl magas, akkor az elveszített kamat jelent problémát, ha pedig kevés készpénzt tart a döntéshozó, akkor a készpénzhez jutás tranzakciós költségei lesznek magasak.

A témakör kiindulási pontjának Baumol (1952) tekinthető. Az ő esetében a döntéshozó magánszemély (és nem vállalat). A környezet determinisztikus: a fogyasztás konstans és előre rögzített, amitől nem tér el a tényleges érték sem. Fontos megjegyezni, hogy a problémát nem operációkutatási szempontból vizsgálta; az ő érdeklődésének középpontjában a pénzkereslet állt. Miller és Orr (1966) vizsgálatai középpontjában még mindig a pénzkereslet állt. Cikkünkben a döntéshozó már nem magánszemély, hanem vállalat, és a környezet is realisztikusabb: a készpénz szükséglet nem konstans és nem is determinisztikus. A problémát ők is analitikus eszközökkel kezelik. A készpénz optimalizálást lineáris programozási feladatként írja fel Eppen és Fama (1968). A problémát Markov-lánc modellel kezelik, ami stacionárius idősort feltételez. A későbbiekben is számos tanulmány foglalkozott a készpénzoptimalizálás témakörével: (a teljesség igénye nélkül) (Bar-Ilan, Perry és Stadje, 2004), (Elton és Gruber, 1974), (Heyman, 1973), (Simutis, 2007), (Yao, Chen és Lu, 2006), (Snellmana és Viren, 2009).

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2011. január 19. E-mail: kolos.agoston@uni-corvinus.hu.

Magyar nyelven Havran Dániel tanulmánya (Havran, 2008) mutatja be a készpénzoptimalizálást a Magyar Posta példáján keresztül.

## 2 A feladat bemutatása

Az OTP Bank Nyrt. vállalatnál 2008/09 évben fióki készpénzoptimalizációs projekt zajlott. A projekt eredményeit az Apolló nevű rendszer fióki moduljában implementálták. A cikk megírását a projekt során megfogalmazódott problémák inspirálták, a bemutatott eredmények valós adatokon alapulnak, de ennek ellenére a cikk nem az implementált rendszert ismerteti.

A kereskedelmi bankok tipikusan jelentős fiókhálózattal rendelkeznek, melyek az átutalások mellett nem csekély készpénzforgalmat is lebonyolítanak. A banknak biztosítani kell fiókhálózatának készpénzzel történő ellátását. A fiókok készpénzzel történő ellátása nem mentes a költségektől, így szerep jut az optimalizálásnak.

A készpénz szállításának van fix költsége és általában a szállító cég felszámol egy csekély hányadot (pár tized ezreléket) a pénz kezeléséért. Ezzel szemben áll a nem realizált hozam: a pénztárban lévő készpénzállomány nem kamatozik, amely összeget realizálni tudná a bank, ha a pénz befektetésre került volna.

A probléma tipikusnak is mondható: minél többször rendel a fiók pénzszállító autót a tranzakciós költség annál nagyobb lesz, viszont a nem realizált hozam kicsi. Fordítva: ha kevesebbszer rendel pénzszállító autót a bankfiók (így kicsi lesz a tranzakciós költség, de nagyobb mennyiségű készpénzállománnyal kell rendelkezni), akkor nagyobb lesz a nem realizált hozam.

Probléma ezen felül még abból is adódik, hogy a napi forgalmakat nem tudjuk pontosan, a forgalomról csak becsléssel rendelkezünk, amely természetéből adódóan bizonytalan. Tehát a költségeket úgy kell a lehető legalacsonyabb szinten tartani, hogy (egy előre adott) nagy valószínűséggel az ügyfeleket ki tudjuk szolgálni.

A banki folyamat modellje a következő: pénzszállító autó mindig a nap végén érkezik, ha reggel az autó érkezését igényelték. A szállítandó készpénz mennyiségét is már reggel (nyitáskor) meg kell mondani, bár az aznapi tényleges forgalom még nem ismert. A korábbi tapasztalatok vagy a bank belső modellje alapján rendelkezésre áll egy becslés a várható forgalomra (amely lehet negatív is, pozitív is). Ezen becsült forgalom alapján fut le az optimalizáció.

A vizsgált időszakra nem csak a becslés áll rendelkezésre, hanem a tényleges forgalmak is (mivel múltbeli időszakról van szó), az optimalizáció működését a tényleges adatokon lehet tesztelni. A tesztelés során ún. csúszóablakos (rolling horizon) technikát fogok alkalmazni. A nap eleji nyitókészlethez hozzáadom az aznapi tényleges forgalmat és a modell által aznapra javasolt pénzfelvételt és beszállítást, így megkapom az aznapi záró készletet. A következő optimalizációt a frissített becsléssel és a továbbbszámolt nyitó készlettel végzem. Figyelembe véve a záró állományt, továbbá kiszámítva

a pénz ki- és beszállítás tényleges költségeit, megkapok egy (modellezett) összköltséget a vizsgált időszakra.

### 3 A bankfióki adatok vizsgálata

Induljunk ki abból, hogy becsléssel rendelkezünk a napi forgalmakról, illetve annak szórásáról. A vizsgált negyedévre rendelkezésre állnak már a tényleges adatok is, így a becslés jóságát is vizsgálni lehet. A becslés jóságát a szokásos módszerrel mértem le: a következő napi becsült érték és a tényleges érték különbségét vettem, ezek négyzetét összegeztem a negyedévre (SSE). Ezután vettem az az  $i$ -edik napi tényleges értéknek a negyedévi átlagtól vett különbségét, és ezek négyzetét összegeztem a negyedévre (SST). A két összeget egymással elosztva, és egyből levolva  $(1-SSE/SST)$  kapjuk az  $R^2$  mutatószámot, amely az illeszkedés jóságát méri regressziós modell esetén<sup>2</sup>.

Bankfiók	Készpénzforgalom		Relatív	Becslés
	átlaga	szórása	szórás	illeszkedése ( $R^2$ )
Fiók 1	-35807	21088	0,59	-0,12
Fiók 2	-49626	32535	0,66	-0,04
Fiók 3	381,1	1833	4,81	-0,36
Fiók 4	-21559	23918	1,11	0,12
Fiók 5	30695	19020	0,62	0,19
Fiók 6	-305	9598	31,45	0,09

1. táblázat. A bankfiókok jellemzői

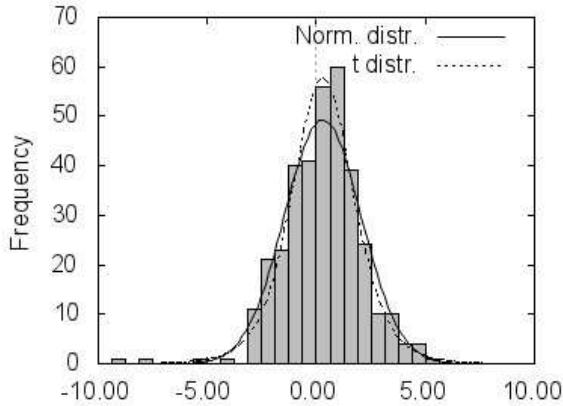
A cikk során 6 különböző bankfiók eredményeit mutatom be. Az 1. táblázat a bankfiókokról mutat összefoglaló adatokat. Az első oszlop az átlagos napi készpénzforgalom egyenlegét adja meg ezer forintban. Ennek pozitív értéke azt jelenti, hogy (összességében) az ügyfelek helyeznek el készpénzt a bankszámláinkon, tehát a készpénz gyűlik a bankfiókban, amire befizetesként fogok hivatkozni a későbbiekben. Ennek ellentéte a bankfiók számára kifizetés, amikor az ügyfelek felvesznek készpénz a számlájukról, tehát fogy a bankfiók készpénzállománya. A második oszlop a forgalom szórását mutatja, a harmadik a relatív szórást, a negyedik  $R^2$  mutatójának értékét az adott bankfiókra. Az  $R^2$  mutató negatív értéke azt jelenti, hogy a becsült és a tényleges érték különbsége jobban szóródik, mint tényleges érték.

Egy-egy nap forgalmának eloszlásáról általában normalitást szoktunk feltételezni. A normális eloszlás feltételezésének helyességét úgy ellenőrzöm, hogy a becslés hibáját elosztom a becsült szórással. Ha helytálló a normális eloszlás feltételezése (és a becslés), akkor ezeknek a hányadosoknak szten-derd normális eloszlást kell követniük. Ezen hányadost a továbbiakban 'normalizált különbség'-nek hívom. A 2. táblázat a 'normalizált különbség'-ek átlagát és szórását mutatja.

<sup>2</sup>Az  $R^2$  mutatószám levezetése megtalálható a legtöbb statisztika könyvben, pl.: Hunyadi, Mundroczó és Vita (1997) 643. oldal.

Bankfiók	Átlag	Szórás
Fiók 1	0,51	2,01
Fiók 2	0,26	1,86
Fiók 3	0,06	1,85
Fiók 4	0,23	1,50
Fiók 5	0,44	1,38
Fiók 6	0,25	1,85
Összesen	0,29	1,75

2. táblázat. A becslés normalitásának vizsgálata: 'normalizált különbség'-ek.



1. ábra. Normalizált különbség'-ek hisztogramja

A 2. táblázat adatai alapján azt lehet látni, hogy a 'normalizált különbség'-ek nem sztenderd normális eloszlást követnek. A várható érték nagyobb mint 0 (a szokásos szignifikancia szintek esetén szignifikánsan) és a szórás nagyobb, mint 1, ami azt jelenti, hogy a becsült szórások alulbecsültek.

Az 1. ábra a 'normalizált különbség'-ek hisztogramját mutatja. Az ábrán jól látszik, hogy bár az eloszlás nem sztenderd normális, más paraméterű (nem egységnyi szórású) normális eloszlás nem tűnik elfogadhatatlannak, bár statisztikailag még mindig szignifikáns a különbség. Amennyiben 6 szabadságfokú t-eloszlást illesztünk (korrigált szórással) a nulhipotézist már nem tudjuk visszautasítani. Ezért a modellezést elvégeztem mind normális eloszlást, mind 6 szabadságfokú t eloszlást feltételezve is.

Mint korábban említettem, a forgalom becsült értékei, illetve a forgalom becsült szórása az optimalizáció esetén adottságok, a feltárt hiányosságok ellenére is ezekkel az értékekkel dolgoztam.

## 4 A probléma felírása programozási feladatként

A bankfiókok esetén a kézpénz-optimalizáció nehézségét az adja, hogy a jövőbeni forgalmak pontos értéke nem ismert. Amennyiben tökéletes előre látás lehetséges lenne, akkor az optimális kézpénz rendelés és beszállítások mértéke egy vegyes egészértékű programozási feladat megoldásaként megkapható lenne. Az előrejelzésünk azonban nem tökéletes, a jövőbeni forgalmakról csak egy eloszlást tételezünk fel.

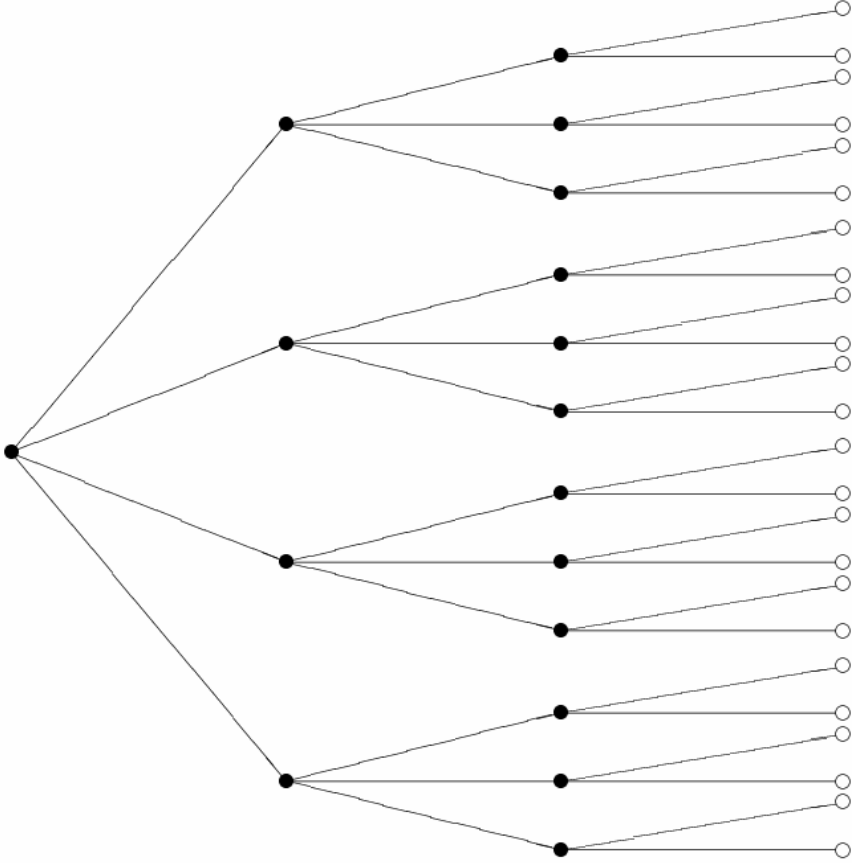
A bankfióknak a kézpénz igényt, illetve leadást a nap elején kell megrendelni az előző napok realizálódott forgalmi adatai ismeretében, tehát a következő napi döntésem függ az aznapi forgalom tényleges nagyságától. Ilyen típusú problémákat ún. szcenárió fákkal<sup>3</sup> lehet modellezni. A forgalom jövőbeli alakulását pár kategorizált értékkel szemléltetem (pl.: kis forgalom esetén 1 000, nagy forgalom 20 000). Szcenárió fát úgy kapok, hogy a kézpénz rendelés illetve beszállítási döntés meghozatala után az ágat tovább ágaztatom a következő napi forgalom szerint. Szcenárió fát mutat a 2. ábra. A döntési fán a teli körök jelzik a döntési szituációkat, az ezekből kiinduló élek pedig jelzik a jövő bizonytalanságát. Az első napi döntést azelőtt kell meghoznom, hogy az aznapi forgalmat ismerném. Viszont a következő napi döntés már különbözhet aszerint, hogy az első nap kicsi volt a forgalom, vagy nagy.

Jelölje  $C_{i_1, \dots, i_j}$  a  $j$ -edik nap eleji kézpénzállományt valamely szcenárió esetén. Az  $i_1, \dots, i_j$  értékek határozzák meg a szcenárió fán belüli helyzetet. Jelölje ezen az ágon a  $j$ -edik napi (nap végi) kézpénzfelvételt, illetve leadást  $X_{i_1, \dots, i_j}$  és  $Y_{i_1, \dots, i_j}$ . A pénz be- illetve kiszállításhoz fix költség is tartozik, ezért bináris változókat is be kell vezetni a fix költségek modellezéséhez:  $D_{i_1, \dots, i_j}$  illetve  $E_{i_1, \dots, i_j}$ .  $D$  és  $E$  változók 1 értéke azt jelenti, hogy történik gépjármű rendelés, 0 értéke pedig azt, hogy nem.

Tegyük fel, hogy a  $j$ -edik napon a forgalom alakulására  $l_j$  szcenáriót különböztetünk meg<sup>4</sup>. Jelölje ezeket az értékeket rendre:  $f_{i_1, \dots, i_j, 1}, \dots, f_{i_1, \dots, i_j, l_j}$ .

<sup>3</sup>Kézpénz-optimalizációs feladatok esetén a legtöbb szerző Markov modellt használ (például Eppen és Fama (1968)). Én eltérek a szokástól és a sztochasztikus optimalizálást szcenárió fákkal fogom elvégezni. A Markov modell mellett szóló érv, hogy a döntés meghozatalakor nem számít, hogy hogyan alakult ki a nap eleji nyitó készlet érték, hanem csak az, hogy mennyi az adott napon a kézpénzállomány nyitó értéke. Markov modell eleni érv viszont, hogy a Markov modell stacionárius idősorok esetén elegáns. A bankfiókok (és különösen az ATM-ek) forgalma viszont nem stacionárius idősorokkal írható le. Például: amennyiben hétvégén is nyitva van a bankfiók, a forgalom jelentősen kisebb (vagy adott esetben akár nagyobb is lehet), vagy fizetésnap közelében a forgalom jelentősen nagyobb lehet. A döntés meghozatalakor tehát nem tudunk csak az adott napra támaszkodni, hanem több napra előre kell tekinteni. A Markov modellt is ki lehet bővíteni úgy, hogy döntéskor több napot tekint előre, de jelentősen csökkenti a modell egyszerűségét (és növeli a méretét). Továbbá a mi esetünkben nem egy döntési szabály meghatározása a cél, hanem konkrétan az igényelt vagy leadott kézpénz mennyisége. A Markov modell esetén az állapotokat kategorizálni kell a kézpénzállomány záró értéke alapján, így az igényelt vagy leadott kézpénz mennyisége is csak pár különböző érték lehet.

<sup>4</sup>A feladat modellezése során feltesszük, hogy a  $j$ -edik napon minden szcenárió esetén ugyanannyi elágazás lehetséges (az elágazások száma viszont különbözhet egyik napról a másikra). Jelölje rendre  $l_1, \dots, l_j$  az 1., ...,  $j$ . napon az elágazások számát. Ez az  $(l_1, \dots, l_j)$  együttes meghatározza a szcenárió fát. Pl.:  $(4 : 3 : 2)$  olyan szcenárió fát jelent, ahol az első nap 4-felé ágazik a fa, a másodikon 3-felé, a harmadikon pedig 2-felé. Ilyen szcenárió



2. ábra. Példa szcenárió fára

Ekkor a szcenárió fának ezen az ágán a nap végi állományt megkaphatjuk úgy, hogy a nyitó állományhoz hozzáadjuk az aznapi forgalom egyik kategorizált értékét plusz a rendelt készpénzállományt és levonjuk a beszállított készpénz mennyiségét:

$$C_{i_1, \dots, i_j} + f_{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}} + X_{i_1, \dots, i_j} - Y_{i_1, \dots, i_j} = C_{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}}, \quad (1)$$

ahol  $1 \leq i_{j+1} \leq l_j$ .

Az  $l_j$  lehetséges megvalósulás esetén azt feltételezem, hogy mindegyik  $\frac{1}{l_j}$  valószínűséggel következik be. Jelölje  $\Phi(\cdot)$  a feltételezett eloszlás (normális vagy t) eloszlásfüggvényét,  $\Phi^{-1}(\cdot)$  pedig ennek inverzét. Legyen  $1 \leq i_{j+1} \leq l_j$ ! Ekkor:

$$f_{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}} = \hat{f}_j + \Phi^{-1}\left((i_{j+1} - 1)\frac{1}{l_j} + \frac{1}{2}\frac{1}{l_j}\right)\hat{s}_j,$$

---

fát mutat a 2. ábra.

ahol  $\hat{f}_j$  az  $j$ -edik napra a becsült forgalom,  $\hat{s}_j$  pedig a forgalom becsült szórása. Például  $l_j = 2$  esetén az inverz sűrűségfüggvényt a 0,25 és 0,75 pontokban veszem.

A fix költségek modellezéséhez szükséges egyenletek:

$$X_{i_1, \dots, i_j} \leq p_{mk} D_{i_1, \dots, i_j}, \quad (2)$$

illetve

$$Y_{i_1, \dots, i_j} \leq p_{mk} E_{i_1, \dots, i_j}. \quad (3)$$

A  $p_{mk}$  paraméter a fix költségek modellezéséhez szükséges paraméter. Jelen esetben  $p_{mk}$  paraméter a pénzszállító autóban szállítható kézpénz maximumát mutatja.

A scenárió fa ezen ágán a  $j$ -edik nap költsége megkapható a következő módon:

$$\begin{aligned} Cost_{i_1, i_2, \dots, i_j} = & c_1 X_{i_1, i_2, \dots, i_j} + c_2 Y_{i_1, i_2, \dots, i_j} + c_3 D_{i_1, i_2, \dots, i_j} + c_4 E_{i_1, i_2, \dots, i_j} + \\ & + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{c_{int}}{l_j} C_{i_1, i_2, \dots, i_j, k}, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  és  $c_{int}$  külső paraméterek. A  $c_1$  illetve  $c_2$  paraméter fejezi ki az igényelt illetve leadott pénzmenyiség (feldolgozási) költségét,  $c_3$  és  $c_4$  a pénz ki- illetve beszállítás fix költsége (autórendelés költsége),  $c_{int}$  pedig a napi kamatláb.

A megoldani kívánt programozási feladat a következő: minimalizáljuk az összköltséget, amelyet megkaphatunk úgy, hogy a  $Cost_{i_1, i_2, \dots, i_j}$  költségeket besorozzuk a csomópontba érkezés valószínűségével és összegezzük az összes elágazási csomópontra, ez az összköltség várható értéke. Az (1), (2) és (3) korlátoknak minden csomópontra teljesülnie kell. A döntési változók halmaza pedig a  $C$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $D$  és  $E$  változók összessége<sup>5</sup>.

## 5 Az elágazásmentes probléma felírása

Elágazásmentes probléma alatt azt értem, hogy a scenárió fában nincs elágazás, csak egyetlen scenárió modellezek. Az elágazásmentesség egyfajta a determinisztikusságot jelent: a  $j + 1$ -edik napi döntésem meghozatalakor nem használom fel a  $j$ -edik napi információt. A modell ugyanazt a kézpénzmenyiséget javasolja rendelni két nap múlva akkor is, ha holnap a vártnál (becsülnél) nagyobb és akkor is, ha a vártnál (becsülnél) kisebb a tényleges kézpénzforgalom.

Mivel ekkor minden döntésnél csak egy él indul ki, ezért  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 1$ , tehát a változók indexelésénél csak 1-esek szerepelnek, a kérdés csak az, hogy hány. A változók indexe legyen ebben a fejezetben  $\{j\}1$ , ami azt mutatja, hogy az indexben  $j$  darab 1-es van, tehát az  $j$ -edik napról van szó. Pl.:  $C_{\{j\}1}$  jelöli az  $j$ -edik nap eleji kézpénzállományt.

<sup>5</sup>A  $C$  változókat ki lehetne fejezni az induló kézpénzállomány és  $X$ ,  $Y$ ,  $D$   $E$  és  $f$  változók segítségével.

## 5.1 Biztonsági korlát modellezése elágazásmentes probléma esetén

A bankfiókok nem tekinthetnek el attól a ténytől, hogy az előrejelzett értékek bizonytalanságot hordoznak. A bankfiókok működtetése (jó hírneve) megköveteli, hogy az ügyfelek igényét nagy valószínűséggel ki tudjuk elégíteni.

A rendszerbe biztonsági tartalék beépítésére több lehetőség is rendelkezésre áll. Ezek közül én a következő megfontolást választottam: a  $j$ -edik nap eleji döntésem két napra kihat. A rossz döntést csak a következő nap elején lehet újabb rendeléssel korrigálni, ami csak a következő nap végi szállításkor érkezik meg, tehát tényleges segítséget csak plusz két nap múlva jelent. Ezért azt követelem meg, hogy a  $j$ -edik nap eleji döntéssel nagy valószínűséggel a  $j + 1$  nap végi egyenleg még mindig pozitív legyen. Jelölje  $\xi_j$  a  $j$ -edik napi forgalmat leíró valószínűségi változót,  $\xi_{j+1}$  pedig a  $j + 1$ -edik napi forgalmat leíró valószínűségi változót. Élünk a feltételezéssel, hogy  $\xi_j$  és  $\xi_{j+1}$  független egymástól. Normális eloszlás felételezése esetén  $\xi_j$  ( $\hat{f}_j; \hat{s}_j$ ) paraméterű,  $\xi_{j+1}$  pedig ( $\hat{f}_{j+1}; \hat{s}_{j+1}$ ) paraméterű normális eloszlást követ.

A  $j + 1$ -edik nap végi egyenleg:

$$C_{\{j\}1} + \xi_j + X_{\{j\}1} - Y_{\{j\}1} + \xi_{j+1} . \quad (5)$$

Az (5) kifejezésnek nagy valószínűséggel 0-nál nagyobboknak kell lennie. A megbízhatósági szintnek 99,9%-ot választottam. Egyrészt a bankfiókok nem futhatnak ki a készpénzből gyakorlatilag soha sem, másrészt az is indokolja a magas biztonsági szint választását, hogy a szórások alulbecsültek. Mivel  $\xi_j$  és  $\xi_{j+1}$  is normális eloszlású, ezért az összegük is az, ( $\hat{f}_j + \hat{f}_{j+1}; \sqrt{\hat{s}_j^2 + \hat{s}_{j+1}^2}$ ) paraméterekkel. Az (5) átrendezésével kapjuk a valószínűségi korlátot:

$$P\left(C_{\{j\}1} + X_{\{j\}1} - Y_{\{j\}1} \geq -\xi_j - \xi_{j+1}\right) \geq 0,999 , \quad (6)$$

ahol  $P(\cdot)$  az esemény valószínűségét jelöli.

A (6) korlátot egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk  $\hat{f}_j = f_{\{j\}1}$  értéket, mert  $C_{\{j+1\}1} = C_{\{j\}1} + f_{\{j\}1} + X_{\{j\}1} - Y_{\{j\}1}$ . Így

$$P\left(C_{\{j+1\}1} \geq (-\xi_j + \hat{f}_j) - \xi_{j+1}\right) \geq 0,999 . \quad (7)$$

A sztenderd normális eloszlás táblázata szerint a  $C_{\{j+1\}1}$ -nek a  $(-\xi_j + \hat{f}_j) - \xi_{j+1}$  valószínűségi változó várható értékét 3,09 szórással kell meghaladnia. A lineáris programozási feladatok esetén a kerekített 3 szórással fogok dolgozni<sup>6</sup>.

A Student féle  $t$  eloszlás esetén is 3 szórásnyi biztonsági tartalékkal számolok. Természetesen a  $t$  eloszlás esetén ehhez más valószínűség tarozik, mint

<sup>6</sup>A vizsgált bankfiókok esetére a szórás alábecsült, ezért 4, 5 vagy akár 6 szórásnyi tartalék is indokolt lehetne.



normális eloszlás esetén<sup>7</sup>. Független  $t$  eloszlások összegére nincs zárt képlet, ez csak numerikusan határozható meg (lásd pl.: Walker és Saw (1978)), ráadásul minden egyes esetben újra kellene számolni.

A cikk fő eredménye a szcenáriós fás megközelítés összehasonlítása a 'determinisztikus' megközelítéssel, ami más biztonsági szint esetén is értelmezhető. A megoldandó programozási feladatot úgy kapjuk, ha a modell feltételei közé felvesszük a  $j+1$  nap végi egyenlegre vonatkozó valószínűségi (8) korlátot<sup>8</sup>.

$$C_{\{j+1\}1} \geq -\hat{f}_{j+1} + 3\sqrt{\hat{s}_j^2 + \hat{s}_{j+1}^2}. \quad (8)$$

Amennyiben a  $j+1$ . nap előrejelzett forgalma jelentős befizetés a bankfiók számára, akkor a (8) korlát egyenlőtlenség formájában fog teljesülni, ami logikus is, hiszen attól, hogy holnap jelentős befizetésre számítok, a mai nap végi egyenleg nem lehet negatív.

## 5.2 Az elágazásmentes feladat numerikus eredményei

Az előző pontban leírt programozási feladatot valós adatokon futattam, különböző hosszúságú időhorizontra ( $n$ -re). A futtatáshoz értéket kell adni a  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_{int}$  és  $p_{mk}$  paramétereknek. A futtatásokat a  $c_{int} = 0, 2, c_1 = c_2 = 0, 3, c_3 = c_4 = 10000$  és a  $p_{mk} = 200000$  paraméterekkel futtattam. A nyitó készpénz állomány minden esetben 30000 (ezer forint).

A lineáris programozási feladatok megoldásához glpk nevű megoldót használtam. A glpk program a gnu szabad szoftverek licensze alá tartozik. A programot Windows 2000 operációs rendszeren, 2,33 gigahertz órajelű és 1,9 GB memóriával rendelkező gépen futattam.

A 3. táblázat mutatja különböző időhorizontra a modellezett összköltséget, a 4. táblázat pedig azt mutatja, hogy hány esetben került készpénzavarba a bankfiók.

Bankfiók	$n = 9$	$n = 8$	$n = 7$	$n = 6$	$n = 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
Fiók 1	2 108	2 116	2 116	2 105	2 109	2 099	2 110	2 034
Fiók 2	2 891	2 891	2 891	2 881	2 925	2 869	2 916	2 824
Fiók 3	266	236	262	298	271	256	476	476
Fiók 4	1 901	1 916	1 901	1 917	1 934	1 883	1 902	1 777
Fiók 5	1 121	1 118	1 105	1 114	1 117	1 101	1 295	11 616
Fiók 6	698	696	696	663	654	581	741	748

3. táblázat. Az elágazásmentes modellek költségei (negyedévre, ezer forintban)

A 3. táblázat alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy az optimalizálási horizont növelése (egy idő után) nem csökkenti érdemben az összköltséget. A túl rövid optimalizálási időhorizont ( $n = 2$ , néha  $n = 3$ ) ellenben problémás lehet (lásd különösen az 5. fiók esetét). Fontos látni, hogy ebben

<sup>7</sup>Szemléltetésül: független, azonos szórású, 6 szabadságfokú  $t$  eloszlások esetén a 3,09 szóráshoz 0,9976% biztonsági szint tartozik.

<sup>8</sup>Mivel mind normális, mind  $t$  eloszlás esetén a 3 szórásnyi biztonsági szintet használom, így az eredményekben nem lesz különbség, de azt fontos hangsúlyozni, hogy  $t$  eloszlás esetén ehhez a 3 szóráshoz kisebb biztonsági szint tartozik.

az esetben ún. lefizető fiókról van szó. A fiók a felgyülemlett készpénzt nem fizeti le, hanem a bankfiókban őrzi  $n = 1$  optimalizálási horizont esetén. Ez azért van így, mert a lefizetéskor a pénz számlálásának költsége nagyobb, mint a kamatvesztéség. A probléma megoldódik, ha növeljük az optimalizálás időhorizontját, mert a felgyülemlett készpénzre több nap is felszámítjuk a kamatvesztéséget, így ez a hatás felülírja az egyszer felszámolandó pénzzárolás hatását.

Bankfiók	$n = 9$	$n = 8$	$n = 7$	$n = 6$	$n = 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
Fiók 1	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 2	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 4	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 5	7	4	8	5	7	7	2	0
Fiók 6	2	2	2	2	2	2	1	0

4. táblázat. Az elágazásmentes modellek készpénzhiányos napjainak száma

A 4. táblázat azt mutatja, hány esetben került készpénzzavarba a bankfiók. Érdekes az 5. fiók esete. Ez a fiók ún. lefizető fiók, tehát a felgyülemlett készpénzt szállítja el az autó. Ez a fiók úgy kerül készpénzzavarba, hogy a tényleges érték eltér az előrejelzett értéktől, és a modell több pénz lefizetését javasolja, mint amennyi a pénztárban van.

Itt látszik, hogy nagyon fontos a bankfióki folyamatok megértése és pontos modellezése. Amikor a bankfiók készpénzt rendel, előre meg kell mondania a pontos összeget, ezen változtatni nem lehet. Lefizetéskor a helyzet valamelyest rugalmasabb. A pénzzároló autó nyilván nem tud több pénzt elszállítani, mint amennyi a fiókban van. Különösen lényeges, hogy meg kell-e előre mondani, hogy mennyi pénzt szállít el az autó, és mi történik akkor, ha eltérés mutatkozik az előre bejelentettől. Lefizetéskor sokkal szerencsésebb lenne, ha nem a modell által lefizetni javasolt készpénzmennyiséghez igazodnánk, hanem a tényleges forgalom ismeretében (vagy legalábbis pontosabb ismeretében, mint az optimalizáláskor ismert előrejelzés) a modell által becsült záró értékhez.

A 6. fiók esetében viszont ténylegesen kifogyott a fiók a pénzből, többször is. Itt nem volt elégséges a biztonsági szint. Ez a fiók viszonylag kis forgalmú és az átlagos forgalomhoz képest a szórás nagyon jelentős (30-szoros). Azon a napon, amikor kifut a pénzből, a tényleges érték a becsült értéktől több mint 5 becsült szórással tér el. Ráadásul pár napon belül előfordul több 3 szórásnál nagyobb eltérés. Ilyen rendkívüli esetekre nem lehet a modellt felkészíteni. Valószínűsíthető, hogy nem az előjelzés volt ennyire rossz, hanem rendkívüli esemény áll a nagyfokú eltérés mögött (amit a bankfiók előre tudott).

## 6 Sztochasztikus modellezés

Közismert tény, hogy véletlen folyamatok esetén a várható értékekkel végzett optimalizáció jelentős mértékben eltérhet a sztochasztikus optimumtól. Ebben a fejezetben megvizsgálom, hogy a sztochasztikus modellek hogyan teljesítenek a valós adatokon.

Fontos kérdés, hogy a sztochasztikus modellezés költségelőnyt jelent-e az elágazásmentes felíráshoz képest, hiszen minden nap, az aznapi döntés után az elmúlt napi tényleges érték ismeretében újra futtatom a modellt. Az első napi döntés pedig sztochasztikus modell esetén is azonos lesz az összes scenárióra.

## 6.1 Biztonsági korlát modellezése sztochasztikus probléma esetén

Szenárió fák esetén a biztonsági korlátot az elágazásmentes esettől eltérően kezelem. Elágazásmentes esetben a (8) képlet azt fejezi ki, hogy a nap végi állomány legyen megfelelően nagyobb a következő napra várt forgalom értékénél. Szenárió fák esetén a nap végi állomány nem egyértelmű, éppen ez a szenárió fák lényege. Ezért ebben az esetben azt követelem meg, hogy bármilyen ágon a nap végi egyenleg nagy valószínűséggel elég legyen a következő (második) napi forgalom kiegyenlítéséhez. Ebben az esetben is a 3 szórásnyi biztonsági tartalékkal számolok, ami normális eloszlás esetén a 99,9% biztonsági szintnek felel meg, t eloszlás esetén pedig 99,5%-nak:

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_j, i_{j+1}} \geq -\hat{f}_{j+1} + 3\hat{s}_{j+1}, \quad (9)$$

ahol  $1 \leq i_{j+1} \leq l_j$ , és  $\hat{f}_{j+1}$  a  $j + 1$ . napra előrejelzett forgalom,  $\hat{s}_{j+1}$  pedig ennek szórása.

## 6.2 Numerikus eredmények sztochasztikus modellekre

Első fontos megjegyzésünk, hogy sztochasztikus modellek esetén nagyon könnyen elérjük a megoldó korlátait. Ezt szemlélteti az 5. táblázat: egy adott feladat megoldása hány másodpercet vett igénybe különböző  $l_i$  értékadások esetén.

Modell	$n = 9$
2;2;2	0,0
2;2;2;2	0,1
2;2;2;2;2	20,1
4;4;4	0,1
4;4;4;1	> 400
4;2;1	0,1
4;2;1;1	1,2
4;2;1;1;1	92,5

5. táblázat. A sztochasztikus modellek időigénye

Az 5. táblázat értékei alapján látható, hogy a feladat megoldásához szükséges idő exponenciálisan nő a szenárió fa méretével, ami természetesen nem meglepő és ismert is a szenárió fák esetében.

A 6. és 8. táblázatokban a néhány kiválasztott sztochasztikus modell futási eredményeit közlöm normális eloszlás feltételezése esetén.

Bankfiók	(2;2;2)	(2;2;2;2)	(4;4;4)	(4;2;1)	(4;2;1;1)
Fiók 1	2 034	2 048	2 089	2 036	2 063
Fiók 2	2 731	2 731	2 805	2 824	2 826
Fiók 3	255	229	250	249	260
Fiók 4	1 728	1 735	1 798	1 797	1 802
Fiók 5	1 038	1 039	1 100	1 100	1 098
Fiók 6	595	597	587	567	649

6. táblázat. A sztochasztikus modellek költsége (negyedévre, ezer forintban) normális eloszlás feltételezése esetén

A 6. táblázat adataiból a következő következtetéseket lehet levonni: a különböző sztochasztikus modellek teljesítménye között egyértelmű dominanciát felállítani nem lehet. Azt lehet mondani, hogy azok a modellek, amikor az első nap csak 2-fele ágaztatunk, átlagban jobban teljesítenek, mint azok, amikor 4-fele, de a kijelentés távolról sem meggyőző. Az időhorizont növelésének itt sincs egyértelműen kimutatható pozitív hatása.

Az 1-4. fiók adatai alapján a sztochasztikus modellek összességében jobban teljesítenek, mint az elágazásmentes modellek: a 4-9 napos elágazásmentes modellek átlagánál a sztochasztikus modellek átlaga az 1. fiók esetében 2,6%-kal, a 2. fiók esetében 3,7%-kal, a harmadik fiók esetében 6,1%-kal, a 4. fiók esetében pedig 7,2%-kal kisebb költséggel jár az optimalizáció. Amennyiben a 4 fiók költségeit összegezzük, a csökkenés 4,4%. Az 5. és 6. fiók esetén a költségek összehasonlítása azért nem szerencsés, mert itt kifizették a szükséges készpénzből, de itt is a sztochasztikus modellek teljesítettek jobban, hasonló mértékben. Az eredményeket kétféleképpen is lehet értelmezni: egyrészt azt mondhatjuk, hogy nem jelentős az elért költségcsökkenés, másrészt azt is lehet mondani, hogy ha egy bank a készpénzellátás összköltségét 4%-kal tudja csökkenteni, az számára jelentős eredmény.

Bankfiók	kamat- költség	autó fix költsége	pénzszámlás költsége
Fiók 1 (elágazásmentes)	1 070	412	627
Fiók 1 (sztochasztikus)	989	438	627
Fiók 2 (elágazásmentes)	1 552	442	898
Fiók 2 (sztochasztikus)	1 366	526	891
Fiók 3 (elágazásmentes)	149	95	21
Fiók 3 (sztochasztikus)	193	42	14
Fiók 4 (elágazásmentes)	1 241	273	394
Fiók 4 (sztochasztikus)	1 038	346	388
Fiók 5 (elágazásmentes)	278	303	531
Fiók 5 (sztochasztikus)	227	310	538
Fiók 6 (elágazásmentes)	337	213	114
Fiók 6 (sztochasztikus)	353	158	88

7. táblázat. Az elágazásmentes és sztochasztikus modellek költségösszetevői (negyedévre, ezer forintban) normális eloszlás feltételezése esetén

Érdeemes megvizsgálni, hogy miből adódik pontosan a sztochasztikus modellek alacsonyabb költség szintje. A vizsgálat elvégzéséhez az összköltséget 3 összetevőre bontom: kamatra, az autórendelés költségére és a pénzfeldolgozás

költségére. E 3 összetevő átlaga az elágazásmentes és sztochasztikus modellek esetében a 7. táblázatban látható.

A 8. táblázat adatai alapján a következő összefüggésekre lehetünk figyelmesek: a pénzsámlálás költsége tekintetében általában nincs nagy különbség az elágazásmentes és sztochasztikus modellek között. Ez azért van így, mert a tisztán lefizető vagy felvevő fiókok esetén az igényelt vagy lefizetett összeg nagysága nem tér el csak az időzítése, ami összességében nem befolyásolja a pénzsámlálás költségét. Más a helyzet a közel önellátó fiókok esetén. Az ő esetükben (a 3. és 6. fiók) mindkét irányban van készpénzáramlás. E fiókok esetén a sztochasztikus modellek kevesebb készpénzáramlást produkáltak, ezért kisebb a pénzfeldolgozás költsége. Ha csak egyirányú készpénzáramlással állunk szemben, akkor csak a szállítások nagysága és időzítése térhet el. Nincs egyértelmű kép, de úgy tűnik, hogy a sztochasztikus modellek többször rendelnek pénzszállító autót kisebb összegekre, így nyernek a kamatköltségen, ami ellensúlyozza még a többszöri szállítás megnövekedett fix költségét is.

Bankfiók	(2;2;2)	(2;2;2;2)	(4;4;4)	(4;2;1)	(4;2;1;1)
Fiók 1	0	0	0	0	0
Fiók 2	0	0	0	0	0
Fiók 3	0	0	0	0	0
Fiók 4	0	0	0	0	8
Fiók 5	16	13	7	7	8
Fiók 6	3	3	1	1	1

8. táblázat. A sztochasztikus modellek esetén a készpénzhiányos napok száma normális eloszlás feltételezése esetén

A 8. táblázat végezetül azt mutatja, hogy hány esetben kerül készpénz-zavarba a bank. Az értékek nagy vonalakban megegyeznek az elágazásmentes modell esetén tapasztaltakkal. Úgy tűnik, hogy azok a modellek 'biztonságosabbak' amikor az első nap 4-fele ágaztatunk. Ez logikus lehet abból a szempontból, hogy a 4-fele ágaztatás valamivel nagyobb biztonsági szintet eredményez, mint a 2-fele ágaztatás.

A modell futtatását elvégeztem úgy is, hogy nem normális eloszlást, hanem 6 szabadságfokú  $t$  eloszlást alkalmaztam (9. táblázat). Látható, hogy nincs lényegi különbség a normális és  $t$  eloszlás feltételezése között. Ez a megállapítás igaz a készpénzhiányos napok számára is. Fontos most is hangsúlyozni, hogy az (elméleti) biztonsági szint  $t$  eloszlás esetén valamivel kisebb, mint normális eloszlás esetén.

Bankfiók	(2;2;2)	(2;2;2;2)	(4;4;4)	(4;2;1)	(4;2;1;1)
Fiók 1	2 025	1 991	2 053	2 040	2 063
Fiók 2	2 714	2 718	2 774	2 806	2 807
Fiók 3	255	227	253	258	258
Fiók 4	1 736	1 717	1 792	1 777	1 808
Fiók 5	1 026	1 020	1 085	1 085	1 083
Fiók 6	587	593	576	573	631

9. táblázat. A sztochasztikus modellek költsége (negyedévre, ezer forintban) 6 szabadságfokú  $t$  eloszlás feltételezése esetén

A továbbiakban két olyan modellt mutatok be, amelyek nem szoktak előfordulni a szakirodalomban. Az egyik a valuták kezelése, a másik a bankfiókok közötti átszállítás modellezése.

## 7 Több pénznem együttes kezelése

Ebben a fejezetben úgy bővíttem a modellt, hogy figyelembe veszem, hogy a bankok nem csak forint készlettel rendelkeznek, hanem valutakészlettel is. A modell két valutát fog kezelni eurót és dollárt. A biztonsági korlátokat mindhárom pénznemre teljesíteni kell. A pénzz szállító autó viszont tud több valutát is hozni egyszerre, és a fuvardíjat is csak egyszer kell kifizetni. Kérdés, hogy ebben a környezetben mekkora a különbség az elágazásmentes és a sztochasztikus<sup>9</sup> megközelítés optimuma között.

A feladat programozási modelljéhez a következő jelöléseket kell bevezetni: A pénznemet jobb felső indexben jelölöm. Például  $C_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT}$  jelöli a vizsgált szcenárió esetén a forint készlet  $j$ -edik napi záró értékét, ahol  $i_1, i_2, \dots, i_j$  jelöli az  $j$ -edik nap végéig bejárt utak egyikét. Hasonlóképpen  $C_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{EU}$  az euró  $j$ -edik nap végi állománya,  $C_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{US}$  pedig a dollár  $j$ -edik nap végi záró értéke. Hasonlóan  $X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT}$ ,  $X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{EU}$  és  $X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{US}$  jelöli a vizsgált szcenárió esetén az adott pénznem  $j$ -edik napi rendelt értékét, ahol  $i_1, i_2, \dots, i_j$  jelöli az  $j$ -edik nap végéig bejárt utak egyikét,  $Y$  változók pedig a központba beszállítani kívánt pénzmennyiséget jelölik.  $D_{i_1, i_2, \dots, i_j}$  és  $E_{i_1, i_2, \dots, i_j}$  változók pedig a vizsgált szcenárió esetén a pénz ki- illetve beszállítás tényét leíró bineáris változók. A jelölésekből is látható, hogy a pénzz szállító autóval több valutát is tudunk rendelni egyszerre (nincs felső indexe a változóknak).

Az egyszerűség kedvéért a valuták állományát is forintértéken kezelem és a valuták esetén is a forintértékhez hasonló költségstruktúrát tételezek fel.

A probléma lineáris programozási feladatként való felírásakor az (1) korlátot minden pénznemre fel kell írni, például forint esetén az alábbi alakot ölti:

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT} + f_{i_1, i_2, \dots, i_j, i_{j+1}}^{FT} + X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT} - Y_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT} = C_{i_1, i_2, \dots, i_j, i_{j+1}}^{FT},$$

ahol  $1 \leq i_{j+1} \leq l_j$ . A fix költséget modellező (2) és (3) korlátok pedig az alábbi módon változnak:

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT} + X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{EU} + X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{US} \leq p_{mk} D_{i_1, i_2, \dots, i_j},$$

illetve

$$Y_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT} + Y_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{EU} + Y_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{US} \leq p_{mk} E_{i_1, i_2, \dots, i_j}.$$

Valuták figyelembevétele esetén a (4) célfüggvény módosul, mert nem csak a forint állományra, hanem az euró és a dollár állományra is kell kamatvesztést számolni. Természetesen mindhárom pénznemre van számolási költség is.

<sup>9</sup>Mivel az előző pontban láttuk, hogy nincs lényeges eltérés a normális és t eloszlás feltételezése között, a számításokat csak normális eloszlásra mutatom be.

$$\begin{aligned}
Cost_{i_1, i_2, \dots, i_j} &= \\
&= c_1 X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT} + c_2 Y_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{FT} + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{C_{int}}{l_j} C_{i_1, i_2, \dots, i_j, k}^{FT} + \\
&= c_1 X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{EU} + c_2 Y_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{EU} + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{C_{int}}{l_j} C_{i_1, i_2, \dots, i_j, k}^{EU} + \\
&= c_1 X_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{US} + c_2 Y_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{US} + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{C_{int}}{l_j} C_{i_1, i_2, \dots, i_j, k}^{US} + \\
&\quad + c_3 D_{i_1, i_2, \dots, i_j} + c_4 E_{i_1, i_2, \dots, i_j},
\end{aligned} \tag{10}$$

## 7.1 Elágazásmentes modellezés valuták figyelembevétele esetén

Valuták figyelembevételekor újfent először az elágazásmentes modellt vizsgálom, amikor a scenárió fában nincs elágazás. Ekkor minden pénzre teljesülnie kell a (8) korlátnak, amely például forint esetén a

$$C_{\{i+1\}1}^{FT} \geq \hat{f}_{i+1}^{FT} + 3\sqrt{(\hat{s}_i^{FT})^2 + (\hat{s}_{i+1}^{FT})^2}$$

alakot ölti.

### Numerikus eredmények

A valutaforgalomra múltbeli adat nem állt rendelkezésre, ezért egy szemléltető megoldást választottam: mivel a valuta forgalom jelentősen elmarad a forint forgalom mellett ezért a 3. fiók forgalmát tekintetem az euró forgalomnak, a 6. fiók forgalmát pedig a dollár forgalomnak. Az 1., 2., 4. és 5. fiók forgalmát pedig négy különböző forint forgalomnak. Jelen esetben időhorizontnak az  $n = 3$  értékkel számoltam csak. A 10. táblázat mutatja a csúszóablakos technikával számolt költséget.

Bankfiók	$n = 3$
Fiók 1	2 852
Fiók 2	3 650
Fiók 4	2 668
Fiók 5	2 200

10. táblázat. Az elágazásmentes modell költsége valuták figyelembevételével (negyedévre, ezer forintban)

## 7.2 Sztochasztikus modellezés valuták figyelembevétele esetén

Valuták figyelembevétele esetén is az a kérdés, hogy ha scenárió fákkal modellezem a valós folyamatokat, akkor jobb eredményt kapok-e mint ha

az elágazásmentes megközelítést választom. A kérdés most is azért merül fel, mert a csúszóablakos technika miatt mindennap újraszámolom a modellt.

A biztonsági korlátot modellező (9) korlátnak most is minden pénznemre teljesülnie kell. Forint esetén például az alábbi alakot ölti:

$$C_{i_1, i_2, \dots, i_j, i_{j+1}}^{FT} \geq -\hat{f}_{j+1}^{FT} + 3s_{j+1}^{FT}.$$

## Numerikus eredmények

Sztocasztikus modellezés esetén a következő módon jártam el: az első napon minden pénznem esetén két lehetséges forgalmat feltételeztem. Mivel összesen 3 pénznem van, ez 8 lehetséges scenárió. A második napot is bevontam a modellezésbe, de további elágazással nem dolgoztam, mert meghaladta volna a probléma a megoldhatóság határát. A négy bankfiókra a a sztochasztikus modell költségeit a 11. táblázat mutatja. A táblázatban szerepel, hogy a sztochasztikus modell esetén az összköltség hány százalékkal kisebb, mint az elágazásmentes modell esetén.

Bankfiók	Sztocasztikus modell	költségváltozás (%)
Fiók 1	2 563	-10,1
Fiók 2	3 325	-8,9
Fiók 4	2 383	-10,7
Fiók 5	1 864	-15,3

11. táblázat. A sztochasztikus modell költsége valuták figyelembevételével (negyedévre, ezer forintban)

A sztochasztikus modellezés a valuták figyelembevételével az egy pénznem kezeléséhez képest nagyobb mértékben csökkenti a költségeket. Mivel a 6. fiók forgalma játssza a dollár szerepét, ezért ebben az esetben is kifutunk a készletből.

## 8 Bankfiókok közötti átszállítás

Ebben a fejezetben a bankfiókok közötti átszállítást vizsgálom. Amennyiben lehetséges, célszerű úgy megszervezni a készpénzszállítást, hogy az egyik bankfiók közvetlenül egy másik bankfióknak szállítson. Így két fuvar helyett csak 1-et kell fizetni. Ebben az esetben a pénzszállító cég nem is dolgozza fel a pénzt, csak szállítja, így a pénzfeldolgozás díját is meg lehet takarítani<sup>10</sup>. A modellezés során ezekkel a feltételezésekkel élek. Természetesen a bankfiókba szállított készpénz mennyisége nem fix összeg, hanem az aznapi forgalom függvénye, ezért a bankfiók biztonságos működése különösen kritikus ebben az esetben.

Bankfiókok közötti átszállítások modellezésénél a megoldó méretét meghaladná a sztochasztikus modellezés, ezért csak elágazásmentes modellel vizsgáltam a problémát.  $C$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $D$  és  $E$  változók jelentése ugyanaz, mint eddig.

<sup>10</sup>Ilyen esetekben természetesen a bankfiókoknak van többlet munkájuk, amennyiben ez számottevő költséggel jár, modellezni kell.



A változók felső indexe, a bankfiókra utal. Ezen változók mellett szükségesek még az átszállításokat leíró változók. Legyen  $B$  egy indexhalmaz, ami a lehetséges átszállítási irányokat tartalmazza.  $X_bY$  egy átszállítás esetén a pénzmennyiséget jelöli, ahol az irányt  $b$  index jelöli. Természetesen  $b \in B$ . Minden átszállításhoz ki kell fizetni az autó fix költségét (de csak azt), tehát  $X_bY$  változókhoz  $D_bE$  bineáris változót is be kell vezetni a fix költségek modellezéséhez. Jelölje továbbá  ${}_fB$  azoknak az átszállítási irányoknak a halmazát, amikor az átszállítás az  $f$ -edik fiókból történik valamelyik másik fiókba. Jelölje hasonlóan  $B_f$  azon átszállítási irányok halmazát, amikor valamelyik másik fiókból az  $f$ -edik fiókba szállítanak át készpénzt.

A bevezetett jelölésekkel fel tudjuk írni a szükséges korlátokat: nap végi egyenleg:

$$C_{\{j\}1}^k + f_{\{j\}1} + X_{\{j\}1}^k + \sum_{b \in B_f} X_bY_{\{j\}1} - Y_{\{j\}1}^k - \sum_{b \in B} X_bY_{\{j\}1} = C_{\{j+1\}1}^k,$$

ahol  $1 \leq j \leq n$  és  $k \in K$ , ahol  $K$  a bankfiók halmaza.

Fix költségek modellezése:

$$X_{\{j\}1}^k \leq p_{mk} D_{\{j\}1}^k,$$

$$Y_{\{j\}1}^k \leq p_{mk} E_{\{j\}1}^j,$$

és

$$X_bY_{\{j\}1} \leq p_{mk} D_bE_{\{j\}1},$$

ahol  $k \in K$  és  $b \in B$ .

Biztonsági korlát szükséges mértéke

$$C_{\{j+1\}1}^k \geq -\hat{f}_{j+1}^k + 3\sqrt{(\hat{s}_j^k)^2 + (\hat{s}_{j+1}^k)^2}, \quad (11)$$

ahol  $k \in K$ . Az  $j$ -edik napon a célfüggvény értéke:

$$\begin{aligned} Cost_{\{j\}1} &= \sum_{k \in K} \left( c_{int} C_{\{j+1\}1}^k + c_1 X_{\{j\}1}^k + c_2 Y_{\{j\}1}^k + c_3 D_{\{j\}1}^k + c_4 E_{\{j\}1}^k \right) + \\ &+ \sum_{b \in B} c_3 D_b E_{\{j\}1}. \end{aligned}$$

## Numerikus eredmények

Az átszállítási feladat megoldását a rendelkezésre álló 6 bankfiók példáján mutatom be. A bankfiók közötti átszállítást nem engedem meg mindenhol, mindenhol, csak ahol értelmes: olyan bankfiókokból ahol felhalmozódik a készpénz olyan bankfiókba, állandó készpénzszállítási igény lép fel. Az átszállítások a következő viszonylatokban lehetségesek: 3. és 5. fiókból az 1., 2., 4. és 6. fiókba.

A modellt maximum  $n = 4$  esetén tudtam futtatni belátható időn belül. Az  $n = 4$  esetben a csúszóablakos technika esetén a modellezett összköltség 7 531 ezer forint. Ez az összeg 15%-kal alacsonyabb, mint a 6 fiók egyedi költségeinek összege.

## 9 Összefoglalás

Ebben a cikkben banki készpénz-optimalitási problémákat vizsgáltam, és a készpénz-optimalizálási problémát lineáris programozási feladatként írtam fel, melyet a glpk nevű szabad szoftverrel oldottam meg. A modellezés során bebizonyosodott, hogy a probléma kezelhető lineáris programozási feladatként. Az is bebizonyosodott, hogy még csúszóablakos technika esetén is érdemes sztochasztikus modellekben gondolkodni. A cikkben szcenárió fás megközelítést alkalmaztam, melynek során az optimalizálási horizont csökken, mert a programozási feladat mérete exponenciálisan nő az elágazások számával. A cikkben megmutattam azt is, hogy lineáris programozási feladatok segítségével kezelhető a szokásostól eltérő probléma is, mint például a valuták figyelembevétele, vagy a bankfiókok közötti átszállítás modellezése.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Deák Istvánnak és Kovács Erzsébetnek a hasznos javaslatait. Szeretném megköszönni két ismeretlen lektorom tanácsait is. Szintén szeretném megköszönni Ágoston Andreának és Forgó Ferencnek is a kézirat többszöri átolvasását. Természetesen az esetleges hibákért az enyém a felelősség.

## Irodalom

1. A. Bar-Ilan, D. Perry, W. Stadge (2004): A generalized impulse control model of cash management, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, Issue 6, 1013–1033
2. J. Baumol (1952): The transactions demand for cash: an inventory theoretic approach, *Quarterly Journal of Economics* 66, 545–556.
3. E. Elton, M. Gruber (1974): On the Cash Balance Problem, *Operational Research Quarterly*, Vol. 25, No. 4. 553–572
4. G. Eppen, E. Fama (1968): Solutions for Cash-Balance and Simple Dynamic-Portfolio Problems, *The Journal of Business*, Vol. 41, No. 1, 94–112
5. Havran D. (2008): Pénzgazdálkodási szokások hatása a működőtőkére. A Magyar Posta példája, *Közgazdasági szemle*, LV. évf., október, 907–926
6. D. Heyman (1973): A Model for Cash Balance Management, *Management Science*, Vol. 19, No. 12, 1407–13
7. Hunyadi L., Mundroczó Gy., Vita L. (1997): *Statisztika*, Aula kiadó
8. M. Miller, D. Orr (1966): A Model of the Demand for Money by Firms. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, No. 3, 413–435.
9. R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina, J. Friman, P. Drobinov (2007): Optimization of Cash Management for ATM Network, *Information Technology and Control*, Vol. 36, No. 1A, 117–121
10. H. Snellmana, M. Viren (2009): ATM networks and cash usage, *Applied Financial Economics*, Vol. 19, Iss. 10, 841–851

11. G. A. Walker, J. G. Saw (1978): The Distribution of Linear Combinations of  $t$ -Variables, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 73, No. 364, 876–878
12. J.-S. Yao, M.-S. Chen, H.-F. Lu (2006): A fuzzy stochastic single-period model for cash management, *European Journal of Operational Research* 170, 72–90

## CASH FLOW MANAGEMENT WITH GLPK SOFTWARE

In recent years both operational research and quantitative finance have paid much attention to cash management issues. In this paper we present a cash management study which is based on real world data and uses a mixed integer linear programming (MILP) model as the main tool. In the paper we compare deterministic and stochastic approaches. The classical cash management problem is extended in two ways: we considered the possibility of bank offices keeping more than one currency and also investigated the opportunity of cash transports between bank offices. The MILP problem was solved with glpk (GNU Linear Programming Kit), a free software. The reader can also get a feel of how to use this solver.



A HÁZASSÁGOK VÁRHTÓ TARTAMA ÉS TÚLÉLÉSE<sup>1</sup>

FARAGÓ MIKLÓS  
*Központi Statisztikai Hivatal*

Hány év van még hátra várhatóan egy házasságból, ha ismert a házastársak kora, és hány évvel éli túl majd egyikük a másikat, feltéve, hogy megözvegyül, vagy hány évig élnek várhatóan a válás után? A házasságokból hátralévő tartam és a házasság megszűnését követő élettartam várható értékét a szerző tudomása szerint a házaspárok korának kétváltozós függvényeként még nem vizsgálták. A cikk ezekre adja meg a formulákat, ráadásul különböző megszűnési okonként is, és elemzi az eredményeket a magyar népességre vonatkozóan, négy évtizedig visszamenően.

## Bevezetés

A cikk eredete egy —az özvegyek várható élettartamára irányuló— kérdésfelvetés volt, melynek közvetlen általánosításaként adódott a különböző családi állapotú népesség halandósági tábláinak előállítására. Ebből egyáltalán nem közvetlenül támadt az ötlet: meghatározni a házasságok hátralévő várható tartamát, esetleg a házasság „kimenetelének” (válás, halálozás) függvényében. E célra már házaspárokra vonatkozó statisztikákra volt szükség. A két probléma megoldhatóságának megállapítása után és módszertanának kifejlesztése közben már természetesen vetődött fel a házasság utáni élet vizsgálata, azaz a túlélés (a házasságé) várható tartamának kiszámítása. Itt is értelmesnek tűnt megkülönböztetni egymástól a házasságot követő családi állapotokat (elvált, özvegy). A cikk a fentieknek megfelelően három fejezetből áll, mindegyik a számítási módszer bemutatásával kezdődik, majd ezt követi az eredmények elemzése.

1. A családi állapot szerinti rövidített halandósági táblák módszertana megegyezik a KSH-ban használatossal, azzal a különbséggel, hogy speciálisan az egyes családi állapotokban élők népesség- és halálozási számait használja a halálozási valószínűségek és ezeken keresztül a tábla egyéb elemeinek, így a várható élettartam becslésére.

2. A házasságtartamok kiszámítását az tette lehetővé, hogy a népszámlálások éveire —és csak akkorra— vonatkozóan rendelkezésre állnak a házaspárok kor(pár)függő létszám-, halálozási és válási adatai. Ez a fejezet a következő kérdésre ad választ: adott egy  $(x, y)$  korú házaspár ( $x$  a férj kora,  $y$  a feleségé) ismeretlen számú házasságban eltöltött év után, várhatóan hány év van még hátra a házasságukból, feltéve, hogy elválnak vagy feltéve, hogy

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2010. szeptember 28. E-mail: faragomik@t-online.hu.

a férj vagy a feleség meghal, vagy nem feltéve semmit, azaz ilyenkor az ismertett három ok közül a „legkorábbi” miatt ér véget a házasság.

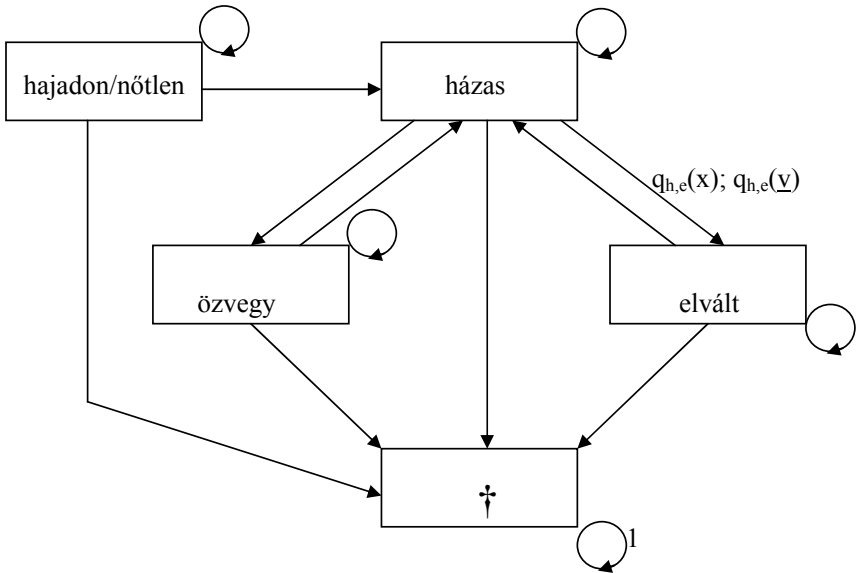
3. A „Túlélés” c. fejezet egyrészt azt tárgyalja, hogy a „most”  $(x, y)$  korú házaspár egyik tagja várhatóan hány évvel éli (majd) túl a házasságot, ismét feltéve, hogy elválnak, vagy feltéve, hogy a másik meghal, vagy nem feltéve semmit. Ezzel egyben előáll az  $(x, y)$  korú házaspár adott családi állapotú (özvegy vagy elvált) és nemű túlélőjének a várható teljes hátralévő élettartama, ez ugyanis a házasságból még várhatóan hátralévő tartam és a túlélési tartam összege. Kiszámítjuk például, hogy egy  $(x, y)$  korú házaspárból a férjnek mennyi a hátralévő várható élettartama, feltéve, hogy ő fog megözvegyülni (vagy elválnak, vagy nem feltéve semmit, azaz hogy e két ok bármelyike vet véget a házasságnak).

A 2. és 3. fejezetre, azaz a házasságok várható hátralévő tartamának, valamint a várható túlélési tartamoknak – mint kétváltozós függvényeknek – kiszámítására eredeti módszert fejlesztettünk ki.

Számításaink az ún. „periódus-tábla” módszerén alapulnak. Az alapgondolat, hogy ti. egy populáció adott – általában egy vagy két naptári éves – időintervallumra, az ún. *periódusra* vonatkozó arányszámait kivetítik a jövőre, régóta elterjedt a demográfiában: klasszikusan a halandósági táblák értelmezése is ezzel a feltételezéssel történik. Ezzel a módszerrel számítják ki a teljes termékenységi rátákat (Total Fertility Rate), lásd Pl. Faragó (2011), vagy az egészségesen várható élettartamokat is (Healthy Life Years). A módszer gondolatmenete három lépésből áll. Először a valódi populációról szerzett statisztikai adatokból egy főre eső korfüggő arányszámokat képeznek (halálozási, szülési, válási stb.), majd ezeket valószínűségekbe transzformálják. Ezután elképzelnék egy „kiinduló” rögzített létszámú fiktív kohorszot, pl. egyidőben született újszülötteket vagy 15 éves nőket, akikre érvényesnek tekintik a képzett valószínűségeket. E népességen, az ún. tábla populáción, mely ezekkel a valószínűségekkel él, hal, szül, válik stb., különböző könnyen végrehajtható számításokat végeznek. Végül az eredményeket (várható élettartam, egy anyára eső várható születésszám stb. becslései) érvényesnek tekintik az eredeti, a valódi népességre, de továbbra is azzal a feltételezéssel, hogy a periódus rátái a népesség hátralévő „élete” során érvényben maradnak. Ez nyilván soha nem teljesül, a ráták évente változnak, ezért kell pl. a halandósági táblákat évente újra elkészíteni. A tábla-módszer lényege, hogy egy pillanatnyi állapot tulajdonságainak „kimerevítése” mellett készít becsléseket a jövőre vonatkozóan. Azonban valójában a pillanatnyi helyzetet jellemzi. A 2. fejezet nívuma az, hogy a kohorszok házaspárokból állnak.

Különböző családi állapotokban eltöltött várható élettartamok kiszámításának adekvát matematikai modellje lehetne az ún. „többállapotú tábla modell” (multistate table): az 1. ábra irányított gráfjának szögpontjai (a dobozok) egy személy családi állapotainak, az irányított élek a lehetséges átmeneteknek felelnek meg. Utóbbiak címkei az átmenet valószínűségei, melyek a periódusban szerzett statisztikai adatokból származnának. Egy adott korú személy adott állapotból kiinduló véletlen bolyongása áll elő, ha az átmeneti valószínűségek szerinti sorsolás eredményeként lép minden

ütemben valamely kimenő élre. Éves ütemeket véve az átlépés előtt  $x$  éves személy  $x + 1$  évesen érkezik meg az új dobozba – vagy marad helyben, ha hurokéltre lépett. Megjegyezzük, hogy az  $i$  állapotból a  $j$ -be történő átmenet valószínűségei a legrimitívebb modell esetében sem konstansok, legalábbis időfüggők, pontosan: az élre rálépő korától függenek. Ezután nem nehéz kiszámolni az egyes állapotokban eltöltött várható időtartamokat, a kiinduló  $x(0)$  kor és  $s(0)$  állapot függvényeként. (A legegyszerűbb Monte Carlo-módszerrel, tetszőleges pontossággal becsülni.) Az egyetlen nehézséget az adekvát átmeneti valószínűségek megállapítása okozza. A tapasztalatok szerint ugyanis egy átmenet valószínűsége a bolyongás egész előtörténetétől függ, azaz attól, hogy a bolyongó megelőzően mely családi állapotába hány éves korában lépett be és meddig tartózkodott ott (tehát a bolyongás nem Markov-folyamat). Egy válás valószínűsége függ a házasságból már eltelt időtől, de egy második vagy harmadik válás vagy megözvegyülés valószínűsége is különbözik az elsőtől. (Az ábrán  $\mathbf{v}$  jelöli az átlépés előtt a bolyongó által betöltött állapotok változó hosszúságú idősorát.) Azonban ilyen mélységű és mennyiségű statisztikai adat begyűjtése igen költséges, ezért a többállapotú modell alkalmazásáról lemondunk. Az 1. ábrának megfelelő többállapotú modell alapján Willekens és szerzőtársai (1982) számítottak várhatóan eltöltött tartamokat az egyes állapotokban, azonban csak korfüggő – és nem múltfüggő – átmeneti valószínűségek alkalmazásával. Egy összefoglaló mű a többállapotú tábla modellekről: Keyfitz és szerzőtársai (2005).



1. ábra

Maradunk tehát a „sima” halandósági tábla modellnél (illetve a 2. és 3. fejezetben annak házaspárokra történő általánosításánál), amely esetünkben, a különböző családi állapotban eltöltött várható élettartamok kiszámításakor azzal a megszorító feltétellel jár, hogy ez a családi állapot a vizsgált személy haláláig változatlanul fennmarad. Azaz feltételezzük, hogy a hajadon, a nőtlen, az elvált és az özvegy nem házasodik meg (újra), a házas nem válik el. Ez úgy értelmezendő, hogy a számított eredmények csak ilyen „életpályájú”, azaz az állapotában (hajadon, özvegy stb.) megmaradó személyekre érvényesek.

Előrebocsátjuk, hogy a számításokban minden esetben demográfiai jellegű arányszámokból becsljük először a valószínűségeket, majd ezekből a különböző tartamok várható értékét. Eltekintünk a közvetlen valószínűségek részletes elemzésétől, figyelmünket inkább az áttételesebb várható tartamokat vizsgálatának szenteljük. Mint látni foguk, ezek értelmezése – összetett mivoltuk miatt – gyakran nem nyilvánvaló. Már a legegyszerűbb, a rögzített korhoz tartozó várható élettartam maga is az adott – és az annál magasabb – életkorokhoz tartozó halálozási valószínűségeknek egyfajta „összegöngyölése”. A számszerű eredmények részletes vizsgálata helyett inkább általános megállapításokat teszünk, ugyanakkor megkíséreljük feltárni a belső összefüggéseket és a meglepőnek tűnő jelenségek okait.

## Input-output

A halandósági táblák számítása egy zárt népességnek valamely rögzített megfigyelési időintervallumban – a periódusban – bekövetkezett halálozási eseményein alapul. Kétfajta népséget vizsgálunk: különböző családi állapotú személyeket, valamint házaspárokét. Mindkét esetben a legkisebb előforduló életkor 20 év. A korcsoportokhoz tartozó kis esetszámok (személyek és házaspárok korfüggő létszáma, korfüggő halálozási és válási számok) miatt célszerű volt kétéves periódusokat választani a szokásos egyéves helyett. Számításainkban házaspárok esetén a periódus: 1969–1970, 1979–1980, 1989–1990 és 2000–2001, azaz a legutóbbi népszámlálási és az azokat megelőző naptári évek. Személyek esetén a fentiekén kívül még a 2006–2007 intervallum is, melynek adatai a 2001. évi népszámlálás továbbvezetett értékei. Elemzéseket az idősorokon kívül csak a legutolsó, azaz a 2000–2001 és 2006–2007 periódusokra végzünk.

## Jelölések

A tanulmány könnyebb áttekinthetősége érdekében a jelölések nagyobb részét itt, a többit pedig a megfelelő fejezetekben ismertetjük:

- $f, n$  : férfi, nő
- $x$ : a személy betöltött kora (egész év)
- $\langle x, m \rangle$ : a személy korcsoportja: a kora az  $[x, x + m)$  intervallumba esik
- $(x, y)$ : a házaspár kora: a férj kora  $x$  év, a feleség kora  $y$  év



–  $\langle x, y, m \rangle$ : a házaspár korcsoportja, ahol a férj, ill. feleség kora rendre  $[x, x + m)$ -be, illetve  $[y, y + m)$ -be esik, speciálisan a legfelső korcsoportban, azaz  $m = \infty$  esetén  $\langle x, m \rangle$ , illetve  $\langle x, y, m \rangle$  az  $x$ -nél nem fiatalabb személyeket, illetve az  $(x, y)$ -nél nem fiatalabb párokat jelöli

– a családi állapotok jelei:  $zf$ : nőtlen;  $zn$ : hajadon;  $hf$ : házas férfi;  $hn$ : házas nő;  $vf$ : elvált férfi;  $vn$ : elvált nő;  $of$ : özvegy férfi;  $on$ : özvegy nő.

Az alábbi jelölésekben, ha egy jel az  $s$  indexet tartalmazza „ $s$  családi állapotban” jelentéssel, akkor a jel az  $s$ -t elhagyva is értelmezendő: „bármely családi állapotban” jelentéssel:

–  $k$ : a periódus hossza (év)

–  ${}_m P_x^s$ : az  $s$  családi állapotú  $\langle x, m \rangle$  korcsoportúak száma a vizsgált népességben a periódus közepén

–  ${}_m P_{x,y}$ : az  $\langle x, y, m \rangle$  korcsoportú házaspárok száma a periódus közepén

–  ${}_m D_x^s$ : azon  $\langle x, m \rangle$  korcsoportúak száma, akik a periódusban az  $s$  családi állapotban halnak meg.

– *Házasságmegszűnési okok*: a) elemi okok:  $v$ : válás;  $f$ : a férj halála;  $n$ : a feleség halála; b) összetett okok:  $h$ : halál, azaz bármelyik házastárs halála;  $b$ : bármely ok, azaz válás vagy bármelyik házastárs halála

–  ${}_m D_{x,y}^v$ ;  ${}_m D_{x,y}^f$ ;  ${}_m D_{x,y}^n$ ;  ${}_m D_{x,y}^h$ ;  ${}_m D_{x,y}^b$ : a periódusban az egyes vizsgált okok miatt megszűnt házasságok száma az  $\langle x, y, m \rangle$  korcsoportban.

– A megszűnési okok halmaza:  $C = \{v, f, n, h, b\}$ . Értelemszerűen teljesül

$${}_m D_{x,y}^h = {}_m D_{x,y}^f + {}_m D_{x,y}^n, \quad {}_m D_{x,y}^b = {}_m D_{x,y}^v + {}_m D_{x,y}^h.$$

Természetesen fennáll  ${}_m D_x^{hf} = \sum_y D_{x,y}^f$  és  ${}_m D_x^{hn} = \sum_y D_{x,y}^n$  is. (A házas férfiak halálozási esetszáma egyenlő a férj halálával végződő házasság-megszűnésekével.)

–  ${}_m M_x^s$ : az  $\langle x, m \rangle$  korcsoportú személy halálozási rátája az  $s$  családi állapotban

–  ${}_m M_{x,y}^c$ : az  $\langle x, y, m \rangle$  korcsoportú házaspár házasságának  $c \in C$  okú megszűnési rátája

–  ${}_m q_x^s$ : a  $s$  családi állapotban az  $x + m$  éves életkor előtt bekövetkezett halálozás valószínűsége, feltéve az  $x$  éves életkor elérését az  $s$  családi állapotban

–  ${}_m q_{x,y}^c$ : annak a valószínűsége, hogy egy  $(x, y)$  korú házaspár házassága  $m$  éven belül  $c$  okból megszűnik

–  ${}_m p_x^s = 1 - {}_m q_x^s$ : a személy  $x + m$  éves életkora elérésének valószínűsége az  $s$  családi állapotban, feltéve az  $x$  éves életkor elérését az  $s$  családi állapotban.

–  ${}_x p_{20}^s = {}_5 p_{20}^s \cdot {}_5 p_{25}^s \cdot \dots \cdot {}_5 p_{x-5}^s$ : az 5-tel osztható  $x$  éves kor elérésének valószínűsége, a kezdeti 20 éves kortól az  $s$  állapotban folyamatosan megmaradva,

–  $l_x^s = 100000 \cdot {}_x p_{20}^s$ : a továbbélők, azaz a kezdeti  $l_{20}^s = 100000$  számú  $s$  állapotú 20 éves személyből – az  $s$  családi állapotot nem elhagyva – az  $x$  éves kort elérők várható száma.

A továbbélő házaspárok (vagy „megmaradó házasságok”) számának előállításához feltesszük, hogy az  $(x, 20)$  és  $(20, y)$  korú házaspárok induló lét-számai:

- $l_{x,20} = l_{20,y} = 100000$ , ( $x, y = 20, 25, \dots, 85$ ), azaz a fiatalabbik fél 20 éves
- $l_{x+t,y+t}$ : a továbbélő  $(x, y)$  korú házaspárok várható száma, min  $(x, y) = 20$
- ${}_mL_x^s$ : A kezdeti 100000  $s$  családi állapotú személy által az  $\langle x, m \rangle$  korcsoportban, azaz  $x, \dots, x + m - 1$  évesen összesen megélt emberének várható száma az  $s$  családi állapotban
- ${}_mL_{x,y}^c$ : az induló 100000 házaspár által a  $c \in C$  okból megszűnő házasságok során megélt házaspárevek várható száma az  $\langle x, y, m \rangle$  korcsoportban
- $e_x^s$ : az  $x$  korú személy várható élettartama —végig— az  $s$  családi állapotban
- $\tau_{x,y}^c$ : egy  $(x, y)$  korú házaspár  $c \in C$  okból megszűnő házasságának várható hátralévő tartama.

## 1 Családi állapottól függő halandósági táblák

A rövidített (korcsoportos) halandósági táblák előállításának módszereit egy 1956-os ENSZ-kézikönyv szabályozza. Az algoritmus részletes leírása megtalálható Chiang (1968) könyvében. A KSH is ezt használja a rövidített halandósági táblák számítására, lásd Radnóti (2003). Mi is ezeket az ismert formulákat alkalmazzuk az alábbiakban külön-külön, az egyes — $s$ -sel jelölt— családi állapotokra, felső indexben jelölve ezeket.

Az egyes  $s$ -sel jelölt családi állapotokban lévők  ${}_5q_x^s$  halálozási valószínűsége az  $[x, x+5)$  korintervallumban vett, azaz öt éven belül bekövetkezett halálest valószínűségét jelenti, míg  $e_x^s$  az  $x$  éves korban várható élettartamot jelöli, ahol  $x = 20, 25, \dots, 85$ . Az emberi élet végességét feltételezve, a utolsó,  $[85, \infty)$  intervallumra előírjuk, hogy  ${}_\infty q_{85}^s = 1$ . Az  $s$  családi állapotban a halálozási valószínűség becslése a halálozási számokból:

$${}_m q_x^s = m \frac{{}_m M_x^s}{1 + m/2 {}_m M_x^s},$$

ahol a halálozási ráta:  ${}_m M_x^s = {}_m D_x^s / (k_m P_x^s)$ . A kezdeti  $l_{20}^s = 100000$  számú  $s$  állapotú személyből  $s$  állapotban továbbélők száma így generálható  $m$  évenként:  $l_{x+m}^s = l_x^s (1 - m q_x^s)$ , amint az  $l_x^s$  és  ${}_m q_x^s$  definíciójából következik (lásd a Jelöléseket). Az  $x$  éves kort elérők által újabb  $m$  év alatt megélt emberének várható száma:

$${}_m L_x^s = \frac{m}{2} (l_x^s + l_{x+m}^s),$$

időben lineáris fogyást feltételezve  $x$  és  $x + m$  között ( $x + m \leq 85$ ).

Egy kivétellel  $m = 5$  éves korcsoportokat használunk:  $[20, 25)$ ,  $[25, 30)$ ,  $\dots$ ,  $[80, 85)$ ,  $[85, \infty)$ . A  $[85, \infty)$  intervallumban a túlélők számát exponenciális eloszlásúnak feltételezve  ${}_\infty M_{85}^s$  paraméterrel, azaz feltéve, hogy a túlélők száma évről évre egy konstans hányadával,  $1/{}_\infty M_{85}^s$  részével csökken, belátható,

hogy az  $l_{85}^s$  számú 85 éves által megélt emberévek várható száma a továbbiakban, életük folyamán:

$${}_{\infty}L_{85}^5 = L_{85}^5 / {}_{\infty}M_{85}^s .$$

A fentiekkel az  $x$  éves korban várható élettartam az irodalomból ismert:

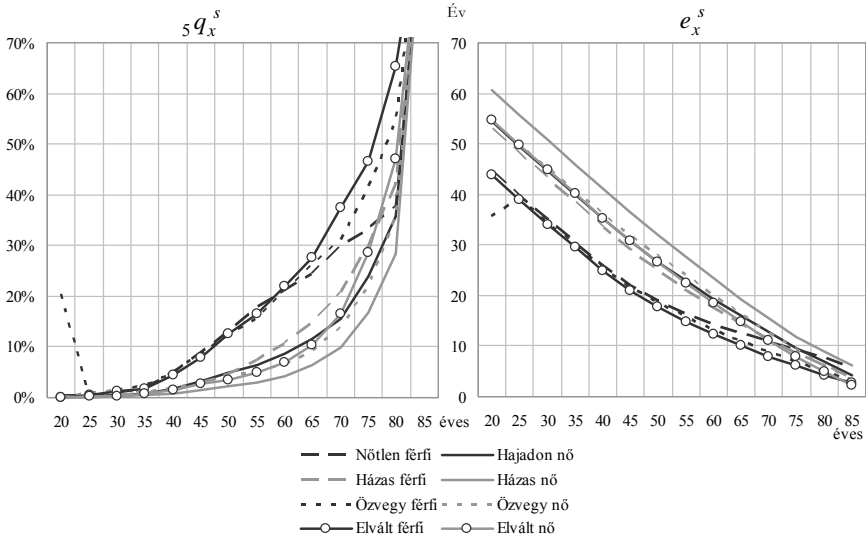
$$e_x^s = \frac{1}{l_x^s} \sum_{im=0}^{85-x} m L_{x+im}^s \quad i \in \mathbb{N} , \tag{1}$$

ahol  $m$  (az utolsó korcsoport miatt)  $i$ -től függ.

### 2006–2007. évi eredmények

A 30 évesnél fiatalabb özvegyek és elváltak halálozási valószínűségei – a kis esetszám miatt – bizonytalanok. Ez különösen szembetűnő a 2. ábra özvegy férfi görbéinek alakulásában.

A 2. ábrán, valamint az 1. táblázatban feltűnő az özvegy nők és a nőtlen férfiak kedvező pozíciója mind a halálozási valószínűségeket, mind a várható élettartamok szerinti rangsorban, továbbá, hogy jó házasnak lenni (amennyiben jó élni) és rossz elváltnak. Utóbbi a 65 évesnél fiatalabb férfiakra nem érvényes.



2. ábra Halálozási valószínűségek 5 éven belül és várható élettartamok családi állapot szerint

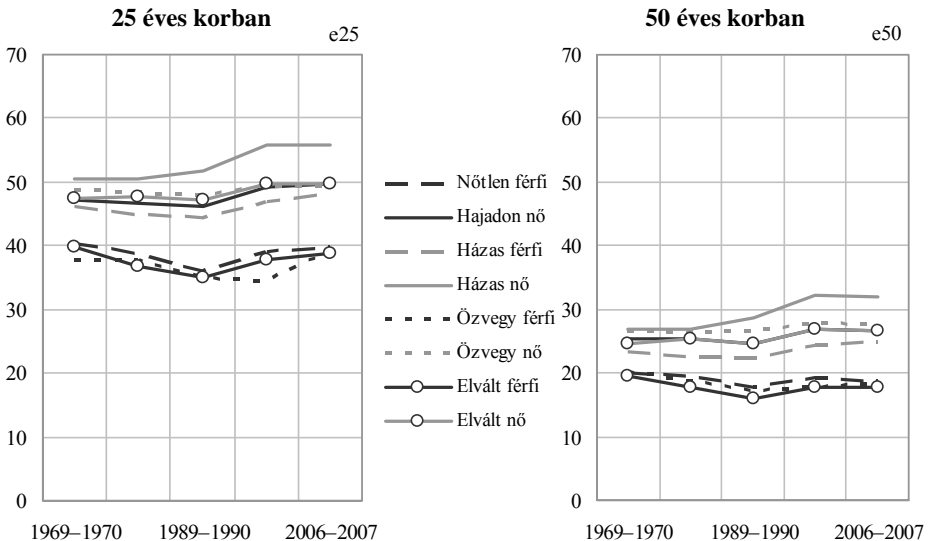
Életkor (év)	Nőtlen	Hajadon	Házass		Özvegy		Elvált		Férfi	Nő
			férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő		
20	44,6	54,5	53,0	60,7	35,8	54,5	43,9	54,8	49,7	57,5
25	39,7	49,6	48,1	55,8	39,3	49,5	38,9	49,8	44,9	52,6
30	34,9	44,7	43,2	50,9	34,3	45,0	34,1	44,9	40,1	47,6
35	30,2	39,8	38,4	46,0	29,8	40,6	29,5	40,1	35,4	42,8
40	25,8	35,1	33,6	41,1	25,5	36,1	25,0	35,3	30,8	38,0
45	22,0	30,8	29,1	36,4	21,7	31,8	21,1	30,8	26,5	33,3
50	18,9	26,7	24,9	31,9	18,5	27,7	17,6	26,6	22,7	29,0
55	16,3	23,0	21,0	27,6	15,7	23,9	14,8	22,5	19,3	24,7
60	14,3	19,3	17,5	23,4	13,2	20,0	12,3	18,5	16,1	20,6
65	12,5	16,0	14,2	19,3	11,0	16,3	10,0	14,7	13,2	16,7
70	10,8	12,7	11,2	15,5	9,0	12,7	7,9	11,1	10,5	12,9
75	9,3	9,6	8,5	11,9	6,9	9,3	6,1	7,8	7,9	9,4
80	7,7	6,8	6,1	8,8	5,0	6,2	4,3	5,0	5,6	6,3
85	5,9	4,2	3,7	6,3	3,0	3,3	2,6	2,2	3,3	3,4

1. táblázat. Várható élettartamok ( $e_x^s$ ) családi állapot szerint

Az 2. ábra szerint a nőtlen férfiak halálozási valószínűségei 75 év fölött még a házass férfiak értékeinél is kedvezőbbek (kisebbség), várható élettartamuk 80 év felett pedig a házass nők kivételével mindenkinél hosszabb (a jobb oldali ábra).

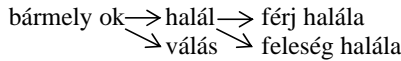
## Idősorok

Az 1989–1990-es évek a házass nők kivételével minden családi állapotban és minden korcsoportban kedvezőtlenek voltak a halálozások szempontjából. Ennek megfelelően az 1989–1990-es periódusból számított várható élettartamok minimumot vesznek fel — a házass nőktől eltekintve — minden családi állapotban és életkorban (3. ábra).

3. ábra. Várható élettartamok családi állapot szerint 25 és 50 éves korban ( $e_{25}^s$  és  $e_{50}^s$ )

## 2 Házasságtartam

Ebben a fejezetben a házasságból hátralévő tartam várható értékét megadó formulákat dolgozzuk ki különböző „majdani”  $c$  kimenetek esetén. A gondolatmenet hasonlítani fog az 1. fejezetben leírtakhoz. Az analógia ugyanis aközött, hogy ti. várhatólag „meddig él egy (adott korú) ember” és hogy „meddig él egy házasság”, így ragadható meg: Az élő személyek kohorszáának fogyását, azaz a  $l_x, l_{x+m}, l_{x+2m}, \dots$  sorozat csökkenését (ebből számítjuk a várható élettartamot), az egyetlen „kilépési” lehetőség (az élet állapotából) valószínűségei határozzák meg, a halálé. A házaspárok kohorszáának létszámcsökkenését három elemi kilépési lehetőség (a házasság állapotából) valamelyike idézi elő: a férj halála, a feleségé vagy válás. Továbbá tekinthetők az ezekből előállítható összetett okok is, pl. a halál (bármelyik féle) vagy a „bármely okból” történő megszűnés. Az utóbbi matematikai modellje azonos az egyén várható élettartamával (eltekintve attól, hogy itt házaspárok kohorszájától van szó), hiszen a „bármely ok”-on kívül nincs más alternatíva a kilépésre a házasságból, ahogy az életből is egyetlen van. A kilépési okok összetétele így ábrázolható:



Jelölje  $\tau_{x,y}^c$  az  $(x, y)$  korú házaspár (az első szám mindig a férfi kora)  $c$  okból végződő házasságából még hátralévő idő várható értékét. Jelentése pontosan: a  $c$  esemény (pl. a férj halála) bekövetkeztéig eltelt idő – mint valószínűségi változó – várható értéke, *feltéve*, hogy  $c$  következik be legkorábban a lehetséges kimenetek közül. Kivétel, ha  $c =$  „bármely ok”: ekkor a három elemi kimenetel közül a legkorábbi időpontjáig eltelt idő várható értéke.

Az eredmények megértéséhez látni kell, hogy egy összetett kimenetelhez tartozó várható érték mindig kisebb vagy egyenlő, mint az összetevőké. Például egy adott korú házaspár feltételezeten halálesettel végződő házasságából hátralévő várható tartam nem nagyobb, mint a férj (vagy a feleség) halálával végződő házasságból várhatóan hátralévő. Ugyanis az összetett okhoz tartozó várható érték valójában az összetevő események közül mindig a *legkorábbi* bekövetkezésig eltelt idő várható értéke. Ez pedig nem nagyobb, mint az összetevők külön-külön számított várható értékei:

$$E(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)) \leq \min(E(\xi_1), E(\xi_2), \dots, E(\xi_N)) ,$$

következvén az integrál monotonitásából.

A módszertan most is „rövidített” jellegű, a várható tartamok 20, 25, ..., 85 éves házastársakra érvényesek. A közbelső értékek interpolációval előállíthatók. A továbbiakban, ha házasságokról lesz szó, akkor a képletekben a házastársak kora,  $x$  és  $y$  egymástól függetlenül befutja a korintervallumok kezdőpontjait, azaz  $\{20, 25, \dots, 85\}$ -t, ezt külön nem jelöljük.

A megmaradó házasságok várható száma az egyes kohorszokban a kiin-

duló létszámból, mely

$$l_{x,20}^c = l_{20,y}^c = 100000, \quad c \in C = \{v, f, n, h, b\},$$

az életkor növekedésével az alábbi képlet szerint fogy, a  $c$  megszűnési ok – válás, a férj halála, a feleség halála, valamelyikük halála vagy bármely ok – valamelyike miatt:

$$l_{x+m,y+m}^c = l_{x,y}^c(1 - m q_{x,y}^c).$$

A képletbeli  $m q_{x,y}^c$ -nak, azaz a házasság  $c$  okból való megszűnési valószínűségének becslése:

$$m q_{x,y}^c = m \frac{m M_{x,y}^c}{1 + m/2 m M_{x,y}^c},$$

ahol a megszűnési ráta:

$$m M_{x,y}^c = \frac{1}{k} \frac{m D_{x,y}^c/k}{m P_{x,y} + m D_{x,y}^c/2}.$$

Az  $m M_{x,y}^c$ -t előállító formula magyarázata a többszörös kilépésű táblák (multiple decrement tables) elmélete alapján a következő. Feltételezzük a kilépési okok (közel) függetlenségét, valamint a kilépések perióduson belüli egyenletességét. Ekkor például válás ( $c = v$ ) esetén a másik két okból bekövetkezett megszűnések fele esik a válás „elő”, illetve „mögé”, ezért a második nevező:

$$m \tilde{P}_{x,y} - m D_{x,y}^f/2 - m D_{x,y}^n/2,$$

ahol  $m \tilde{P}_{x,y}$  a periódus eleji népesség. Mivel azonban

$$m \tilde{P}_{x,y} = m P_{x,y} + (m D_{x,y}^v + m D_{x,y}^f + m D_{x,y}^n)/2,$$

behelyettesítéssel előáll a formula  $c = v$ -re.

Az összetett kimenetek megszűnési rátája is így áll elő, használva az alábbi azonosságokat:

$$m D_{x,y}^h = m D_{x,y}^f + m D_{x,y}^n, \quad m D_{x,y}^b = m D_{x,y}^v + m D_{x,y}^f.$$

Az  $I_{x,y}^c$  számú  $c \in C$  okból megszűnő  $(x, y)$  korú továbbélő házaspár által megélt házaspárévek várható száma  $m$  év alatt:

$$m L_{x,y}^c = \frac{m}{2} (l_{x,y}^c + l_{x+m,y+m}^c) \quad (x, y = 20, 25, \dots, 80),$$

az utolsó korcsoportokban pedig a következő eljárást követjük. Itt is feltesszük, hogy az utolsó korcsoportokban, azaz  $\max(x, y) = 85$  esetén a kohorszok  $l_{x,y}^c$   $c \in C$  létszáma exponenciális eloszlású, paramétere a korcsoportbeli halálozási ráta,  ${}_{\infty} M_{x,y}^c$ . Ekkor a házaspárévek várható száma az utolsó korcsoportban:

$$m L_{85,y}^c = \frac{l_{85,y}^c}{15 M_{85,y}^c} \quad \text{és} \quad m L_{x,85}^c = \frac{l_{x,85}^c}{15 M_{x,85}^c}.$$

Ezekkel pedig egy  $(x, y)$  korú házaspár  $c$  okból megszűnő házasságának várható hátralévő tartama az előző fejezetben leírtakkal analóg módon:

$$\tau_{x,y}^c = \frac{1}{l_{x,y}^c} \sum_{im=0}^{85-\max(x,y)} m L_{x+im,y+im}^c, \quad (i \in \mathbb{N}), \quad (2)$$

ahol  $m$  az utolsó korcsoport miatt  $i$ -től függ. A fenti képlet azonosan átírható a következő alakba:

$$\tau_{x,y}^c = \sum_{im=0}^{85-\max(x,y)} im P_{x,y}^c \cdot m Q_{x+im,y+im}^c \cdot im, \quad (2')$$

ahol  $im P_{x,y}^c$  annak a valószínűsége, hogy a  $c$  kohorsz  $(x, y)$  korú házaspárának házassága  $im$  éven át fennmarad. Ezt az alakot alkalmazzuk majd a várható túlélés formulájában.

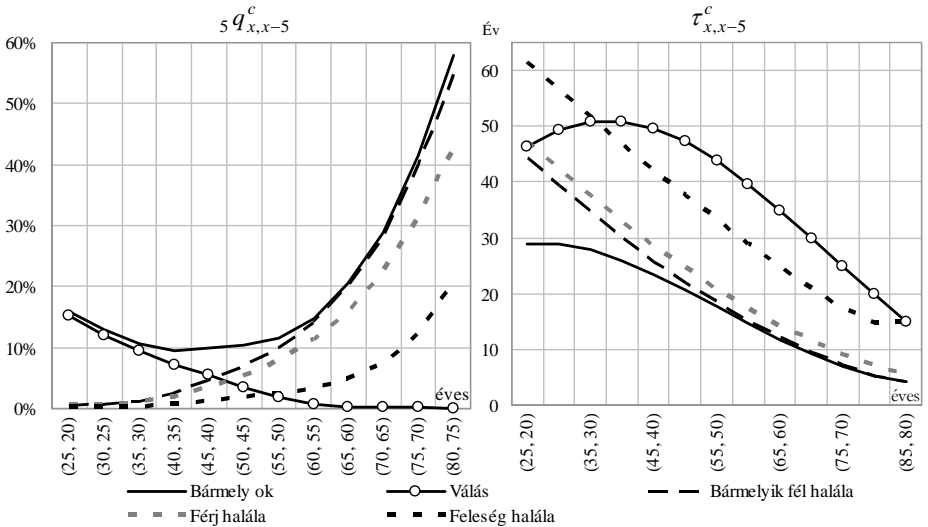
## Eredmények (2000-2001)

A továbbiakban korkülönbségen  $x - y$ -t értjük, tehát pozitív korkülönbség mindig idősebb férjet jelent. A 2. táblázat tartalmazza a házasságok várható hátralévő tartamait, a férj halálát feltételezve. Terjedelmi okok miatt nem közöljük a másik négy kilépési okhoz tartozó táblázatot. A táblázatokon az „idő jobbra lefelé múlik”. A 4. ábra 5 évvel fiatalabb feleség esetén ábrázolja a különböző kimenetek valószínűségeit, illetve az egyes kimenetek esetén a várható tartamokat. A jobb oldali ábrán a „férj halála görbe” a 2. táblázat főátlójával párhuzamos egyenesen elhelyezkedő cellák értékeit tartalmazza. A bal oldali ábra „pillanatnyi”, azaz az adott korhoz tartozó értékeket mutat, a jobb oldali azonban az adott kortól „jobbra” elhelyezkedő kumulált értékeket, melyek épp a bal oldali ábra értékeiből származnak.

- A 2. táblázatbeli, a férj halálára vonatkozó értékek nem sokkal haladják meg – legfeljebb 3 évvel, ha a férj az idősebb –, a bármelyik házastárs halálára vonatkozóakat. A feleség halálára vonatkozó értékek annál jobban: 10–20 évvel. A 4. ábra jobb oldali grafikonja is ezt mutatja speciális esetben, 5 évvel idősebb férjknél. Ez egyszerűen azt a tény jelzi, hogy a férj halála jóval előbb következik be, mint a feleségé, tehát elsődleges a hatása a bármelyik házastárs halálára vonatkozó értékekre (lásd az összetett kimenetek természetével kapcsolatos korábbi megállapítást).
- Hasonlóan, a bármely okból végződő házasságokra vonatkozó értékek nem sokkal térnek el a bármelyik házastárs halálára vonatkozóktól, legalábbis, ha a férj az idősebb, és mindketten legalább 40 évesek: legfeljebb 3 évvel. A válási adatoktól való eltérés ellenben 20 év fölötti. Ez azt jelenti, hogy a hátralévő várható tartamot ebben a tartományban elsődlegesen a „haláleset szabja ki”, a válásnak kicsi a szerepe.

Feleség, éves \ Férj, éves	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
20		50,6	49,0	45,6	42,3									
25		47,3	45,8	44,2	40,6	38,2								
30		43,2	42,5	41,0	39,3	36,0	33,2							
35		39,1	38,4	37,7	36,2	34,6	31,3	28,7						
40			34,4	33,8	33,0	31,6	30,1	26,9	24,5					
45				30,1	29,4	28,6	27,3	26,0	22,8	21,0				
50					26,0	25,2	24,5	23,3	22,0	19,6	18,4			
55						21,9	21,4	20,8	19,6	18,6	16,5	16,0		
60							18,3	18,0	17,3	16,2	15,3	13,9	14,2	
65								15,1	14,9	14,2	13,1	12,7	12,5	14,0
70									12,5	12,0	11,4	10,4	10,4	11,3
75										9,8	9,4	8,9	8,1	8,7
80											7,6	7,3	6,9	6,1
85												5,7	5,4	5,2
														4,1

2. táblázat. A házasság várható hátralévő tartama a házastársak életkora szerint, a férj halálát feltételezve, 2000–2001



4. ábra. A házasság megszűnésének 5 éven belüli valószínűsége és várható hátralévő tartama megszűnési okok szerint, 5 évvel fiatalabb feleség esetén, 2000–2001

A bal oldali ábráról az alábbiak olvashatók le:

- A „bármely ok” görbéje fiatalkorban a válás, később pedig a bármely okból bekövetkező halálozás görbéjével esik szinte egybe, azaz a házasság megszűnését eleinte (fiatal korban) a válások, később a halálesetek okozzák.



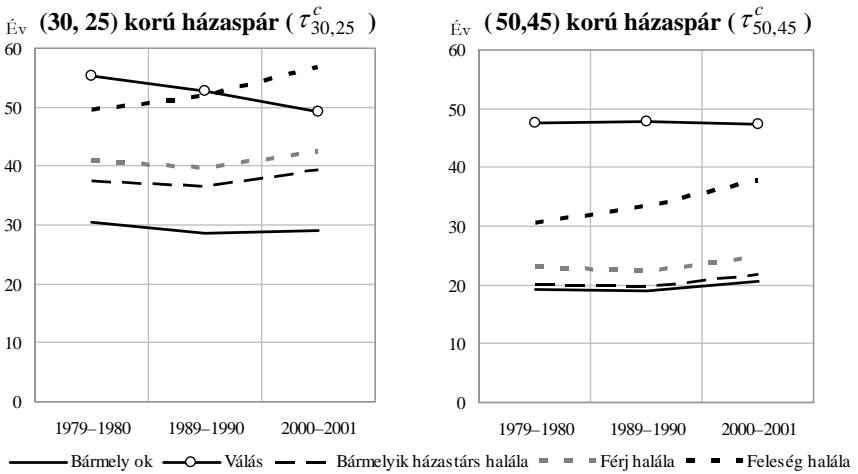
- A teljes kortartományban (5 évvel fiatalabb feleség esetén) 3–3,5-ször nagyobb a valószínűsége annak, hogy a házasság a férj halálával végződik, mint hogy a feleségével.
- A (45, 40) éves kor felett kezdi a halálozás (bármelyik fél) valószínűsége meghaladni a válásét.

A jobb oldali ábrán megfigyelhető, hogy:

- a „bármely ok” görbe hozzásimulása a „halálozás” görbéjéhez azt jelzi, hogy az adott korú házaspárok – későbbi – válásának csekély a valószínűsége.
- A válással végződő házasságok görbéjének kezdeti emelkedése meglepő, hiszen ez azt jelenti, hogy az idősebb pároknak várhatóan több van még hátra a válásig, mint a fiatalabbaknak. Ez azonban a korai válások nagy valószínűségéből egyenesen következik.
- A (85, 80) korú házaspárra válás és a feleség halála esetén a várható hátralévő tartam egyaránt 15 év, ami azt jelzi, hogy e kor fölött nagyon ritkán fordul elő válás vagy a feleség halála (mert nyilván ezeket megelőzi a férjé), és így a házasság eltart a lehetséges maximumig, azaz az idősebbik fél – általunk „adminisztratív” rögzített – 100 éves koráig.

## Idősorok

A 5. ábra görbéi közötti kapcsolat megértését ismét segíti az a megfontolás, hogy az összetett események görbéinek alakját annál jobban befolyásolja egy összetevő görbéje, minél közelebb esik hozzá. Az (50, 45) korú házaspárra vonatkozó görbék közül a legalsó, a „bármely ok”-hoz tartozó például szinte egybeesik a „bármelyik házastárs halála”-hoz tartozóval. Ez azt jelenti, hogy ilyen magas korban a házasság hosszának alakításában a haláleset a főszerep (főleg a férj haláláé).



5. ábra. A házasságok várható hátralévő tartama

Látható, hogy (30, 25) éves korban is a haláleset befolyása a legnagyobb, de a válásnak is jut szerep. Hasonlóan, a „bármelyik házastárs halála” görbe alakját a férj halála görbe jóval erősebben befolyásolja, mint a feleség halála görbe.

– A fiatalkori válások számának az eltelt két évtized alatt bekövetkezett nagymértékű növekedését tükrözi a válással végződő házasságok várható hosszának jelentős csökkenése a (30, 25) évesek körében és stagnálása az (50, 45) korban.

– Ezt azonban 1990 és 2000 között már kompenzálja a halálozások mindkét nemre érvényes javulása: a bármely okból végződő házasságok várható hossza 2000–2001-ben már nagyobb, mint 1999–2000-ben.

Észrevehető egy mélyebb összefüggés az egyének családi állapotától függő várható élettartamai és a házasságtartamok között. Egy adott korú házaspár férfi várható élettartamának kiszámításakor (1. képlet) feltételeztük, hogy családi állapota mindvégig változatlan. Ekkor azonban e tartam meg kell, hogy egyezzen az ő házasságának hátralévő várható tartamával, ha azt az ő (a férj) halálának feltételezésével számítjuk ki. A helyzetet kissé bonyolítja, hogy utóbbit különböző korú feleségek mellett számoltuk ki (2. képlet). Így viszont annak kell teljesülnie, hogy az  $x$  éves házaspár férfi várható hátralévő élettartama megegyezik a különböző  $y$  korú feleségekhez tartozó várható házasságtartamok súlyozott közepével, feltételezve a férj halálát. Ellenőrizhető, hogy ez igaz, ha a súly:

$$s(x, y) = \Pr(\text{a feleség kora } y \mid \text{az } x \text{ éves férj hal meg}),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy egy  $x$  éves férj halála esetén a feleség éppen  $y$  éves.

Valóban, pl. a 1. táblázat „házaspár” oszlopának valamely rögzített  $x$  korhoz tartozó eleme súlyozott közepe a 2. táblázat férj halálára vonatkozó rész megfelelő (az  $x$  korú férjhez tartozó) sorába eső különböző ( $y$  korú feleségekhez tartozó) tartamoknak. (Annak, hogy ez láthatóan nem mindig teljesül pontosan, az az oka, hogy az egyének és a párok halálozási valószínűségeinek becslési formulája – a rátákból – nem teljesen kompatibilis ebből a szempontból.)

### 3 Túlélés

Ebben a fejezetben az  $(x, y)$  korú házaspárok valamelyik tagjának várható hátralévő élettartamát, továbbá ennek a házasságon túli részét, azaz a házasság után várható élettartamot vizsgáljuk, feltételezve a házasság valamilyen okból történő megszűnését. Ennek megfelelően a (majdani) özvegy vagy elvált férfi és nő várható élettartamát ( $e_{x,y}^s$ ), illetve túlélési tartamát ( $\delta_{x,y}^s$ ) számítottuk ki, ahol  $s$  a most felsorolt, a házasságot követő négy állapot valamelyikét jelöli. Nem állítottuk elő az összetett megszűnési okokhoz tartozó értékeket, hiszen nem értelmezhető például a bármelyik házastárs halálával

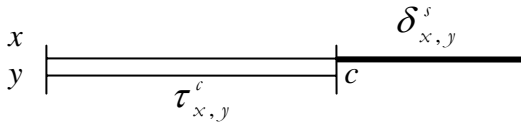
(nem tudni, melyik melyikükével) végződő házasság túlélőjének (a másik félnek) a várható túlélési élettartama.

A teljes hátralévő élettartam definíció szerint:  $e_{x,y}^s = \tau_{x,y}^s + \delta_{x,y}^s$ , ahol  $s$  és  $c$  értelemszerűen összetartozó értékek. Például, ha  $c =$  „férj halála”, akkor a hozzátartozó  $s =$  „özvegy nő” stb. Ekkor tehát az  $x$  éves férjjel élő  $y$  éves feleség özvegyesség esetén várható élettartama egyenlő a házasság férj halála esetén várható hátralévő tartamának és a feleség özvegyen várható túlélési tartamának összegével.

A továbbiakban is:  $x$  és  $y$  egymástól függetlenül befutja a korintervallumok kezdőpontjait,  $\{20, \dots, 85\}$ -t.

**3.a** Egy  $(x, y)$  korú házaspár  $s$  állapotú túlélőjének a házasság megszűnése után várható élettartama, feltéve, hogy élete végéig megmarad az  $s$  állapotban

A következő séma az  $(x, y)$  korú házaspár  $c$  okból megszűnt házasságát és annak  $s$  állapotú túlélését szemlélteti. A túlélés várható tartamát, azaz a vastag vonallal jelzett tartam várható hosszát a (3) képlet állítja elő.



A képletben szereplő, a házasság megszűnésének okát kódoló  $c$  értelemszerűen tartozik  $s$ -hez az alábbi hozzárendelés szerint:

$s$	$\rightarrow$	$c$
elvált férfi		válás
özvegy férfi		feleség halála
elvált nő		válás
özvegy nő		férj halála

Ekkor az  $s$  állapotú túlélő (özvegy vagy elvált férfi vagy nő) várható túlélési tartama, amely a  $c$  ok miatt végződő házasságot követi:

$$\delta_{x,y}^s = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_{x,y}^c \cdot {}_m q_{x+t,y+t}^c \cdot e_{z+t+m/2}^s, \quad (t = im) \tag{3}$$

ahol  ${}_t p_{x,y}^c$  annak a valószínűsége, hogy a házasság  $t$  éven át fennmarad, továbbá ahol a  $z$  index függvénye  $s$ -nek:  $z = x$  vagy  $z = y$  aszerint, hogy  $s$  férfira vagy nőre utal, rendre (pl.  $s = of$  esetén  $z = x$ ).

A (3) hibrid formulában (mely a teljes várható érték tétele) egymás mellett szerepelnek az egyénekre és a házaspárokra vonatkozó – az előző két fejezetben definiált – fogalmak jelei. A  ${}_t p_{x,y}^c \cdot {}_m q_{x+t,y+t}^c$  súly annak a valószínűsége, hogy a házasság  $t = im$  éven át fennmarad, majd  $m$  éven belül megszűnik  $c$  okból. Ebből már következik, hogy a súlyok összege 1. A harmadik tényező,  $e_{z+t+m/2}^s$  a házaspár egyik – a megszűnés pillanatában átlagosan  $z+t+m/2$  korú – tagjának az ettől a pillanattól számított várható

hátralévő élettartamát jelenti – azt végig az  $s$  állapotban eltöltve. Ezt a tényezőt 85 éves korig a családi állapottól függő halandósági táblákban már kiszámítottuk, a  ${}_m q_{x,y}^c$  megszűnési valószínűségeket pedig a házasságtartam számítása során előállítottuk.

A magas életkorokra vonatkozó kis esetszámok miatt 85 év fölött most is exponenciális modellt alkalmazunk. Így a (3) képlet finomításra szorul, a benne szereplő szumma két részre esik szét. Amíg 85 év alatt  $m = 5$ , addig fölötté  $m = 1$  korévenként számolunk. Egyben pótoljuk a  ${}_i p_{x,y}^c$ -t előállító formulákat is.

Legyen a férj, illetve a feleség kora  $x$  és  $y$  egyaránt 5-tel osztható. Egy  $\tau$  idő elteltével az idősebbik eléri a 85 éves kort, ekkor a korukat jelölje  $\tilde{x}$  és  $\tilde{y}$ , azaz  $\tilde{x} = x + \tau$ ,  $\tilde{y} = y + \tau$  és  $\max(\tilde{x}, \tilde{y}) = 85$ . Ha  $t$  is 5-tel osztható,  $\tilde{t}$  egész, akkor

$$\delta_{x,y}^s = \frac{1}{l_{x,y}^c} \left( \sum_{\substack{t \geq 0 \\ x+t, y+t \leq 80}} l_{x+t, y+t}^c \cdot 5q_{x+t, y+t}^c \cdot e_{x+t+5/2}^s + \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} l_{\tilde{x}+\tilde{t}, \tilde{y}+\tilde{t}}^c \cdot 1q_{\tilde{x}+\tilde{t}, \tilde{y}+\tilde{t}}^c \cdot e_{\tilde{z}+\tilde{t}}^s \right), \quad (3')$$

ahol  $l_{x,y}^c = 100000$ , ha  $\min(x, y) = 20$ , azaz ha a fiatalabbik 20 éves. (A képletbeli  $t$  megfelel a (2')-beli  $im$ -nek.) Ha pedig  $\min(x, y) > 20$ , akkor

$$l_{x+5, y+5}^c = l_{x,y}^c (1 - 5q_{x,y}^c),$$

ha  $z \leq 80$ , különben pedig

$$l_{\tilde{x}+\tilde{t}, \tilde{y}+\tilde{t}}^c = l_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c \exp(-15M_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c \tilde{t}) \quad 1q_{\tilde{x}+\tilde{t}, \tilde{y}+\tilde{t}}^c = 1 - \exp(-15M_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c \tilde{t}) \quad \tilde{t} \geq 0.$$

A túlélő „egyszemélyes” folyamatát továbbra is exponenciálisnak feltételezzük 85 év fölött, így:  $e_{x+t}^s \equiv 1/15M_{85}^s$ . (Tehát nem függ a kortól, megfelelve az exponenciális folyamat „örökifjú” jelzőjének.) Valójában 5-tel osztható indexekre számoltuk ki, a szükséges  $e_{x+t+5/2}^s$  értékeket  $(e_{x+t}^s + e_{x+t+5}^s)/2$ -vel közelítjük.

Észrevehető, hogy a (3') formula  $e_{x+t+5/2}^s$  ill.  $e_{\tilde{z}+\tilde{t}}^s$  súlyozott közepeit számítja ki, ahol a súlyok a házasság  $c$  okú megszűnésének valószínűségei  $t$  idő elteltével. Valóban, hiszen a fenti képleteket az alábbi szummákba helyettesítve előáll

$$\sum_{\substack{t \geq 0 \\ x+t, y+t \leq 85}} l_{x+t, y+t}^c \cdot 5q_{x+t, y+t}^c / l_{x,y}^c = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} l_{\tilde{x}+\tilde{t}, \tilde{y}+\tilde{t}}^c \cdot 1q_{\tilde{x}+\tilde{t}, \tilde{y}+\tilde{t}}^c / l_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c = 1,$$

mivel az első egyenlőség közvetlenül adódik, a második szummából pedig ez lesz:

$$(1 - \exp(-15M_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c)) \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} \exp(-15M_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c \tilde{t}),$$

amely egy 1 összegű mértani sor. Az (3') képlet második szummája átírható így is:

$$\frac{l_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c}{l_{x,y}^c} (1 - \exp(-15M_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c)) \sum_{\tilde{t}=0}^{\infty} \exp(-15M_{\tilde{x}, \tilde{y}}^c \tilde{t}) e_{\tilde{z}+\tilde{t}}^s.$$

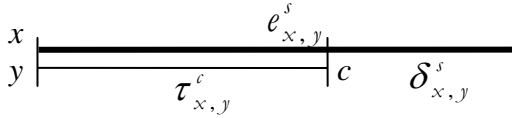
Ha a túlélő az idősebb, vagy azonos korúak, akkor  $e_{\tilde{z}+\tilde{t}}^s$  nem függ  $\tilde{t}$ -től, hisz  $\tilde{z} + \tilde{t} \geq 85$ . Kiemelve őt a szummából, ezt kapjuk:

$$\frac{l_{\tilde{x},\tilde{y}}^c}{l_{x,y}^c} \frac{1}{15 M_{85}^s}.$$

Ha a túlélő a fiatalabb, akkor  $e_{\tilde{z}+\tilde{t}}^s - t$   $\tilde{z}$  és 84 között minden korévre ki kell számolni. Ezeket lineáris interpolációval közelítjük 5-tel osztható indexű szomszédaiából: ha  $w' \leq w \leq w''$ , akkor

$$e_w^s = ((w'' - w)e_{w'}^s + (w - w')e_{w''}^s)/5.$$

3.b Egy  $(x, y)$  korú házaspár  $s$  állapotú túlélőjének a várható teljes élettartama (beleértve a házasságban eltöltöttet is) feltéve, hogy élete végéig megmarad az  $s$  állapotban



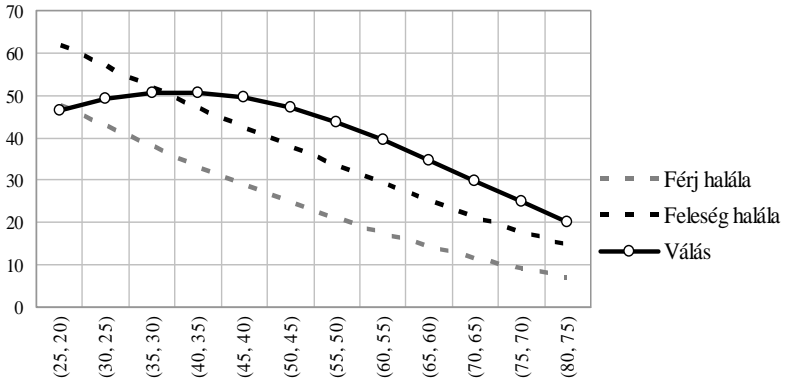
Amint azt a séma mutatja, az  $(x, y)$  korú házaspár  $c$  okból végződő házasságának  $s$  állapotú túlélője

$$e_{x,y}^s = \tau_{x,y}^c + \delta_{x,y}^s \tag{4}$$

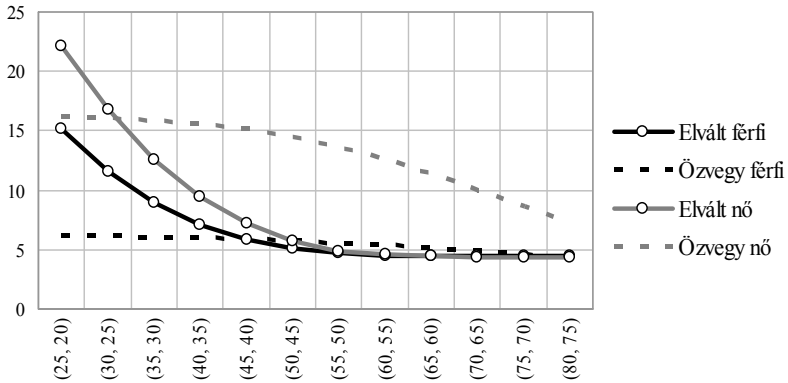
várható teljes hátralévő élettartammal rendelkeznek, mely a házasságból várhatóan hátralévő tartam és a várható túlélési tartam összege, ahol  $s$  és  $c$  a 3.a-ban már ismertetett módon felelnek meg egymásnak.

## Eredmények (2000–2001)

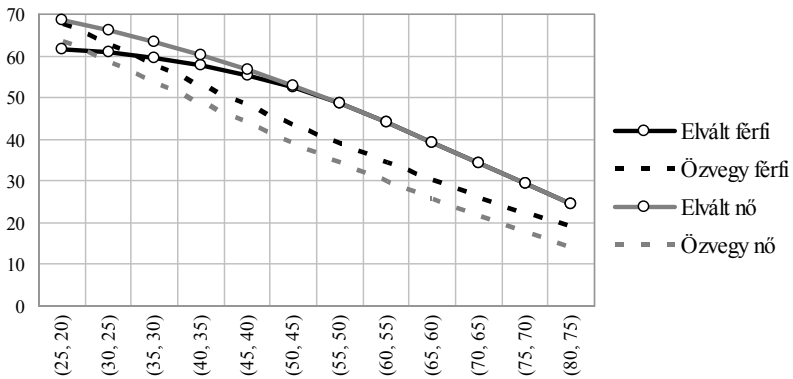
A 6. ábra a tipikus +5 év korkülönbség mellett mutatja a számított értékeket. Az ábrán a harmadik grafikon görbéi az első két grafikon megfelelő görbéinek (függvény-) összegeként állnak elő. A megfelelést a görbék azonos mintázata jelzi. Például: férj halála – özvegy nő; vagy: elvált férfi, illetve elvált nő – válás.



6a. ábra. A házasság várható hátralévő tartama 5 évvel idősebb férj esetén ( $\tau_{x,x-5}^s$ )



6b. ábra. A várható túlélési tartam 5 évvel idősebb férj esetén ( $\delta_{x,x-5}^s$ )



6c. ábra. A teljes várható élettartam 5 évvel idősebb férj esetén ( $e_{x,x-5}^s$ )

Az 6. ábrából levonható következtetések például:

- özvegy nő: egy rövid várható házasság-tartamot (első ábra: férj halála) követő hosszú várható özvegyiség (második ábra: özvegy nő) = rövid várható összelettartam (harmadik ábra: özvegy nő), tehát a házasság-tartam dominál;
- válás (mindkét nemre): hosszú várható házasság-tartamot követő rövid várható túlélés = hosszú várható összelettartam;
- özvegy férfi: közepesen hosszú várható házasság után rövid várható özvegyiség = eléggé rövid várható élettartam.
- A teljes várható élettartam hosszát általában a házasság várható tartama (rövid, közepes, hosszú) határozza meg, a görbék közti (év-) távolságok a várható hátralevő tartam ábrán sokkal nagyobbak, mint a várható túlélési tartam ábrán. Ezt jelzi az is, hogy a majdan özvegyvé váló férfiak teljes várható élettartama hosszabb, mint 5 évvel fiatalabb feleségeiké, ha ők lesznek özvegyek (az ábra alsó két görbéje között közelítőleg állandó 5 év a különbség). Ugyanis özvegy férfi esetén először a feleség hal meg – sokkal később, mint a fordított esetben a férj (lásd a házasság várható hátralevő tartama görbéket). Ezt a különbséget a feleség hosszabb özvegyi élete már nem tudja kompenzálni.
- Érdekes, hogy (55, 50) kor fölött a két elvált házaspár túlélési görbéje (és így az összelettartam görbéje is) szinte egybeesik. Ez azonban csak az 5 év korkülönbségű párokra teljesül.

Összességében megállapíthatjuk, hogy az egyes ábrákon belül a görbék összevetése óvatosságot igényel. Egyes túlélési értékek azért – is – rövidek, mert hosszú házasságot követnek (az elváltaké, főleg a nőké), ami után már nincs mód sokáig élni. Vagy például az özvegy nők hiába élnek túl sokkal a házasságot, ha ez utóbbi olyan rövid, hogy az összelettartamuk végül is rövid lesz.

## A továbblépés lehetőségei

Az elvégzett vizsgálat a probléma egy első közelítésének tekinthető. A számítások részletezettségének és az alapul szolgáló matematikai-statisztikai modell mélységének növelése egyaránt indokolt.

Érdemes lenne az ötéves korcsoportokat korévesre sűríteni: jelenleg például a  $\langle 40, 35, 5 \rangle$  korcsoportba beletartozik a 44 éves férfiből és 35 éves nőből álló – 9 év korkülönbségű – pár is.

A házasságtartamra és a túlélésre szolgáló modell jelenleg nem veszi figyelembe a házaspár „mögött álló” házaspáréveket, amelyek pedig bizonyára erősen befolyásolják az eredményeket. Jelenleg e hatások kiátlagolódnak. Ha a teljes múltat, azaz a korábban betöltött állapotokat nem is (lásd a Bevezetést), de az elmúlt házaspáréveket figyelembe lehetne venni.

Számítani kell azonban arra, hogy e változtatások hatására az eredmények mennyisége körülbelül 2000-szeresére ( $5 \times 80 \times 80$ ) növekszik, ami azt jelenti, hogy azok kiértékelése is számítógépet igényel. Ennek azonban semmi akadálya, hiszen az eredmények olyan adatbázisba rendezhetők, amelynek oszlopai: a férfi kora, a nő kora, az eltelt tartam és a várható tartam. A rekordok száma egy rögzített periódusban 512000 ( $80 \times 80 \times 80$ ), amely manapság már kezelhető méret.

## Összefoglalás

Mennyi ideig él még várhatóan egy adott populációhoz tartozó személy, ha ismert a kora:  $x$ ? A válasz: az  $e_x$  várható élettartam rögzített nem esetén egy egydimenziós táblázatból olvasható ki. Természetesen vetődik fel az analóg kérdés: mennyi ideig „él” még egy házasság, ha ismert a házaspár  $(x, y)$  kora. Az ismertetett számítási módszerrel zárt alakban előállítottuk a választ tartalmazó  $\tau_{x,y}$  kétdimenziós táblázat formuláit. Megadtuk e táblázat különböző megszűnési okokhoz (válás, egyik vagy másik, vagy bármelyik fél halála) tartozó változatait is. Végül kiszámítottuk a „most”  $(x, y)$  korú házaspár tagjainak a házasság után (elvált vagy özvegy állapotban) várható élettartamát. Ebből egy összegzéssel (házasság+túlélés) automatikusan előállnak a házaspár várható teljes hátralévő élettartamait tartalmazó – az egyes megszűnési okokhoz tartozó – táblázatok is. A házasságból hátralévő várható tartam és a házasságot követő várható élettartam, mindkét házaspár korának függvényeként, nemcsak fogalmilag, illetve matematikai formuláiban analóg a klasszikus „egyszemélyes” várható élettartammal, hanem fontosságában is. Kiszámítása hasznos és izgalmas következtetésekre ad alkalmat.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Radnóti Lászlónak a módszertani konzultációkért, valamint az anonim lektoroknak a gondolatébresztő bírálatért.

## Irodalom

1. Chiang, L. C. (1968) *Introduction to Stochastic Process in Biostatistics*. Wiley. New York.
2. Faragó Miklós (2011) Paritásfüggő összetett termékenységi mutatók Magyarországon és különbségeik dekompozíciója, *Közgazdasági Szemle*, 58. évf. 11. sz. 970–993. o.
3. Keyfitz, N. and Caswell, H. (2005). *Applied Mathematical Demography. Statistics for Biology and Health*. Springer, third edition.
4. Radnóti László (2003) Az élettartamok statisztikája, *Statisztikai Szemle*, 81. évf. 7. sz. 559–570.
5. Willekens, F. J., Shah, I., Shah, J. M. and Ramachandran, P. (1982) *Multi-state analysis of marital status life tables: theory and application*. Pop. Studies 36, 129.



EXPECTED DURATION OF MARRIAGE AND OF POST-MARITAL  
SURVIVAL

What is the expected remaining time of a marriage, if the ages of the spouses are given? By how many years will one of them survive the other, provided being widowed someday? Or what are their life expectations after the divorce? The expected remaining time of marriage or the life expectancies after cessations of marriage, to the authors knowledge, have not yet been studied as two-variable functions. In this paper, we develop formulas for these values as functions the ages of the two spouses, with respect to the various causes of cessation. Our results are analysed on the data of the Hungarian population for four decades retrospectively.



# A MÉRÉSI BIZONYTALANSÁG KOCKÁZAT ALAPÚ KEZELÉSE MEGFELELŐSÉGI DÖNTÉSEKBE IPARI KÖRÜLMÉNYEK KÖZÖTT<sup>1</sup>

KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR – HEGEDŰS CSABA

*Pannon Egyetem*

A mérési bizonytalanság figyelembevétele a különböző vizsgáló és tanúsító laboratóriumokban a napi rutin része. Tanulmányunkban rávilágítunk, hogy ipari körülmények között (állapotfüggő karbantartás, átvételi vagy gyártás-közi megfelelés-ellenőrzés esetén) is fontos lehet a mérési bizonytalanság kezelésének beépítése a megfelelési döntésekbe, ha nagy ez a bizonytalanság, vagy nagy veszteséget okozhatnak a hibás döntések. Azonban az eddigi ajánlásokkal és gyakorlattal szemben nem megbízhatóság alapon, hanem kockázat alapon kezeljük bizonytalanságot. Létrehoztunk egy olyan módszert, amely a döntési kimenetekhez tartozó költségek és bevételek valamint a folyamat-jellemzők alapján megadja az optimális elfogadási határt. Bemutatjuk, hogy módszerünk alapján az optimális elfogadási határ analitikus számításokkal és szimulációkkal is meghatározható.

## 1 Bevezetés

A mérési eredmény bizonytalanságának meghatározásával és ennek a bizonytalanságnak a figyelembevételével leginkább a vizsgáló és tanúsító laboratóriumok foglalkoznak a mai napig. Azonban a Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement [1] (röviden: GUM) ajánlás létrehozásával elkezdődött egy szemléletváltás, melynek köszönhetően az ipari folyamatok során hozott döntésekben is szerepet kapott a mérési bizonytalanság ismerete és figyelembevétele. A mérési bizonytalanság figyelembevétele fontos minden nagy kockázattal járó, mérésre alapozott döntés meghozatalában, tehát nem csak akkor, ha nagy a mérési bizonytalanság, hanem akkor is, amikor a hibás döntés okozta veszteségek jelentősek.

A bizonytalanságot többféleképpen értelmezhetjük [2-4] a fuzzy-halmazokra épülő, illetve a valószínűségelméleti a két leginkább elterjedt megközelítés. Habár a mérési bizonytalanság kifejezhető fuzzy-logikai megközelítéssel is [5-10] ahol a mérési eredmények szóródását a tagsági függvényekkel jellemezhetjük, mi a két megközelítés közül a valószínűségelméletit alkalmazzuk a továbbiakban.

A GUM-ban leírt módszer alapján a mérési bizonytalanság kétféleképpen jellemezhető: Jellemezhető eloszlásként a szórás nagyságával kifejezve (stan-

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2011. február 9. E-mail: [hegeduscs@gtk.uni-pannon.hu](mailto:hegeduscs@gtk.uni-pannon.hu).

dard bizonytalanság<sup>2</sup> – standard uncertainty). Ha több tényezőtől adódik a bizonytalanság eloszlása, akkor eredő standard bizonytalanságnak (combined standard uncertainty) nevezzük. Valamint megadható intervallumként (kiterjesztett bizonytalanság – expanded uncertainty), mely intervallum sugarát a szórás (illetve a szórással jellemzett eredő standard bizonytalanság) és egy  $k$  kiterjesztési tényező szorzataként kapjuk.

## 2 A mérési bizonytalanság kezelése döntésekben

A GUM [1] által javasolt és a szabványokba, ajánlásokba [11-17] átemelt kiterjesztett bizonytalanság és a gyakorlatban használt  $k = 2$  kiterjesztési tényező érték csak abban az esetben eredményez 95,45%-os megbízhatósági szintet, ha az eredő bizonytalanság normális eloszlást követ [18,19], ettől eltérő esetben alá vagy fölé becsülhetjük a megbízhatósági szintet. Ezért szükséges a bizonytalanságot valószínűségi eloszlásként kezelni nem csak a mérési eredmények szórását, illetve annak kiterjesztését tekinteni a mérési eredményekre alapozott döntéseknél, valamint a döntések következményét is figyelembe venni, kockázat alapon dönteni [20,21].

Pendrill [22] a célnak való megfelelés (fitness for purpose) alapfogalmát terjesztette ki a mérési bizonytalanság kezelésére, mely kiterjesztés szerint meg kell találni az egyensúlyt a mérési költségek és hibás döntések kockázata között. Pendrilla a mérésügy joghatással járó mérések (legal metrology) területére korlátozta az elemzést; a vizsgálat, a vizsgálati eredmény maximálisan megengedhető bizonytalanságával foglalkozott, nem pedig azzal, hogy ismert bizonytalanságú mérés esetén milyen döntési szabályt alkossunk egy termék vagy folyamat megfelelőségéről.

Forbes [23] a megfelelőség értékelést már Bayes-döntésként kezelte, a cselekvéseket kiegészítette az újraméréssel és így határozta meg a mérési eredményhez kapcsolódó legkisebb költségű cselekvési változatot. Azonban a költségeknél nem számolt a helyes döntések költségével, így a gyakorlatban elérhető optimumtól eltérő eredményeket kapott.

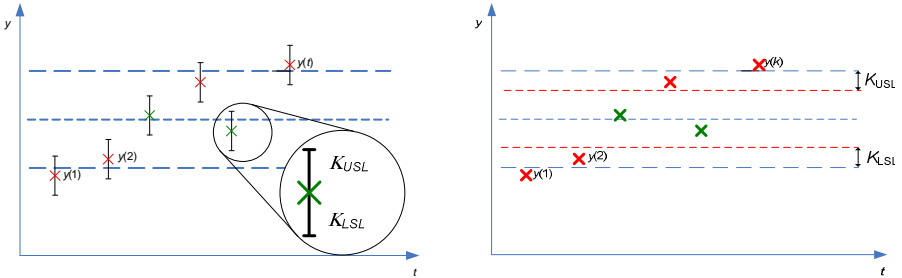
## 3 A mérési bizonytalanság kockázat szempontú kezelése

Olyan módszert dolgoztunk ki, amelyben a korábbi megközelítésekkel [1,11-17,22,23] szemben a tényleges érték és a mérési bizonytalanság eloszlása nem feltétlenül szimmetrikus, ezért két külön intervallumot határozunk meg a mérési eredményhez illesztve. Ezek az új intervallumok már nem a szórás

---

<sup>2</sup>a Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement az Országos Mérésügyi Hivatal által készített hiteles fordítása alapján a „standard bizonytalanság egy mérés eredményének bizonytalansága szórásként kifejezve” és a „kiterjesztett bizonytalanság a mérési eredmény körüli olyan tartományt meghatározó mennyiség, amelytől elvárható, hogy a mérendő mennyiségnek ésszerűen tulajdonítható értékek eloszlásának egy nagy hányadát magába foglalja”

többszöröseként számíthatók, hanem a döntési hibák következményeinek és bekövetkezési valószínűségének függvényében. Tehát a mért értékhez egy  $K_{LSL}$  alsó és  $K_{USL}$  felső intervallum adódik, melyek hosszát úgy határozzuk meg, hogy a döntés kockázata minimális legyen (1. ábra). Így tulajdonképpen a mérési pontok helyett intervallumot vizsgálunk a határok között, ami ekvivalens megoldás azzal, hogy ezekkel az intervallumokkal szűkítjük a határokat.



1. ábra. Megfelelőség értékelése, ha a mérési pontok helyett intervallumokat alkalmazunk (bal oldal), illetve az ezzel ekvivalens megoldás, a határok módosítása az intervallumok nagyságával (jobb oldal)

Feltételezzük, hogy ismert az  $x$  vizsgált jellemző tényleges értékének eloszlása (az eloszlás típusa és paraméterei) a korábbi mérésekből, és az  $m$  mérési hiba eloszlása, a mérőműszer kalibrálási jegyzőkönyvből. A folyamat, berendezés, vagy termék megfelelőségéről a kettő összegeként megjelenő  $y = x + m$  mért érték alapján döntünk. Akkor tekintjük megfelelőnek a folyamatot, ha a vizsgált jellemző egy alsó  $LSL$  (Lower Specification Limit) és felső  $USL$  (Upper Specification Limit) specifikációs határ közé esik,  $LSL \leq y \leq USL$ . Abban az esetben, ha csak egyoldali specifikációs határunk van, akkor a főlösleges határ elhagyható a modellből. Ténylegesen csak akkor megfelelő a vizsgált jellemző, ha tényleges  $x$  értéke esik a specifikációs határok közé,  $LSL \leq x \leq USL$ .

A mérési hiba miatt a négy esetet különböztetünk meg a tényleges megfelelőség és a meghozott döntés kombinációjaként (1. táblázat). Ha nincs beavatkozásra szükség, de a mért érték ennek ellenkezőjét mutatja, akkor főlöslegesen avatkozunk be, elsőfajú hibát vétünk. Ha a vizsgált jellemző valójában nem megfelelő, de ezt a mérési hiba miatt nem vesszük észre, és elfogadjuk (azaz nem avatkozunk be) akkor másodfajú hibát vétünk. Döntésünk akkor helyes, ha a nem megfelelő folyamatba avatkozunk be vagy hagyjuk tovább futni a jó folyamatot.

Fedezet	Döntés	
	Nem történt karbantartás/ beavatkozás (1)	Karbantartás/beavatkozás történt (0)
Tény: Nem szükséges karbantartás/beavatkozás (1)	$\pi_{11} = r_{11} - c_{11}$ Helyes elfogadás	$\pi_{10} = r_{10} - c_{10}$ Felelőleges beavatkozás
Tény: Karbantartás / beavatkozás szükséges (0)	$\pi_{01} = r_{01} - c_{01}$ Helytelen elfogadás	$\pi_{00} = r_{00} - c_{00}$ Helyes beavatkozás

1. táblázat. Fedezetek alakulása a döntés és a tényállapot függvényében

A négy esethez  $c_{ij}$  költségeket rendelhetünk, melyek a mérések elvégzésétől, a termék és szolgáltatás létrehozásából és a meghozott döntés alapján végrehajtott cselekvésektől függenek. Azért, hogy az alternatívák választásakor elmaradt hasznokkal is számolni tudjunk a  $c_{ij}$  költségek mellett, az egyes esetek  $r_{ij}$  bevételeit is számba vettük. Így a bevételek és költségek különbségeként megjelenő  $\pi_{ij} = r_{ij} - c_{ij}$  fedezettel számolunk. Nem feltétlenül lesz a négy esetre négy különböző költségünk. Az előállítás és a mérés költsége minden esetben jelen van, hisz ez megelőzi a döntést. A selejtezés vagy a további felhasználás, értékesítés költsége már a döntés következménye. A bevételeket is figyelembe véve a fedezetek már valószínűleg mind a négy esetben különböznek, bár ez nem feltétele a módszerünknek. Ahogy azt majd a későbbiekben bemutatjuk, az adott tényállapothoz tartozó helyes és helytelen cselekvésekhez tartozó kimenetek fedezetkülönbsége, illetve ezek aránya lesz az optimális döntési szabály kialakításánál mérvadó.

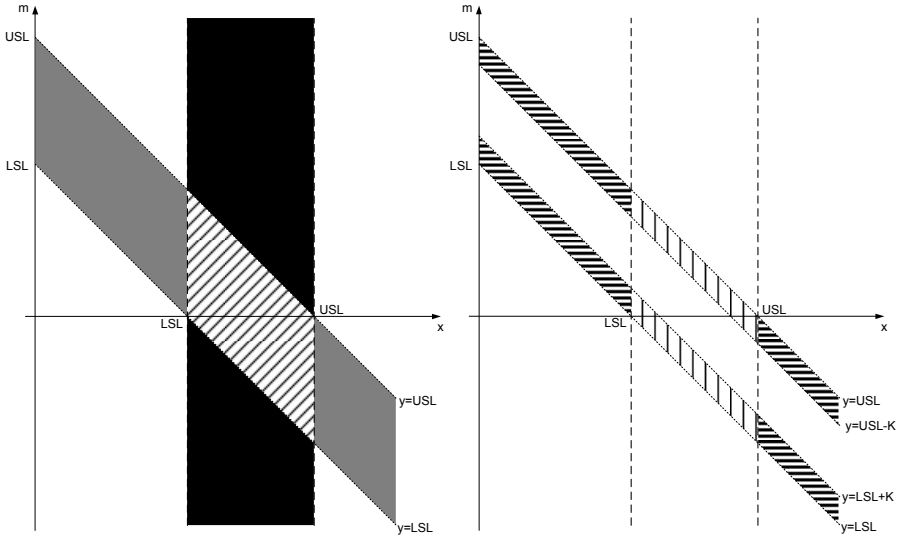
Legyen az  $x$  tényleges érték eloszlásának sűrűségfüggvénye  $f(x)$ , az  $m$  mérési hibáé pedig  $g(m)$ . Tegyük fel, hogy a két eloszlás egymástól független, így az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye a kettő szorzataként kapható. Mivel független a mérési hiba a tényleges értéktől, ezért ábrázolhatjuk őket egy derékszögű koordinátarendszer két tengelyén (lásd 2. ábra). A koordinátarendszer pontjai pedig a lehetséges mérési eredmények. Azonos mérési eredmény több (elméletileg végtelen sok) tényleges érték – mérési hiba párosításból is származhat, így az azonos  $y$  mért értékek egy -1 meredekségű egyenesen helyezkednek el. Amikor előírt (specifikációs) határokat adunk meg azokat a tényleges  $x$  értékre vonatkoztatjuk, de ellenőrzéskor csak az  $y$  mért értékek állnak rendelkezésünkre. Ennek megfelelően az  $x = LSL$  és  $x = USL$  határok függőleges egyenesként, míg az  $y = LSL$  és  $y = USL$  határok -1 meredekségű egyenesekként jelennek meg.

A 2. ábra bal oldalán az 1. táblázatban bemutatott négy eset látható: a sraffozott paralelogramma a helyes elfogadás esete, az  $y$  és az  $x$  érték is a specifikációs határok között van. A szürke területek ( $LSL \leq y \leq USL$  és  $x \leq LSL$  vagy  $USL \leq x$ ) a másodfajú hiba eseteit fedik le, a fekete részekkel pedig az elsőfajú hibát jelöltük. A negyedik eset a színezetlenül maradt területekhez tartozó helyes beavatkozás esete.

A fedezet változtatásához az elfogadási/beavatkozási döntéseket kell módosítani. Legyen  $K_L$  az alsó és  $K_U$  a felső határhoz tartozó módosítás mértéke. A  $K_L$  és  $K_U$  korrekciós tagok pozitív értéke az elfogadási határok szűkítését, a negatív értéke pedig a határok tágítását, lazítását jelenti. Ha az egyes esetekhez tartozó fedezeteket súlyozzuk az esetek bekövetkezési valószínűségével, a fedezetmaximalizáló célfüggvény az alábbi módon írható fel:

$$\Pi(K_L, K_U) = \Pi(0) + \Delta\Pi(K_L, K_U) \rightarrow \max . \quad (1)$$

A  $\Pi(0)$  a korrekció nélküli ( $K_L = K_U = 0$ ) várható fedezet,  $\Delta\Pi(K_L, K_U)$  pedig a  $K_L$  és  $K_U$  korrekciós tagoktól függő változás ebben a várható fedezetben. Itt tulajdonképpen egy kockázat jellegű értéket kapunk, hiszen valószínűséget szorzunk a következmény pénzben kifejezett értékével, de a kockázat negatív kicsengése miatt a várható fedezet elnevezést használjuk.

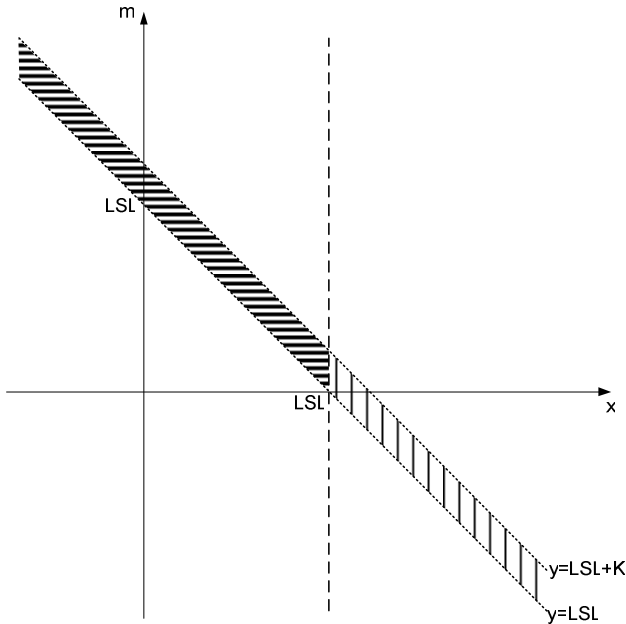


2. ábra. A döntések kimenetelének 4 esete (bal oldalon) és a határok módosítása által érintett területek (jobb oldalon)

A várható fedezet maximalizálásához elegendő a  $\Delta\Pi(K_L, K_U)$  várható fedezetváltozás maximalizálása, mely a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned}
 \Delta\Pi(K_L, K_U) = & \\
 = & (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{USL} \left( \int_{LSL-x}^{LSL+K_L-x} f(x)g(m) dm + \int_{USL-K_U-x}^{USL-x} f(x)g(m) dm \right) dx + \\
 & + (\pi_{10} - \pi_{11}) \int_{LSL}^{USL} \left( \int_{LSL-x}^{LSL+K_L-x} f(x)g(m) dm + \int_{USL-K_U-x}^{USL-x} f(x)g(m) dm \right) dx + \\
 & + (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{USL}^{+\infty} \left( \int_{LSL-x}^{LSL+K_L-x} f(x)g(m) dm + \int_{USL-K_U-x}^{USL-x} f(x)g(m) dm \right) dx \rightarrow \max .
 \end{aligned} \tag{2}$$

Abban az esetben, amikor vizsgált karakterisztika eltolódik, elegendő azt a specifikációs határt figyelembe venni, amelyik felé az eltolódott folyamat tart. Állapotfüggő karbantartás esetén jellemző, hogy a kopás, anyagfáradás vagy valamilyen degradáció miatt trend jelenik meg a vizsgált karakterisztika lefutásában. Illetve előfordulhat, hogy a csak egy minimum vagy maximum értéket írnak elő, amit nem léphet át a folyamatjellemző, ekkor értelemszerűen csak ezt az egy határt kell figyelembe venni a döntés során. Csak alsó határ létezése esetén az általunk vizsgált tartományok az ábrán látható módon változnak (3. ábra).



3. ábra. A  $\Delta\Pi(K)$  által érintett területek, ha csak egy alsó előírt határ van

Az  $y = LSL + K$  egyenes fölött elhelyezkedő pontok mind az elfogadási tartományba tartoznak, de csak az  $x = LSL$  függőleges egyenestől jobbra eső pontok a ténylegesen megfelelőek. Ugyanígy az  $y = LSL + K$  egyenes alatti pontok esetében elvégezzük a karbantartást, de csak a  $x < LSL$  esetben volna ez szükséges. A várható fedezetváltozás egyenlete az alábbi módon fog kinézni:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi(K) = & (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} \int_{LSL-x}^{LSL+K-x} f(x)g(m) dm dx + \\ & + (\pi_{10} - \pi_{11}) \int_{LSL}^{+\infty} \int_{LSL-x}^{LSL+K-x} f(x)g(m) dm dx \rightarrow \max \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Pi(K) = & (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} f(x)(G(LSL + K - x) - G(LSL - x)) dx - \\ & - (\pi_{11} - \pi_{10}) \int_{LSL}^{+\infty} f(x)(G(LSL + K - x) - G(LSL - x)) dx, \end{aligned} \quad (4)$$



ahol  $G(m)$  a  $g(m)$  függvény határozatlan integrálja. Bederiválunk az integráljel mögé:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Pi(K)}{\partial K} &= (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} f(x)g(LSL + K - x) dx - \\ &- (\pi_{11} - \pi_{10}) \int_{LSL}^{+\infty} f(x)g(LSL + K - x) dx = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$(\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} f(x)g(LSL + K - x) dx = (\pi_{11} - \pi_{10}) \int_{LSL}^{+\infty} f(x)g(LSL + K - x) dx \quad (6)$$

Ha a  $(\pi_{00} - \pi_{01})$  és a  $(\pi_{11} - \pi_{10})$  különbségek közül egyik sem nulla, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{\pi_{00} - \pi_{01}}{\pi_{11} - \pi_{10}} = \frac{\int_{LSL}^{+\infty} f(x)g(LSL + K - x) dx}{\int_{-\infty}^{LSL} f(x)g(LSL + K - x) dx} \quad (7)$$

A  $K$  értéke innen már numerikusan kiszámítható. Ha a  $(\pi_{00} - \pi_{01})$  és a  $(\pi_{11} - \pi_{10})$  különbségek közül az egyik nulla, akkor a másik különbség előjele alapján hozzuk meg a döntési szabályt. Ebben az esetben vagy minden terméket továbbengedünk, vagy mindet visszautasítjuk. Ha mindkét különbség nulla, az azt jelenti, hogy bárhogy is döntünk, azonos fedezetre számíthatunk a termék tényleges megfelelőségétől függetlenül. Mivel a gyakorlatban ez a legtrikábban fordul elő, a legvalószínűbb, hogy nem vettünk figyelembe valamilyen költség vagy bevétel tényezőt. A  $(\pi_{00} - \pi_{01})$  különbséget értelmezhetjük úgy, mint a másodfajú döntési hiba veszteségét a helyes döntéshez képest, a  $(\pi_{11} - \pi_{10})$  különbség pedig az elsőfajú hiba veszteségét jelentheti a tényállapothoz tartozó helyes döntéshez képest.

Jelölje az  $f \cdot g$  sűrűségfüggvényt  $h$ , melyhez tartozó eloszlás  $H$ , ekkor:

$$\frac{\pi_{00} - \pi_{01}}{\pi_{11} - \pi_{10}} = \frac{1 - H(LSL)}{H(LSL)}, \quad (8)$$

$$H(LSL) = \frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}} = q, \quad (9)$$

A (9) egyenlet jobb oldala ( $q$ ) csak nulla és egy közötti értéket vehet fel, mivel a bal oldalon egy eloszlásfüggvény van. Ha a  $q > 1$ , akkor  $\pi_{01} > \pi_{00}$ , azaz a nem megfelelő terméket kifizetődőbb elfogadni, mint visszautasítani, ezért minden terméket elfogadunk ( $K = -\infty$ ). Ha a (9) jobb oldalán lévő kifejezés negatív, akkor két esettel számolhatunk: Ha a számláló pozitív, akkor  $\pi_{11} > \pi_{10}$  és  $\pi_{01} > \pi_{00}$ , így minden elfogadás jövedelmezőbb a visszautasításnál ( $K = -\infty$ ), ha a számláló negatív, akkor  $\pi_{11} < \pi_{10}$  és  $\pi_{01} < \pi_{00}$ , tehát minden visszautasítás kedvezőbb az elfogadásnál ( $K = \infty$ ). Az utóbbi eset azt jelentené, hogy nem érdemes a terméket gyártani, ezért ez a döntési helyzet valójában meg sem jelenik a gyakorlatban. A  $q$  értékét a veszteségek

arányaként értelmezve az alacsony — nullához közeli —  $q$  értékek jelentik azt, hogy a másodfajú hiba vesztesége nagyobb ( $q = 0,01$  esetén a másodfajú hiba vesztesége 99-szerese az elsőfajú hibáénak). A magasabb — egyhez közeli —  $q$  értékek pedig az elsőfajú hiba veszteségének magasabb arányát jelentik. A gyakorlatban mindkét eset előfordulhat, de a magas veszteséggel járó másodfajú hiba esetét tartjuk a veszélyesebbnek.

A (9) egyenletet értelmezve láthatjuk, hogy a LSL a  $H(z)$  eloszlásfüggvény  $q$ -kvantilise. Mintavételezés esetén a  $q$ -kvantilis értékét  $H_n$  tapasztalati eloszlásból aszimptotikus torzítatlansággal becsülhetjük a rendezett minták elmélete alapján [24]. A becslés normális eloszlást követ  $Q$  várható értékkel és  $D_n$  szórással.

$$Q = H^{-1}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right), \quad (10)$$

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{nh(Q)}} \sqrt{\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}} \left(1 - \frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right)}. \quad (11)$$

Az  $n$  mintaelemszám növekedésével a szórás nullához tart és a becslés aszimptotikusan torzítatlan, így a becslés gyengén konzisztens [25]. Ha mind a tényleges folyamat, mind a mérési bizonytalanság normális eloszlású  $\sigma_x$  és  $\sigma_m$  szórással valamint  $\mu_x$  és  $\mu_m$  várható értékekkel, akkor a (9) egyenletben  $H(LSL)$  egy olyan normális eloszlás, melynek várható értéke  $\mu^*$  és szórása  $\sigma^*$ .

$$\mu^* = \frac{\sigma_x^2(LSL + K - \mu_x) + \sigma_m^2\mu_x}{\sigma_x^2 + \sigma_m^2} \quad \text{és} \quad \sigma^* = \frac{\sigma_x\sigma_m}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_m^2}}. \quad (12)$$

Standardizálás után:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}} &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu^*}{\sigma^*}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{LSL - (\sigma_x^2(LSL + K - \mu_x) + \sigma_m^2\mu_x)/(\sigma_x^2 + \sigma_m^2)}{\sigma_x\sigma_m/\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_m^2}}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Ebből  $K$  értéke a következő módon számítható:

$$K = \mu_m - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_x^2}(\mu_x - LSL) - \frac{\sigma_m\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_m^2}}{\sigma_x^2} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right). \quad (14)$$

A két normális eloszlású változó összegeként megjelenő  $y$  mért érték várható értékét és szórását behelyettesítve a gyakorlatban könnyebben felhasználható képletet kapunk. A mérési bizonytalanság és a mérési eredmény paramétereit közvetlenül a kalibrálási és megfelelés ellenőrzési adatokból számíthatjuk.

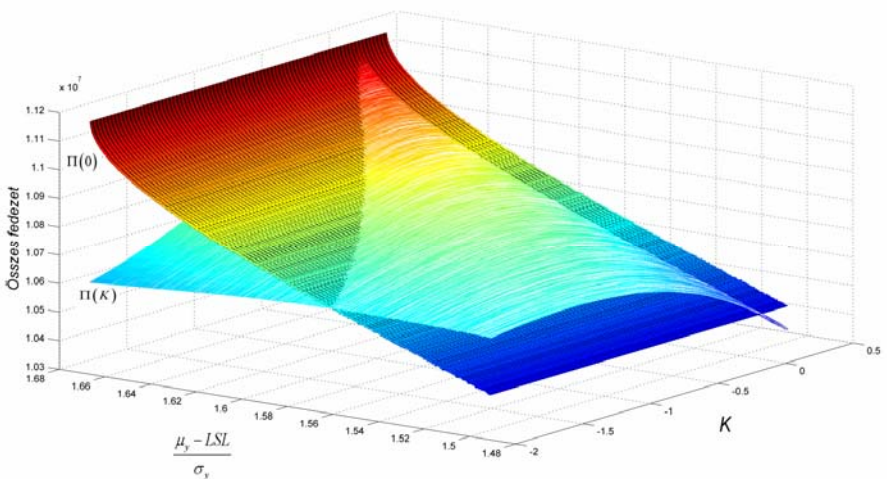
$$K = \frac{\sigma_y^2\mu_m}{\sigma_y^2 - \sigma_m^2} - \frac{\sigma_m^2(\mu_y - LSL)}{\sigma_y^2 - \sigma_m^2} - \frac{\sigma_m\sigma_y}{\sqrt{\sigma_y^2 - \sigma_m^2}} \Phi^{-1}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right). \quad (15)$$

## 4 A szimulációk eredményei

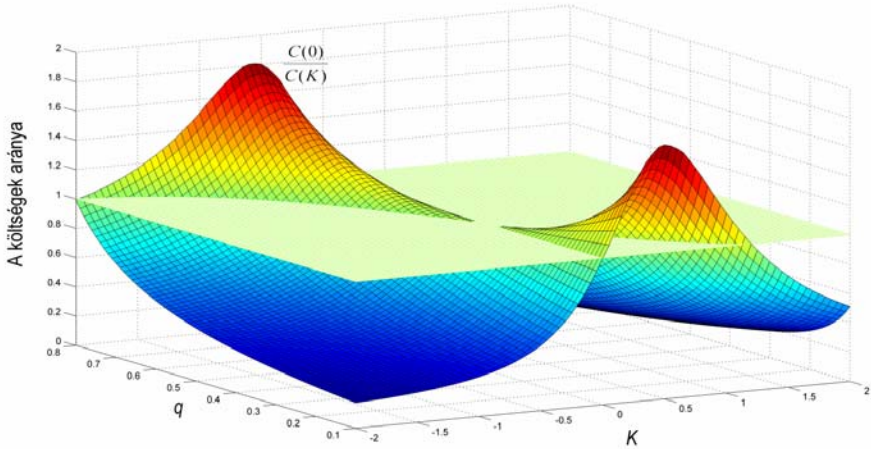
A gyenge konzisztencia miatt kellően nagy elemszámú szimulációval is közelíthető a  $K$  optimális értéke, illetve az elfogadási határ módosításának az a tartománya, ahol kedvezőbb eredményt ad a mérési bizonytalanság figyelembevétele.

Szimulációkat végeztünk annak megállapítására, mely esetekben érdemes figyelembe venni a mérési bizonytalanságot. A 4. ábra azt szemlélteti, hogyan változik az összes fedezet a  $K$  korrekciós tag valamint a folyamatképesség függvényében. Amikor a mérési bizonytalanság figyelembevételel létrejövő  $\Pi(K)$  fedezetgörbe a bizonytalanság figyelembevétele nélkül keletkező  $\Pi(0)$  fedezetgörbe fölött van, akkor érdemes a mérési bizonytalansággal foglalkozni. A szimuláció során a folyamatképesség változását csak a mérési hiba szórásának változása okozta. A szimulációban rögzített bevétel- és költségadatok mellett ( $q = 0,5313$ ) akkor érdemes csak a mérési bizonytalanság figyelembevételel foglalkozni, ha a  $(\mu_y - LSL)/\sigma_y$  arány kisebb, mint 1,68, azaz a hosszú távú folyamatképesség index  $p_{pk} < 1,68/3 = 0,56$ . A hibás döntések következményeinek súlyossága is befolyásolja a mérési bizonytalanság figyelembevételenek szükségességét. Más bevétel- és költségadatok mellett ennél jobb képességgel rendelkező folyamat esetén is érdemes lehet figyelembe venni a mérési bizonytalanságot.

Ha az egyszerűség kedvéért csak a hibás döntésekből adódó költségeket tekintjük ( $r_{11} = r_{10} = r_{01} = r_{00} = 0$ ,  $\pi_{11} = \pi_{00} = 0$ ) és  $\pi_{10}/q = \pi_{10} + \pi_{01}$ , akkor az 5. ábra grafikonján látható módon jelentős különbség lehet a teljes folyamat során keletkező költségek között attól függően, hogyan módosítjuk a beavatkozási határt.



4. ábra. A fedezetek alakulása  $K$  és a folyamatképesség függvényében



5. ábra. A költségek arányának alakulása  $K$  és  $q$  függvényében

Amint az az ábrából is látszik, a beavatkozási határok módosítása akár növelheti is a költségeinket. A költségnövekmény jelentős (a  $C(0)/C(K)$  arány nulla közeli), ha a  $q$  közel van valamelyik szélsőértékéhez (azaz nullához vagy egyhez tart), tehát ha a döntési hibák közül az egyik sokkal nagyobb a másiknál.

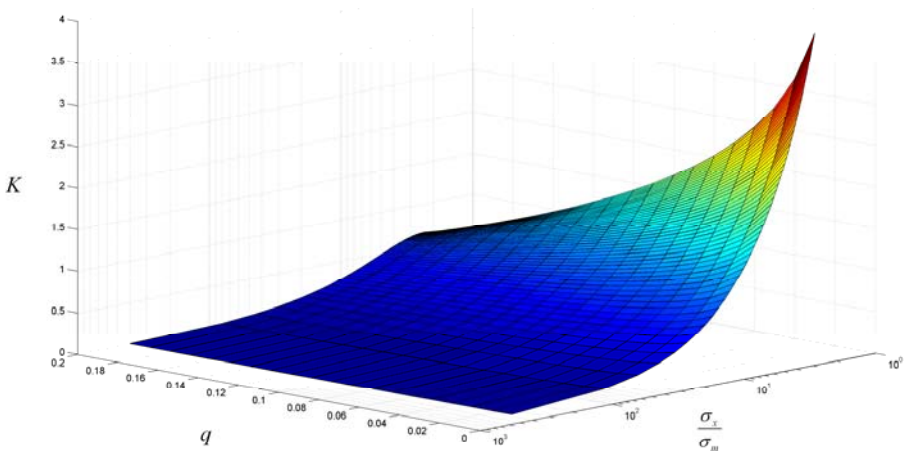
Számításokat végeztünk a gyakorlatban tipikusan alkalmazott estekre: amikor nem vesszük figyelembe a mérési bizonytalanságot ( $K = 0$ ), amikor szűkítik az elfogadási tartományt a mérési hiba szórásának kétszeresével ( $K = 2\sigma_m$ ), amikor ugyanekkora mértékben tágítják az elfogadási tartományt ( $K = -2\sigma_m$ ). Ezekhez az esetekhez tartozó egységnyi fedezeteket vetettük össze az általunk meghatározott optimális korrekciós tényező ( $K_{opt}$ ) esetén elért egységnyi fedezettel (2. táblázat). Az első három oszlopban szereplő fedezetértékek közül az aláhúzva szedettek jelzik a soronkénti maximumot. Ez alapján látható, hogy a gyakorlatban használt megoldások közül melyiket érdemes használni az egyes esetekben. A számítások megerősítik a szimulációs eredményeket, a tűrőhatárok melletti „biztonsági sáv” optimális szélessége ( $K_{opt}$ ) folyamatosan változik a döntési kimenetekhez tartozó bevételek és költségek arányának ( $q$ ) változásával. A  $K_{opt}$  értéke nem köthető kizárólagosan a mérési bizonytalanság nagyságához, és az alkalmazásával elérhető fedezet minden esetben legalább akkora, mint a gyakorlatban eddig használt biztonsági sávok esetében.

Ha a 2. táblázatban bemutatott folyamatot úgy módosítjuk, hogy a mérési bizonytalansághoz tartozó  $\sigma_m$  szórás 0,01 és 2 (a folyamat szórásának 1/400-a és 1/2-e) valamint a veszteségek  $q$  aránya 0,01 és 0,2 közötti értéket vegyen fel, akkor a 6. ábrán látható képet kapjuk.

$q$	Egységre jutó fedezet				$K_{opt}$
	$K = -2\sigma_m$	$K = 0$	$K = 2\sigma_m$	$K = K_{opt}$	
0,05	-10,5472	2,5184	4,9113	5,6933	2,4280
0,10	-0,4061	5,4685	4,9865	6,3438	1,6156
0,15	2,9743	6,4519	5,0115	6,7386	1,0675
0,20	4,6644	6,9436	5,0240	7,0247	0,6319
0,25	5,6785	7,2386	5,0316	7,2500	0,2582
0,30	6,3546	7,4353	5,0366	7,4362	-0,0774
0,35	6,8375	7,5758	5,0401	7,5951	-0,3884
0,40	7,1997	7,6812	5,0428	7,7339	-0,6835
0,45	7,4814	7,7631	5,0449	7,8572	-0,9690
0,50	7,7068	7,8287	5,0466	7,9683	-1,2500
0,55	7,8911	7,8823	5,0480	8,0695	-1,5310
0,60	8,0448	7,9270	5,0491	8,1625	-1,8165
0,65	8,1748	7,9648	5,0501	8,2487	-2,1116
0,70	8,2862	7,9972	5,0509	8,3291	-2,4226
0,75	8,3828	8,0253	5,0516	8,4046	-2,7582
0,80	8,4673	8,0499	5,0522	8,4758	-3,1319
0,85	8,5419	8,0716	5,0528	8,5435	-3,5675
0,90	8,6082	8,0909	5,0533	8,6083	-4,1156
0,95	8,6675	8,1081	5,0537	8,6707	-4,9280

2. táblázat. Az egy egységre jutó fedezet értéke a határok módosításának függvényében ( $\mu_x = 105$ ,  $\sigma_x = 4$ ,  $\mu_m = 0$ ,  $\sigma_m = 2$ ,  $LSL = 100$ )

A tényleges folyamat és a mérési bizonytalanság szórásának arányát logaritmikus skálán jelöltük. Jól látható, hogy ha minden mást rögzítve hagyunk, akkor is csak bizonyos  $q$  értékek esetén lesz lineárishoz közelítő a  $K_{opt}$  és a  $\sigma_m$  kapcsolata.



6. ábra. Az optimális korrekciós tényező értékei a veszteségek aránya ( $q$ ) és a mérési bizonytalansághoz tartozó szórás ( $\sigma_m$ ) függvényében

## 5 Konklúzió

Igazoltuk, hogy a szabványok és ajánlások által javasolt, kizárólag a mérési bizonytalanság függvényében meghatározott és a tűréshatárokhöz illesztett megbízhatóság alapú biztonsági sáv alkalmazása akár ronthat is a várható költség vagy fedezet értékén. Az így elért eredmény rosszabb lehet annál, mintha teljesen figyelmen kívül hagynánk a mérési bizonytalanságot. Bemutattuk, hogy az eredményt a mérési bizonytalanság mellett a folyamat képessége (ingadozásának mértéke és a várható érték tűréshatároktól vett távolsága), valamint az egyes döntési kimenetekhez tartozó bevételek és költségek nagysága is befolyásolja. Az általunk javasolt módszerrel a költségek (vagy fedezetek) optimalizálhatóak, s ez az optimum akár mintavételes vizsgálatból is megállapítható. Bizonyítottuk, hogy bonyolultabb esetekben nem szükséges analitikusan számításokat végeznünk, a sztochasztikus konvergencia miatt szimulációkkal is meghatározhatók a minimális kockázattal járó elfogadási határok.

## Irodalom

1. BIPM; IEC; IFCC; ISO; IUPAC; IUPAP and OIML (1995): *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Geneva, Second Edition
2. T. Aven (2011): Interpretations of alternative uncertainty representations in a reliability and risk analysis context, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 96, pp. 353–360.
3. D’Errico, G. E. (2009): Paradigms for uncertainty treatments: A comparative analysis with application to measurement, *Measurement* vol. 42, pp. 494–500.
4. Rozet, E.; Marini, R. D.; Ziemons, E.; Hubert, Ph.; Dewé, W.; Rudaz, S. and Boulanger, B. (2011): Total error and uncertainty: Friends or foes?, *Trends in Analytical Chemistry* vol. 30, Issue 5, May 2011, pp. 797–806.
5. Mauris, G.; Lasserre, V. and Foulloy (2001): A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement, *Measurement* vol. 29, pp. 165–177.
6. Urbanski, M. K. and Wasowski, J. (2003): Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness, *Measurement* vol. 34, pp. 67–74.
7. Terán, P. (2007): Probabilistic foundations for measurement modelling with fuzzy random variables, *Fuzzy Sets and Systems* vol. 158, pp. 973–986
8. Al-Othman, A. K. (2009): A fuzzy state estimator based on uncertain measurements, *Measurement* vol. 42, pp. 628–637
9. Salicone, S. (2007): *Measurement Uncertainty: An Approach via the Mathematical Theory of Evidence*, Springer, New York ISBN: 978-0-387-30655-1
10. Reznik, L. and Dabke, K. P. (2004): Measurement models: application of intelligent methods, *Measurement* vol. 35, pp. 47–58
11. Ellison, S. L. R. and Williams, A. (2007): *EURACHEM/CITAC Guide: Use of uncertainty information in compliance assessment*, First Edition, Eurachem
12. ISO 14253-1 (1998): *Geometrical Product Specification (GPS) – Inspection by measurement of workpieces and measuring instruments – Part I: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications.*

12. CENELEC (1997): *Draft prEN 50222* Standard for the evaluation of measurement results taking measurement uncertainty into account.
13. IEC (1997): *CISPR/A/204/CD* Accounting for measurement uncertainty when determining compliance with a limit., IEC, Geneva
14. ILAC (2009): *ILAC-G8:03/2009*: Guidelines on the Reporting of Compliance with Specification, ILAC, Silverwater
15. Rabinovich, S. G. (2005): *Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice*, Third Edition, Springer, New York, ISBN: 978-0387-25368-9
16. Jones, F. E. and Schoonover, R. M. (2002): *Handbook of Mass Measurement*, CRC Press, Boca Raton, ISBN: 978-0849325311
17. Vilbaste, M.; Slavin, G.; Saks, O.; Pihl, V. and Leito, I. (2010): Can coverage factor 2 be interpreted as an equivalent to 95% coverage level in uncertainty estimation? Two case studies, *Measurement* vol. 43, pp. 392–399
18. Synek, V (2006): Effect of insignificant bias and its uncertainty on the coverage probability of uncertainty intervals: Part 1. Evaluation for a given value of the true bias, *Talanta* vol. 70, pp. 1024–34
19. Rossi, G. B. and Crenna, F. (2006): A probabilistic approach to measurement-based decision, *Measurement*, vol. 39, pp. 101-119
20. Synek, V. (2007): Effect of insignificant bias and its uncertainty on the coverage probability of uncertainty intervals: Part 2. Evaluation for a found insignificant experimental bias, *Talanta* vol. 71, pp. 1304–11
21. Pendrill, L. R. (2006): Optimised measurement uncertainty and decision-making when sampling by variables or by attribute, *Measurement*, vol. 39, pp. 829–840.
22. Forbes, A. B. (2006): Measurement uncertainty and optimized conformance assessment, *Measurement*, vol. 39, pp. 808–814.
23. Rényi A. (1981): *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest.
24. Bolla M. and Krámlí A. (2005): *Statisztikai következtetések elmélete*, Typotex Kiadó, Budapest.

#### RISK-BASED MEASUREMENT UNCERTAINTY TREATING IN INDUSTRIAL CONFORMANCE ASSESSMENT DECISIONS

The consideration of measurement uncertainty is part of the daily routine in a measuring and testing laboratory. The authors show that taking measurement uncertainty into account can also be essential in industrial decision practice (e.g. in condition based maintenance or conformity inspection). The consideration of measurement uncertainty particularly required if this uncertainty is large or the consequence of an incorrect decision is critical. The introduced model treats the measurement uncertainty on risk base instead of the previously used reliability-centered approach. The authors show that the optimal bounds of acceptance region can be determined with simulations and analytical calculations as a function of measurement uncertainty, the observed characteristics and the loss or profit of decision outputs.





# A KVÁZI-HIPERBOLIKUS DISZKONTÁLÁS ALKALMAZÁSA AZ OPTIMÁLIS SZABADALMAK ELMÉLETÉBEN<sup>1</sup>

NAGY BENEDEK

*Szegedi Tudományegyetem*

Gazdaságpolitikai döntések során gyakorta szükséges azonnali költségek és hosszú időn át realizálódó hasznok, vagy azonnali hasznok és hosszabb időn át realizálódó költségek összevetése. A neoklasszikus közgazdaságtannak megvan az eszköze az effajta döntések kezelésére: a jelen- és jövőérték-számítás, valamint a nettó jelenérték-szabály. A kísérleti közgazdaságtan oldaláról azonban az ilyenkor alkalmazott exponenciális diszkontálást sok támadás érte. Kísérletek alapján a nagyobb pszichológiai realizmus érdekében alternatívákat javasolnak az exponenciális modellel szemben: a hiperbolikus, illetve kvázi-hiperbolikus diszkontálási modelleket. Ezek az alternatív modellek magyarázattal szolgálhatnak a fogyasztók viselkedésének időbeli inkonzisztenciájára, vagyis hogy döntésüket, értékítéletüket ceteris paribus pusztán az idő múlása miatt megváltoztatják. Jelen dolgozat célja kettős. Egyrészt cél, hogy áttekintve a különböző diszkontálási modelleket és azok összefüggéseit, rávilágítson, hogy különbözőségeik milyen eltéréseket okozhatnak még egyszeri kifizetések jelenértékének összevetésénél is, de még inkább akkor, ha ezeket az alternatív modelleket pénzáramok jelenértékének kalkulálására használjuk. A szakirodalomban eddig nem jelent meg a hiperbolikus és kvázi-hiperbolikus diszkontálási modellek ilyen használata. Másrészt a diszkontálási modellek különbözőségének relevanciáját szeretné szemléltetni a gazdaságpolitika számára. Az optimális szabadalmak elméletének segítségével kívánom megmutatni, hogy egy nem-exponenciális diszkontálási modell alkalmazásával más optimális szabadalmi idő, és ilyen módon más ajánlás adódik a gazdaságpolitika számára.

*Kulcsszavak:* kvázi-hiperbolikus diszkontálás, optimális szabadalmak, annuitás

## 1 Bevezetés

Beruházás-gazdaságossági számítások során Irwing Fisher (1930) óta a mainstream közgazdaságtan által használt normatív döntési szabály, hogy legfőbb azokat a beruházásokat érdemes megvalósítani, amelyek esetében a nettó jelenérték pozitív, vagyis amikor a beruházástól annak hasznos élettartama alatt várható összes nettó pénzáramlás jelenre diszkontált összege nullánál

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2010. december 7. E-mail: xxx@t-online.hu.

nagyobb. Samuelson (1937) hasonló módon normatív döntési szabályként vezeti be a diszkontált hasznosság elméletét. Később azonban magatartás-gazdaságtani kutatások (Ainslie 1992, Loewenstein-Prelec 1992) rámutattak, hogy a valóságban a döntéshozók az említett, exponenciális diszkontálást alkalmazó modellekkel össze nem egyeztethető módon hoznak intertemporális döntéseket. Magára a diszkontálási viselkedésre koncentrálnak döntéseik jobban leírhatóak hiperbolikus (Loewenstein-Prelec 1992) vagy kvázi-hiperbolikus (Laibson 1996) diszkontálást feltételezve. Az exponenciális diszkontálást univerzálisan alkalmazva a fogyasztói döntések esetén téves eredményekhez jutunk, viszont a nem-exponenciális diszkontálási modellek a beruházási döntések esetén vezetnek hibás következtetésre. Ha a beruházási döntéseknél az empirikusan megalapozott nem-exponenciális diszkontálást használjuk fel, akkor az ezekben a modellekben megjelenő időbeli inkonzisztencia miatt a mai terveket nem fogjuk követni a jövőben (Cropper-Laibson 1998). Amellett fogok érvelni, hogy a diszkontálásbeli különbségek miatt bizonyos döntési szituációkban indokolt e kétféle módszer egyfajta „keverékét” alkalmazni. A kormányzat lehet az a szereplő, aki különböző elköteleződési mechanizmusokkal beavatkozhat annak érdekében, hogy bizonyos projektekben a fogyasztók nem-exponenciális időbeli preferenciái érvényesülhessenek (Strotz 1956, Cropper-Laibson 1998). A beruházási döntéseknek egy ilyen területe a környezetvédelmi beruházások vagy az innováció. Az innováció neoklasszikus elméletében erőforrás-felhasználás árán költségsökkentés és ezáltal jövőbeli megnövekedett fogyasztói többlet érhető el. Az optimális szabadalmak Nordhaus (1967) által elindított elméletében az állam által meghatározott szabadalmi védelmi idő egy olyan elköteleződés, amely pontosan meghatározza a jövőbeli cselekvési lehetőségeket: a szabadalmi védelem időtartama alatt a feltaláló elsajátíthatja az innovációból származó hasznok egy részét profitként, és csak e védelem lejárta után élvezheti a társadalom többi része a teljes hasznot. Nordhaus az állam által kijelölendő optimális szabadalmi hosszát az általa vizsgált tényezők függvényében 1 és 34 év közé teszi, míg a valóságban az Egyesült Államokban és Európában a tényleges szabadalmi időtartam egységesen 20 év. Vajon máshogyan kell-e az államnak megállapítani a szabadalmi védelem hosszát, ha figyelembe veszi a fogyasztók jövőbeli hasznokra és költségekre vonatkozó nem-exponenciális diszkontálási viselkedését?

A dolgozat 2. fejezetében áttekintem és csoportosítom a különböző diszkontálási modelleket, rámutatok kapcsolódási pontjaikra, illetve az eltérő modellek használatából eredő jelenérték-számításbeli eredmények különbözőségére. A 3. fejezetben a második fejezet eredményei alapján megmutatom, hogy az exponenciális és nem-exponenciális modellek használatából eredő különbségek hatványozottan érvényesülnek akkor, amikor megpróbáljuk egy olyan területen alkalmazni ezeket a modelleket, mint a pénzáramok, annuitások jelenértékének kiszámítása, hiszen például egy innováció időben hosszan elnyúlóan biztosít hozamokat jelenbeli költségek árán. Ismereteim szerint az exponenciális diszkontálási modellekkel versengő alternatív modellek ilyen alkalmazásával még nem foglalkoztak. Ahogy a második fejezetben, itt is

kiszámítom a különböző modellek alkalmazásával előálló különbségeket a jelenértékekben. A 4. fejezetben a nem-exponenciális diszkontálást az optimális szabadalmak elméletére alkalmazom. Ebben a részben Duffy (2005) egyszerű modellje segítségével mutatom be, hogy a hiperbolikus diszkontálás alkalmazása hasznos hozzájárulás lehet egy olyan gazdaságpolitikai változó, mint a szabadalmi védelmi idő megfelelő kialakításánál. Végül az 5. fejezetben összegzem az eredményeket és kitekintést adok további alkalmazási lehetőségekre.

## 2 Az exponenciális diszkontálási modell és alternatívái

A diszkontált hasznosság modellje (DU – Discounted Utility) Paul Anthony Samuelson 1937-es „A Note on Measurement of Utility” című írásával került be a közgazdasági gondolkodásba, és terjedt el rohamos sebességgel, mint a különböző időpontokban jelentkező hasznosságok összehasonlításának módszere. Azt írja: „bármely tetszőleges időszak alatt az egyén úgy viselkedik, hogy maximalizálja az összes jövőbeli hasznosságnak egy megfelelő időbeli diszkontálással azonos nagyságrendűvé csökkentett összegét. [...] Az egyén a jövőbeli hasznosságokat egy egyszerű és következetes módon számítja le, mely módszer ismert számunkra.” (Samuelson, 1937, p. 156) Ez az ismertnek feltételezett módszer pedig a pénz időértékének számításánál használt exponenciális diszkontálás lett.

Samuelson eredeti értelmezésének megfelelően a diszkontálás vagy leszámítolás fogalmának tág értelmezését magyarázva Rachlin (2006, 425. o) az Oxford Encyclopedic Dictionary bejegyzését idézi, miszerint a diszkontálni szó egyik jelentése: „egy eredeti esemény hatását csökkenteni”. Általános esetben tehát arról van szó, hogy egy kezdeti esemény hatása ( $X$ ) valamilyen együttható ( $\delta$ ) szerint egy kisebb hatássá ( $x$ ) mérséklődik. Ez a mérséklődés felírható akár  $x = \delta X$ , akár  $x/X = \delta$  formában. Ez a  $\delta$  együttható maga is más változók függvényében lehet nagyobb vagy kisebb, kifejezve, hogy milyen hatásra és milyen mértékben csökken a kezdeti esemény hatása.

Samuelson az eredetileg a beruházás-gazdaságossági számítások során a mikroökonómiában szűkebb értelemben jövőbeli *pénzösszegek* értékének összehasonlítására használt leszámítolást jövőbeli *hasznosságok* összehasonlítására is kiterjesztette. Általánosságban  $X$  egy jelenben megkapható összeget (illetve annak hasznosságát) jelent,  $x$  egy jövőben megkapható összeget (illetve annak hasznosságát),  $\delta$  pedig azt az értéket, a diszkontfaktort mutatja, amely mellett a két előbbi érték a döntéshozó számára egyforma. Ekkor a  $\delta$  változó értékét két tényező határozza meg, a kamatláb, mint exogén paraméter, és az idő múlása, mint változó ( $\delta = \delta_t = (1 + r)^{-t}$ , ahol a  $t$  paraméter az időt,  $r$  pedig a kamatlábat jelenti). Minél több idő telik el a jelen és a jövő között,  $\delta_t$  értéke annál kisebb, így adott jelenbeli összegnek annál nagyobb jövőbeli felel meg, vagy adott jövőbeli összegnek annál kisebb jelenbeli.

Az intertemporális döntések neoklasszikus elmélete a diszkontfaktor ala-

kulását exponenciális módon kezeli, ami azt jelenti, hogy időegységenként állandó ütemben változik az arány  $x$  és  $X$  között. A magatartás-gazdaságtani kísérletek azonban rámutattak arra, hogy a tényleges emberi döntéshozatal során a kísérleti alanyok sorra ezzel össze nem egyeztethető döntéseket hoznak, és diszkontálási viselkedésük jobban leírható másmilyen modellekkel. A legismertebb ilyen kísérleti eredmény, anomália, a preferenciafordulás jelensége (Kirby–Herrnstein, 1995), amikor az idő múlása befolyásolja a választást  $A$  és  $B$  különböző időpontokban választható alternatívák között. A fogyasztók intertemporális választásaik során időbeli inkonzisztenciát mutatnak. Ezzel a jelenséggel kapcsolatos a halogatás-probléma (Laibson, 1997): idén úgy gondolom, hogy racionális kalkulációk alapján megéri nekem jövőre elkezdeni erőteljesen takarékoskodni, de mikor a következő év eljön, mégsem teszem ezt, hanem elhalasztom egy évvel, nem látván előre, hogy egy év múlva is éppen így fogok gondolkodni.<sup>2</sup>

Többféle lehetséges magyarázat is született ezekre a jelenségekre. Ezek egy része, amelyekkel itt most foglalkozni szeretnék, a diszkontálási modellt változtatja meg. Ilyenek például a szakirodalom által hiperbolikus diszkontálásnak (Loewenstein–Prelec 1992), illetve kvázi-hiperbolikus diszkontálásnak (Phelps–Pollak, 1968) nevezett modellek. Ezen alternatív modellek mind azt hangsúlyozzák, hogy a diszkontálási kísérletek tanúsága szerint az idő múlásától függően nemcsak maga a diszkontfaktor változik (csökken folyamatosan), hanem ennek a változásnak az ütemét is befolyásolja az idő.<sup>3</sup> A hiperbolikus elnevezés arra utal, hogy ezekben a modellekben az idő a diszkonttényező nevezőjében található, így az idő múlásával maga a diszkontráta is csökkenő – ellentétben az exponenciális modellel, ahol a diszkontráta konstans. A kvázi-hiperbolikus eset átmenet a kettő között, amennyiben az időben csökkenő diszkontrátát csak az első időszakban mutatja, onnantól kezdve a diszkontráta időben állandó.

Egy időben változó diszkontrátával diszkontáló modell különböző módokon formalizálható, különböző szerzők eltérő függvényekkel próbálják az ilyen módon diszkontáló viselkedést leírni. Az ilyen módon diszkontáló nem-exponenciális diszkont-függvényeket döntési szabályként használva más eredményeket fogunk kapni, mintha optimalizáló gazdasági alanyainkról exponenciális diszkontálást feltételeznénk.

Az időben csökkenő diszkontrátát alkalmazó modelleket felfoghatjuk úgy is, mint az exponenciális modell általánosításait. Az egyik irányzat abba az irányba általánosít, hogy míg az exponenciális modellben egy tetszőleges

<sup>2</sup>Az időbeli inkonzisztenciával, halogatással és ezzel összefüggésben lévő fogyasztói önkontrollal kapcsolatban egy jó áttekintést ad Lippai (2010).

<sup>3</sup>Számos további modell is létezik az említett jelenségek magyarázatára. Ezek közül itt azt a csoportot emeltem ki, amely az exponenciálishoz hasonlóan konkrét függvényformát ad az általa leírt diszkontálási viselkedésnek. Frederick et al. (2002) kimerítően áttekinti és csoportosítja az alternatív magyarázó elméleteket. Az ebben a cikkben is megemlített szubadditív modell, bár részben matematizált, nem ad meg az általam vizsgáltakhoz hasonló explicit diszkontfüggvényt (bővebben lásd Read 2001). Trope és Liberman (2003) a preferenciafordulás jelenségére olyan magyarázatot ad, amely pszichológiai tényezőket – attitűdöket, érzelmeket, kogníciókat – használ magyarázó tényezőkként, ám ezek még kevésbé matematizáltak.

időben  $\delta_t = \delta^t$  a diszkonttényező, ez általánosítható  $\delta_t = \beta\delta^t$  formában – ez a diszkrét kvázi-hiperbolikus, vagy más néven béta-delta diszkontfüggvény. E szerint az irányzat szerint az eltérést az első időszak különösen erőteljes diszkontálása okozza. A másik irányzat pedig abba az irányba általánosít, hogy az exponenciális modellhez képest az általánosított modellben  $\delta_t = \delta^{\alpha(t)}$  – ez a folytonos hiperbolikus diszkontfüggvények csoportja. Ez az irányzat az eltérést az „idő téves érzékelésével” magyarázza.<sup>4</sup> Látható, hogy ezen általános képletekből a diszkontálási paraméterek megfelelő megválasztásával határesetként előállítható az exponenciális modell.

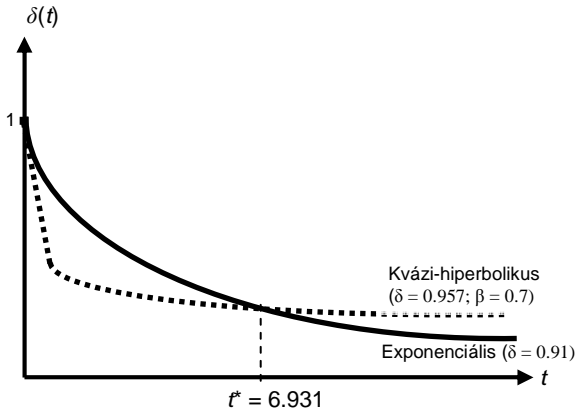
Jelen dolgozatban a kvázi-hiperbolikus modellt fogom alkalmazni, két okból is. Először is az egyszerűség okán. Ez a függvényforma „visszaadja a hiperbolikus diszkontfüggvények kvalitatív vonását [miszerint a diszkontráta időben csökken], miközben megtartja az exponenciális diszkontfüggvény analitikus kezelhetőségét.” (Laibson 1996, p. 8.). A második ok összefüggésben áll az elsővel. Laibson megfontolásához hasonlóan más szerzők is ezt a függvényformát alkalmazták, amikor laboratóriumi kísérletekben vagy valós döntések megfigyelésével a döntéshozók által használt diszkontfüggvény paramétereit becsülni igyekeztek, így a szakirodalomban fellelhető a kvázi-hiperbolikus modell  $\beta$  és  $\delta$  paramétereire vonatkozó benchmark-értékek, a hiperbolikus modellek paramétereire viszont nem állnak rendelkezésre empirikus becslések.

Az általam használt diszkontálási modell esetében tehát egy tetszőleges időszak diszkontrátája kiszámítható a  $\delta_t = \beta \cdot \delta^t$  formában. Ha  $\beta = 1$ , akkor megkapjuk speciális esetként az exponenciálisan diszkontáló modellt. Ha viszont, ahogyan a modell felteszi,  $0 < \beta < 1$ , akkor egy diszkrét diszkontfüggvényt kapunk, melynek értékei  $\{1, \beta\delta, \beta\delta^2, \beta\delta^3, \dots\}$ . A béta-delta diszkontálás mögött az az elképzelés húzódik meg, hogy a döntéshozó elsősorban az alapján mérlegel, hogy jelenbeli vagy későbbi fogyasztásról van-e szó. A nem jelenbeli fogyasztásokat egyből egy erőteljes,  $\beta$  mértékben diszkontálja. Attól kezdve viszont, hogy a nem-jelenbeliség miatt elvégezte az erőteljes leszámítolást, már ennél jóval kisebb mértékben befolyásolja az, hogy kicsivel vagy sokkal későbbi fogyasztásról van szó. A modellfeltevés szerinti  $0 < \beta < 1$  a rövid távú erős türelmetlenségre utal. Az első időszak után a jövőt leszámítoló, időben állandó kamatláb a feltevés szerint  $r_h < r_e$  (vagyis  $0 < \delta_e < \delta_h < 1$ ). Ez az alacsonyabb kamatláb az exponenciális diszkontáláshoz képest értelmezett nagyobb hosszú távú türelemre utal. Összevetve egy exponenciális és egy kvázi-hiperbolikus diszkontfüggvényt, az 1. ábrán látható képet kapunk. A könnyebb kezelhetőség kedvéért az egyébként diszkrét béta-delta diszkontfüggvény pontjait összekötöttem. Az ábra készítésénél a kvázi-hiperbolikus diszkontfüggvény esetében használt paraméterek az empirikus vizsgálatokból Angeletos et al. (2001) által becsült paraméterértékek. Ezekhez meglepően hasonló értékeket talál egy másik kísérletben Laibson et al. (2007).

Az ábra azt mutatja, hogy létezik adott paraméterek mellett egy olyan  $t^*$  időpont, amikor az exponenciális és a kvázi-hiperbolikus diszkonttényező

<sup>4</sup>Ezekben az általánosításokban  $\alpha(t)$  az idő észlelési függvénye, a „valós”  $t$  időben csökkenő meredekséggel emelkedik. Bővebben lásd Lippai (2009).

megegyeznek, ennél korábbi időpont esetén az exponenciális diszkonttényező nagyobb a kvázi-hiperbolikusnál, ennél későbbi időpont esetében pedig kisebb.



1. ábra. Egy exponenciális és egy kvázi-hiperbolikus diszkontfüggvény.  
Forrás: saját szerkesztés.

Az ábra szerint ha az exponenciális diszkontráta  $\delta_e = 0,91$  (vagyis a kamatláb 10%), míg a hiperbolikus esetben  $\beta = 0,7$ , és az alacsonyabb hosszú távú kamatlábnak köszönhetően  $\delta_h = 0,957$  (azaz a „kvázi-hiperbolikus kamatláb” 4,5%), akkor a  $t^*$  időpont 6,931 évnél található. Ekkor egységnyi pénzt 6,931 évnél rövidebb időre lekötve a bankban, a lekötés végén kifizetett összeget kevesebbre értékelné a kvázi-hiperbolikusan diszkontáló egyén, mint a betett. 6,931 éven túli lekötésnél azonban az exponenciálisan kamatozó betét végső kifizetését értékesebbnek vélné, mint a betett összeget. Az egyén tehát az első 6,931 évben egységnyi jelenbeli pénzért több jövőbeli pénzt kér, mint amennyit a bank adna, illetve egységnyi jövőben kapható pénzt kevesebb jelenbelivel tart egyenértékűnek. Ennél rövidebb idő alatt a bank alulkompenzálná a megtakarítót, ennél hosszabb idő esetén viszont felül.<sup>5</sup>

A kétféle módszerrel számított diszkontráta közötti viszonyt a

$$\frac{\beta\delta_h^t}{\delta_e^t} = \beta \left( \frac{1+r_e}{1+r_h} \right)^t$$

képlet adja meg, ahol  $\delta_e = 1/(1+r_e)$  és  $\delta_h = 1/(1+r_h)$ . A zárójelben lévő hányados egynél nagyobb, vagyis a szorzat második tényezője  $t$ -ben

<sup>5</sup>Bár szemléletes összehasonlítani a gazdasági alany által elvárt hozamot és a bank által ajánlott hozamot, több szempontból sem szerencsés. Egyrészt a nem exponenciális diszkontálás időbeli inkonzisztens voltából fakadóan ez az értékelés csak a jelenből nézve érvényes. Másrészt, Mulligan (1996) amellett érvel, hogy egy hiperbolikus diszkontáló vagy nem fér hozzá a pénzügyi eszközökhöz, vagy nincs vagyona. Az említett példában egy arbitrázsör kockázatmentes nyereségre tehet szert összekapcsolva a kvázi-hiperbolikus diszkontálót és az exponenciálisan diszkontáló bankot. Bár ezt a példát még a 3. fejezetben is használom a jövedelemáramlások összehasonlítására, a fenti két ok miatt a 4. fejezetben már csak hasznosságok esetében használom a kvázi-hiperbolikus diszkontálást, pénzügyesek esetében nem.

növekvő. A szorzat, vagyis a két diszkontráta aránya egynél kisebb vagy nagyobb értéket is felvehet, ahogyan az 1. ábrán látszik is. Megadható az a  $t^*$  időpont a diszkontálási paraméterek függvényében, amikor a két diszkont-ráta fentebb kiszámított aránya éppen egy, mégpedig

$$t^* = \frac{\ln \beta}{\ln \delta_e - \ln \delta_h} = \frac{\ln \beta}{\ln \frac{1+r_h}{1+r_e}}. \quad (1)$$

Ha  $t^*$ -ot a diszkontálási paraméterek függvényeként értelmezzük, akkor (1) alapján megállapítható, hogy  $\partial t^*/\partial \beta < 0$ , továbbá, hogy  $\partial t^*/\partial r_e < 0$  és  $\partial t^*/\partial r_h > 0$ , és mivel  $r_e > r_h$ , ezért  $t^*$  a kétféle diszkontráta különbségének csökkenésében is növekvő. Lentebb láthatjuk majd, hogy milyen gyakorlati jelentőséggel bír ez a  $t^*$  érték. Az 1. táblázat néhány paraméterkombinációra mutatja azokat a  $t^*$  időket, amelyekre (1) teljesül. Az egyes sorokhoz tartozó-nak a kvázi-hiperbolikus függvény különböző  $\delta$ , az oszlopokhoz a különböző  $\beta$  paraméterei Laibson (1996) alapján.

$\delta_{hyp}$	$\beta$	0,25	0,5	0,75	0,8
0,96		173,98	86,99	36,10	28,00
0,97		75,63	37,81	15,69	12,17
0,99		35,78	17,89	7,43	5,76

1a. táblázat.  $t^*$  értéke  $\delta_e = 0,952$  esetén  
(vagyis ha  $r_e = 0,05$ )

$\delta_{hyp}$	$\beta$	0,25	0,5	0,75	0,8
0,96		25,44	12,72	5,28	4,10
0,97		21,38	10,69	4,44	3,44
0,99		16,26	8,13	3,37	2,62

1b. táblázat.  $t^*$  értéke  $\delta_e = 0,909$  esetén  
(vagyis ha  $r_e = 0,1$ )

Forrás: saját számítások.

A béta-delta diszkontálási modell legfőbb hátránya az exponenciálissal szemben, hogy folytonos esetben nem értelmezhető, és bár az 1. ábrán nagyvonalúan folytonosként ábrázoltam, sőt a táblázatbeli értékek meghatározásánál is folytonosként kezeltem, a 0. és 1. periódus között még elvileg sem tisztázott, hogy hogyan lehetne folytonossá tenni. Ezt a problémát ugyan kiküszöböli a folytonosan is értelmezhető hiperbolikus diszkontálás, azonban csak másfajta nehézségek árán. A hiperbolikus modell esetére azonban semmiféle becslés nem áll rendelkezésre a diszkontálási paraméterek nagyságát illetően (még nagyságrendileg sem!). Megmutatható, hogy a diszkontálási paraméterek függvényében a hiperbolikus modell(ek)re is meghatározható a fentebb kiszámított  $t^*$  érték.

A bankok által nyújtott kompenzáció lehet tehát túl alacsony, illetve túl magas is a döntéshozótól elvárthoz képest, az ő mentális diszkontálása során használt diszkontfüggvény paramétereitől függően. A magatartásgazdaságtan számos kísérletet végzett, melyekben éppen ilyen anomáliákra mutat rá (Thaler 1981, Ainslie 1992): két lehetőség közül a döntéshozónak az exponenciális modell szerint azt a lehetőséget kellett volna választania, hogy  $x$  idő múlva szerez  $A$  mennyiségű hasznot, ehhez képest ő azt választotta, hogy inkább  $y$  idő múlva szerez  $B$  mennyiségűt. A harmadik részben azt mutatom be, hogy ugyanez a mentális diszkontálásbeli eltérés vajon milyen nehézségeket okozhat több időszakon keresztül esedékes pénz-, illetve hasznosságáramlások közötti választás, ilyen pénz-, illetve hasznosságáramok értékelése során.

### 3 Nem-exponenciális diszkontálás a pénzáramok esetében

A hiperbolikus diszkontálás irodalmának főárama az egyedi kifizetések jelenértékének meghatározásával foglalkozik. A kísérletek jó része arra irányul, hogy meghatározzák a diszkontálás paramétereit annak vizsgálatával, hogy a korábbi kisebb (sooner-smaller, SS, a fenti jelölésünk szerinti  $X$ ) összeg mekkora későbbi nagyobb (later-larger, LL, korábbi jelölésünkben  $x$ ) felel meg – ezek a matching kísérletek –, illetve hogy egy adott korábbi kisebb és későbbi nagyobb közül melyiket választja az alany – ezek a choice kísérletek.

Az optimális szabadalmak elméletében való lentebb bemutatásra kerülő alkalmazás szempontjából viszont nem egyszeri kifizetések összehasonlítása, hanem pénzáramok értékelése a cél, a nem-exponenciális modellek szerint.<sup>6</sup> Hogyan határozza meg vajon a gazdasági szereplő a bizonyos időn keresztül, meghatározott időnként járó jövedelemáramlás (vagy bármilyen más „hasznosságáramlás”) jelenértékét? A második fejezetben arra mutattam rá, hogy amennyiben a gazdasági alanyok a jövőbeli eseményeket nem az exponenciális modell alapján számítolják le, hanem például a kvázi-hiperbolikus modell alapján, akkor az exponenciális modellel számított eredmény egyetlen időpillanat kivételével a jelenértéket vagy alul-, vagy felülbecsli. Jelen szakaszban azt szándékozom bemutatni, hogy ez a hatás fokozottan torzítja az értékelést a pénzáramok jelenértékének becslése során, ami mindennemű olyan optimalizáció eredményét kérdésessé teheti, amely az exponenciális modellre épül.

Vegyük kiindulásnak a legegyszerűbb esetet, az örökjáradék esetét! Vizsgáljuk meg, hogyan viszonyul egymáshoz egy  $C$  összegű örökjáradék kvázi-hiperbolikus, illetve exponenciális módon diszkontált jelenértéke! Mivel

$$PV_{p;exp} = \sum_{t=1}^{\infty} C \cdot \delta_e^t = \sum_{t=1}^{\infty} C \cdot \frac{1}{(1+r_e)^t} = C \cdot \frac{1}{r_e},$$

illetve

$$PV_{p;hyp} = \sum_{t=1}^{\infty} C \cdot \beta \delta_h^t = \sum_{t=1}^{\infty} C \cdot \beta \frac{1}{(1+r_h)^t} = C \cdot \frac{\beta}{r_h},$$

ezért

$$\frac{PV_{p;hyp}}{PV_{p;exp}} = \beta \cdot \frac{r_e}{r_h}.$$

Mivel a kvázi-hiperbolikus modell feltevése, hogy a hosszú távú kamatláb kisebb, mint az exponenciális kamatláb, és a béta egynél kisebb pozitív, ezért ez az arány lehet egynél nagyobb vagy kisebb egyaránt. Ha béta nagyobb (kisebb) a hosszú távú kamatlábak arányánál, akkor az eredmény

<sup>6</sup>Bár az alábbiakban az egyszerűség és kezelhetőség kedvéért már csak a kvázi-hiperbolikus esettel foglalkozunk, a fentebb említett, a hiperbolikus modellel való minőségi egyezősége okán belátható, hogy a vizsgált probléma felvetésénél elegendő lesz ennek a modellnek a használata is. Minőségileg hasonló eredményre jutnánk a hiperbolikus modellek alkalmazásával is.



egynél nagyobb (kisebb) lesz, vagyis a kvázi-hiperbolikus képlettel diszkontált örökjáradék értéke nagyobb (kisebb) lesz, mintha az exponenciális diszkontálást használtuk volna. Idézzük vissza az 1. ábrát! Fenti számítások geometrikusan azt jelentik, hogy arra vagyunk kíváncsiak, a két görbe alatti terület hogyan viszonyul egymáshoz.<sup>7</sup> Az ábra alapján látható, hogy a két terület egyenlősége lehetséges, hiszen  $t^*$  pontig a kvázi-hiperbolikus az exponenciális görbe alatt halad, utána pedig fölötte. Elképzelhető, hogy a béta-delta esetben amennyivel a  $t^*$  pontig kisebb a görbe alatti terület,  $t^*$  után pontosan annival nagyobb, mint ahogyan az is, hogy kevesebb vagy éppenséggel többel. A tényleges diszkontálási paraméterek határozzák meg, hogy melyik a valódi helyzet.

Ennek a két területnek a  $t$  szerint változó nagyságára építve meghatározható, hogy egy tetszőleges  $T$  időpont esetében a  $(T+1)$  időponttól a végtelenig tartó annuitás esetén milyen viszonyban van egymással a kvázi-hiperbolikus, illetve az exponenciális módon diszkontált jelenérték. Mivel a  $t^*$  utáni időpontok kifizetéseit az exponenciális modell felülértékeli, így minél nagyobb  $T$ , annál nagyobb lesz a kvázi-hiperbolikus annuitás-jelenérték az exponenciálishoz képest. A különböző módszerekkel diszkontált annuitás-jelenértékek viszonyát megadó kifejezés a

$$\frac{PV_{T;hyp}}{PV_{T;exp}} = \frac{\sum_{t=T+1}^{\infty} C \cdot \beta \frac{1}{(1+r_h)^t}}{\sum_{t=T+1}^{\infty} C \cdot \frac{1}{(1+r_e)^t}} = \frac{\frac{\beta}{r_h \cdot (1+r_h)^T}}{\frac{1}{r_e \cdot (1+r_e)^T}} = \beta \cdot \frac{r_e}{r_h} \left( \frac{1+r_e}{1+r_h} \right)^T.$$

A zárójelben lévő kifejezés egynél nagyobb a kvázi-hiperbolikus diszkontáló nagyobb hosszú távú türelme miatt, ezért az utolsó tényező  $T$ -ben növekvő. Minél nagyobb tehát  $T$  (minél későbbi időponttól kezdődő örökjáradékot vizsgálunk), annál nagyobb a kvázi-hiperbolikus módon számított jelenérték az exponenciálishoz viszonyítva. Mivel az első két tényező, mint fentebb láttuk, lehet egynél kisebb vagy nagyobb is, ezért a tényleges arány szintén lehet egynél kisebb vagy nagyobb. Éppen eggyel lesz egyenlő, ha

$$T = \frac{\ln \frac{1}{\beta} \cdot \frac{r_h}{r_e}}{\ln \frac{1+r_e}{1+r_h}} = \frac{\ln \left( \beta \cdot \frac{1-\delta_e}{1-\delta_h} \right)}{\ln \delta_e - \ln \delta_h} - 1. \quad (2)$$

A 2. táblázat néhány kvázi-hiperbolikus béta és delta érték mellett mutatja  $T$  értékeit, amelyekre (2) teljesül.

$\delta_{hyp}$	$\beta$	0,25	0,5	0,75	0,8
0,96	142,87	60,04	11,59	3,88	
0,97	47,92	10,91	-10,73	-14,18	
0,99	-5,66	-23,37	-33,73	-35,38	

2a. táblázat.  $T$  értéke  $\delta_e = 0,952$  esetén (vagyis ha  $r_e = 0,05$ )

$\delta_{hyp}$	$\beta$	0,25	0,5	0,75	0,8
0,96	9,34	-3,36	-10,79	-11,97	
0,97	3,26	-7,41	-13,66	-14,65	
0,99	-10,63	-18,75	-23,50	-24,26	

2b. táblázat.  $T$  értéke  $\delta_e = 0,909$  esetén (vagyis ha  $r_e = 0,1$ )

Forrás: saját számítások.

<sup>7</sup>Görbe alatti területekről igazából akkor beszélhetnénk, ha folytonosnak vennénk a diszkontráta-függvényeket, a diszkrét esetben valójában – ahogyan a számítás is mutatta – sorösszegekről van szó.

A táblázatokban szereplő negatív számok azt jelentik, hogy a kvázi-hiperbolikus esetben a  $t^*$  időponton túli jelenértékek összege annnyival magasabb az exponenciális jelenértékekénél, hogy ezt nem tudja kiegyensúlyozni a  $t^*$  előtti jelenértékek ellentétes irányú különbsége. Ebben az esetben az annuitások kvázi-hiperbolikus módszerrel számolt jelenértéke mindig meg fogja haladni az exponenciálisan számított jelenértéket. A hosszú távú nagyobb türelem miatti távoli jövőbeli többlethaszon mindig nagyobb lesz, mint a rövid távú nagyobb türelmetlenség miatt a közelebbi jövőbeni alulkompenzátság okozta veszteség.<sup>8</sup>

## 4 A nem-exponenciális diszkontálás alkalmazása az optimális szabadalmak elméletében

A negyedik fejezetben az innováció egy neoklasszikus mikroökonómiai modelljében szeretném alkalmazni a kvázi-hiperbolikus diszkontálást, alapozva az előző két fejezetben tett összehasonlításokra. A modell Duffy (2005) modellje, amely a szabadalmi védelem időtartama és az innováció nagysága közti összefüggést vizsgálja. Azt kívánom e modell segítségével megmutatni, hogy egyrészt elképzelhető olyan, gazdasági szempontból releváns helyzet, amikor indokolt lehet az exponenciális diszkontálás helyett alternatív, például kvázi-hiperbolikus diszkontálási modell alkalmazása. Az innovációk esetén jelenbeli pénzberuházással jövőbeli pénzbeli többletnyereségen túl a fogyasztók által hosszú távon realizált jólétnövekményt érhetünk el, amelyek értékelésénél indokolt lehet a nem-exponenciális diszkontálási modellek használata. Hasonló természetűek lehetnek például a környezetvédelmi beruházások is. Másrészt rámutatok arra, hogy egy ilyen helyzetben a gazdaságpolitikai döntéshozók, és nem a fogyasztók vagy a vállalatok szempontjából lényeges az alkalmazott diszkontálási modell megfelelő megválasztása. Harmadrészt számszerűsítem a különböző modellválasztás eredményei közötti eltérést. Az első alfejezetben röviden bemutatom az innováció Duffy által használt alapmodelljét, a második alfejezetben felvetem a problémát és megindokolom a kvázi-hiperbolikus diszkontálás használatának szükségességét és mikéntjét, míg a harmadik alfejezet az eredményeket mutatja be.

### 4.1 Az alapmodell bemutatása

Elsőként William Dawnbery Nordhaus volt az, aki egy mikroökonómiai modell segítségével a szabadalom intézményén keresztül a technikai fejlődés, az innováció, és végső soron a tudástermelés jóléti hatásait vizsgálta (Nordhaus 1967). Alap gondolata, hogy mivel a tudás közjószág-tulajdonságokkal bír, ezért az innovátor csak akkor lesz hajlandó új tudást előállítani, vagyis viselni az ezzel járó költségeket, hogyha az új tudás előállításából származó

<sup>8</sup>Ezen gondolatmenet és az örökjáradék jelenértékek összehasonlítása mentén megmutatható, hogy ez általánosságban azokban az esetekben áll elő, amikor  $\beta > r_{hyp}/r_{exp}$ .

hasznokat is el tudja sajátítani.<sup>9</sup> A szabadalom éppen egy olyan intézmény, ami ezt lehetővé teszi.<sup>10</sup> A hosszabb időre szóló szabadalmi védelem tehát az innovátor számára hosszabb időn keresztül biztosítja az innovációból származó profitok elsajátításának lehetőségét, és ezért nagyobb mértékű innovációra sarkall. A szabadalmi védelem miatt előálló monopol piaci pozíció statikus jóléti veszteséget okoz, a szabadalmi védelem lejáratakor viszont dinamikus jóléti nyereség képződik, mikor mindenki szabadon hozzáférhet a találmányhoz. Míg az innovátor célja az innovációból származó lehető legtöbb profit megszerzése, a gazdaságpolitika feladata a szabadalmi védelmi időtartam (a szabadalom élettartama) olyan megválasztása, hogy az, figyelembe véve a statikus jóléti veszteséget és a dinamikus jóléti nyereséget, maximális össztársadalmi jólétet biztosítson.<sup>11</sup>

John Fitzgerald Duffy (2005) néhány ponton eltér Nordhaus modelljétől, de az alapvető gondolata ugyanez. Az alábbiakban nagy vonalakban vázolom Duffy modelljét az innováció és szabadalmi védelem összefüggéséről. Tekintsük egy közönséges jószág piacát! A piacon tökéletes verseny uralkodik, minden vállalat ugyanakkora, konstans határköltséggel tudja a termékét előállítani. A modellben vizsgált innováció folyamatinnováció, vagyis az innováció egyszerűen abból áll, hogy alacsonyabb költséggel való termelést tesz lehetővé az innovátor számára.

A Duffy által felvetett innovációs modell három fontos ponton tér el a Nordhaus-által használttól. Először is feltételezi a termékpiacon az időben növekvő keresletet. Ez a növekvő kereslet időben növekvő bevételként jelenik meg az innovátor számára. A növekedés ütemét a gazdaság általános növekedésének ütemével azonosítja, és azzal a feltételezéssel él, hogy ez a növekedési ütem alatta marad az aktuális kamatlábnak. Másodszor az egyes innovációk méretét adottnak és állandónak tekinti. Ezt azzal magyarázza, hogy az újítások egy-egy területen lépcsőzetesen történnek, és amint egy-egy újabb, kellően nagy lépést megtett egy innovátor, az innovációt máris szabadalmaztatja. Duffy modelljében tehát az innováció mindig ugyanakkora lépcsőkben történik, így a szabadalmi védelem hosszának változtatása végső

<sup>9</sup>Míg a tudásra általánosságban jellemző a rivalizálás technikai értelemben vett hiánya (az én tudásom *menyisége* nem csökken azzal, hogy valaki más is tudja ugyanazt), gazdasági értelemben való rivalizálás azonban létezhet (az én tudásom *értékét* csökkenti, ha más is tudja ugyanazt). A tudást ezek a modellek azért tekintik közjószágnak, mert nincs technikai értelemben rivalizálás, a hasznok elsajátítása az innovátor által viszont éppen a gazdasági rivalizálás miatt nem lehet tökéletes, még szabadalmi védelem mellett sem.

<sup>10</sup>Természetesen nem állítható, hogy szabadalmi védelem híján egyáltalán nem jönneek létre innovációk, hiszen az emberiség számos újítást feltalált már a szabadalom intézményének létrejötte előtt is (ami maga is egy innováció volt!). Egy innováció hozadéka lehet például szakmai elismerés is, amely szintén motiválhatja a potenciális innovátort.

<sup>11</sup>Nordhaus eredeti modellje számos fontos tényezőt hagy figyelmen kívül, amelyek a végeredményre mind befolyással bírhatnak. Az egyik legfontosabb ilyen tényező talán a jövő bizonytalansága, például ami a későbbi időszakokban érvényes kamatlábakat vagy éppenséggel az innováció sikerességét illeti. Ez az eredeti változat hasonlóképpen nem építi be a modellbe a potenciálisn megjelenő imitációkat (szabadalmi védelem szélessége), vagy azt, hogy egy-egy innovációt adott esetben több vállalat fejleszt párhuzamosan, de a szabadalmat végül is csak egyetlen vállalat kaphatja meg (szabadalmi verseny). Az eredeti modell kibővített változatairól egy lehetséges csoportosítást ad Nagy (2008).

soron nem a létrejövő innováció méretét (költségesebb, de nagyobb hozammal kecsgetető, vagy kisebb költségű, de kisebb hozamú lesz-e az innováció), hanem az állandó nagyságú újítás létrejövetelének időpontját befolyásolja. A változó szabadalmi élettartalomra válaszul nem nagyobb vagy kisebb újítások jönnek létre, hanem a következő lépcsőfokot hamarabb vagy később lépik meg. A harmadik jellemzője a modellnek, hogy figyelembe veszi a versengést a kutatás-fejlesztés területén is, ezért a profitmaximalizáló cégeknek mindaddig érdemes előrébb hozniuk az innováció időpontját, amíg még pozitív profitot érhetnek el. Nordhaus modelljében egyetlen cég foglalkozott innovációval, így az adott szabadalmi élettartam mellett ez az egyetlen cég a profitmaximumban elérhetett akár pozitív profitot is. A kutatás-fejlesztést végző cégek közötti verseny azonban ezt a profitlehetőséget eltünteti.

A modell szerint az innováció jóléti hozadéka elméletileg három részből állhat: egyrészt  $H$  nagyságú járadékot biztosít a feltalálónak a szabadalmi élettartam alatt. Másrészt, ha a feltaláló nem tudja járadékként elsajátítani a teljes jóléti hozadékot, akkor abból  $J$  nagyságú hozam csordulhat túl további külső szereplőknek extern haszonként, illetve egy  $K$  része pedig a monopolhatalom megszűnését követően fogyasztói többletté alakuló korábbi holtteher-veszteség. Feltevés szerint  $H_0, J_0, K_0 \geq 0$ , és időben az innováció iránti kereslettel azonos  $g$  ütemben növekvők, vagyis  $H(t) = H_0 \cdot e^{gt}$ ,  $J(t) = J_0 \cdot e^{gt}$  és  $K(t) = K_0 \cdot e^{gt}$ . Az innováció  $I$  költsége független az innováció időpontjától.

A modell szerint tehát az innovátornak az adott  $L$  szabadalmi élettartam mellett addig érdemes előbbre hozni az innováció időpontját ( $t_I$ ), amíg még pozitív profit realizálható. A szabadalmi verseny eltünteti a profitot, így az optimumban a

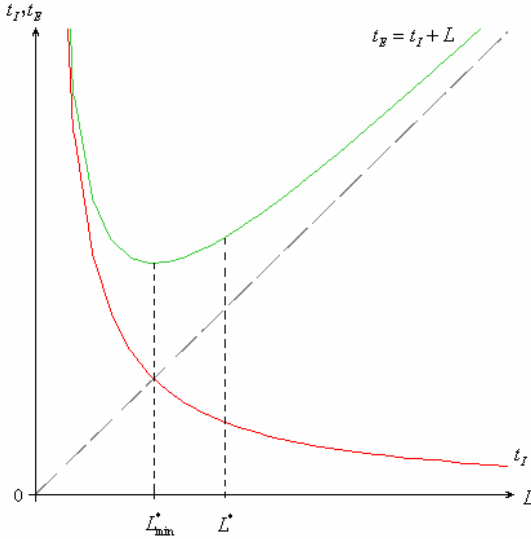
$$\pi(t_I) = \int_{t_I}^{t_I+L} H_0 e^{-(r-g)t} dt - I e^{-rt_I} = 0 \quad (3)$$

feltétel adódik. A feltétel első tagja az innovációtól a szabadalmi élettartam lejártáig az innovátor által elsajátítható bevételek jelenre diszkontált értéke, míg a második tag az újítás megszületésekor vállalandó költségnek a jelenértéke. A modell az exponenciális diszkontálás folytonos változatát alkalmazza, ahol az alkalmazott diszkontfaktort  $\delta^t = e^{-rt}$  (melyben  $r$  az exponenciális kamatláb). A (3) egyenletet  $t_I$ -re rendezve az innováció időpontjára az alábbi összefüggés adódik:

$$t_I = \frac{1}{g} \ln \left( \frac{I \cdot (r-g)}{H_0 \cdot (1 - e^{-(r-g)L})} \right) \quad (4)$$

Az optimális innovációs időpontról belátható, hogy  $\partial t_I / \partial L < 0$ , vagyis hogy a hosszabb szabadalmi élettartam korábbra hozza az innováció időpontját. A (4) egyenlet tehát az exogén változók nagyságának függvényében megmutatja, hogy a profitmaximalizáló vállalat különböző  $L$  szabadalmi élettartamokhoz milyen  $t_I$  időpontot választana az innováció megvalósítására.

A modellben  $L$  növelése az innováció időpontját ( $t_I$ ) egyértelműen korábbra hozza a szabadalom lejáratainak időpontját ( $t_E = t_I + L$ ) viszont nem növeli feltétlenül. Ezt mutatja az alábbi 2. ábra.



2. ábra. A minimális optimális szabadalmi idő és az optimális szabadalmi idő.  
 Forrás: Duffy (2005), 3. o.

Az ábrán a  $t_I$  az innováció vállalat által választott időpontját mutatja a szabadalmi élettartam függvényében (4)-nek megfelelően. A Nordhaus-modell feltételei szerint ez egybeesne az  $L$  tengellyel. A  $t_E$  függvény a szabadalom lejárataának idejét mutatja a szabadalmi élettartam függvényében. A Nordhaus-modell szerint ez az ábrán látható  $45^\circ$ -ban emelkedő függvény lenne, de Duffy modelljében ez egy eleinte csökkenő, majd növekvő függvény. Amíg a szabadalmi védelem hosszának növelése korábbra hozza a szabadalom lejárataának időpontját is, addig feltétlenül érdemes növelni  $L$ -et (az ábrán  $L_{\min}^*$  jelöli, és Duffy minimális optimális szabadalmi időnek nevezi). A fentebb említett átváltás a statikus jóléti veszteségek és a dinamikus jóléti nyereségek között csak ennél nagyobb  $L$  esetében jelenik meg. Az  $L$  ezen felüli növeléséből származó dinamikus jóléti nyereség, hogy a hamarabb bekövetkező innováció miatt a társadalom korábbi időponttól kezdve jut hozzá a  $J$  haszonhoz. A statikus jóléti veszteség pedig, hogy a később megszűnő monopolhatalom miatt csak későbbi időponttól kezdve jutnak hozzá a  $H + K$  többlethasználókhoz. Addig érdemes növelni  $L$ -et tehát, amíg a növelés hasznainak diszkontált értéke meg nem egyezik a növelés költségeinek diszkontált értékével.

Ezt az ábrán  $L^*$ -gal jelölt optimális szabadalmi védelmi hosszúságot ki lehet számítani az innovációból származó összes társadalmi jólét maximalizálásával, figyelembe véve a vállalatok viselkedését. Az innovációból származó összes társadalmi jólét jelenértéke

$$W_e(L) = \int_{t_I}^{t_I+L} J_0 e^{-(r_e-g)t} dt + \int_{t_I+L}^{\infty} (J_0 + H_0 + K_0) e^{-(r_e-g)t} dt, \quad (5)$$

ahol az első tag a szabadalom élettartama alatti hozamok jelenértékét adja meg, a második tag a szabadalom lejártával szerezhető jóléti hozamok jelen-

értékét mutatja. A társadalmi jóléthez még hozzátartozik az innovátor által elért összes jólét, de mivel a (3) feltételből tudjuk, hogy az innovátor által el-sajátított járadékok jelenértékének és az innovációs költség jelenértékének különbsége 0, így ezeket a tagokat kihagyva kaptuk a fenti egyszerűbb függvényt. A gazdaságpolitikai döntéshozónak tehát úgy kell meghatároznia  $L$  értékét, hogy az innovációból származó társadalmi jólét maximális legyen. A feltételt felhasználva megoldva a  $\partial W(L)/\partial L = 0$  egyenletet a következő összefüggés adódik:

$$\frac{J_0}{H_0 + K_0} = \frac{g - r_e B}{r_e - g}, \quad (6)$$

ahol  $B = e^{-(r-g)L}$ . Az egyenlet egyetlen változója  $L$ , amire megoldható, és megkapjuk belőle az  $L^*$  optimális szabadalmi élettartamot. A 2. ábra tanúsága szerint ez az optimális szabadalmi idő nagyobb, mint  $L_{\min}^*$ . A modellben csak akkor érdemes a szabadalmi védelmi időt úgy meghatározni, hogy ennél a minimálisan optimális időnél hosszabb legyen, vagyis hogy a szabadalom végül is ne a lehető leghamarabb járjon le, ha már a szabadalmi védelmi idő alatt származnak külső szereplőknek is hasznai a találmányból, vagyis ha  $J > 0$ .

## 4.2 A kvázi-hiperbolikus diszkontálás beillesztése a modellbe

Jelen alfejezetben beillesztem a hiperbolikus diszkontálást Duffy fentebb bemutatott modelljébe és bemutatom, miért lehetséges és indokolt ez a módosítás.

Az innováció által a társadalom számára generált jólétet két minőségileg különböző részre bonthatjuk fel. Az egyik rész az innovátor vállalat számára generált, pénzben mérhető jólétnövekmény (profit), a másik pedig a fogyasztók által a (közelebbi vagy távolabbi) jövőben realizálandó, pénzben nem mérhető fogyasztói többlet-növekmény.

Mi oka lenne egy vállalatnak arra, hogy ne exponenciálisan diszkontálja a jövőt? Az exponenciális diszkontálási modell egyik nagy sikere abban rejlik, hogy a bankok ezt a fajta diszkontálást alkalmazzák, mikor kamatot fizetnek vagy kamatot szednek. A gazdasági realitások talaján álló vállalatoknak is így kell tehát számolniuk, amikor jövőbeli fizetési kötelezettségeiket vagy éppen elmaradt hasznaikat veszik számításba. Az exponenciális kamatlábat kellene alkalmazniuk akkor is, amikor a megszerzett profitokat a bankban elhelyezik, illetve akkor is, amikor a jövőbeli profitjuk terhére hitelt szeretnének felvenni.

A fogyasztók azonban, a magatartás-gazdaságtani kísérletek tanúsága szerint mentálisan máshogyan diszkontálják a jövőbeni hasznosságokat. Választásaik még akkor sem teljesen összeegyeztethetők az exponenciális modell előrejelzéseivel, ha tényleges jövőbeli pénzhozamok között kell dönteniük. A jövőbeli fogyasztói többlet-növekmény azonban ennél jóval absztraktabb, például abból a szempontból, hogy a jelenlegi fogyasztói többletet nem lehet bankba tenni és kamatoztatni, hasonlóképpen a jövőbeli fogyasztói többlet terhére sem lehet hitelt felvenni.

A nem-exponenciális diszkontálásnak a modellbe való beillesztésénél három dologra kell figyelemmel lenni. Először is, a nem-exponenciális diszkontálást csak olyankor használom, ha fogyasztókra vonatkozó jövőbeli hasznosságok értékeléséről van szó a modellben. Ahol azonban ténylegesen pénzben kifejezhető, a vállalat számára megjelenő jövőbeli bevételekről, illetve költségekről van szó, ott megtartom az eredeti exponenciális modellt.

Másodsorban annak ellenére, hogy, mint ahogyan fentebb is jeleztem, a kvázi-hiperbolikus diszkontálás diszkrét, és folytonos módon nem értelmezhető, jelen tanulmányban mégis egy folytonos közelítéssel fogok élni, az exponenciális modell mintájára, vagyis a kvázi-hiperbolikus diszkontfaktort  $\beta\delta_h^t = \beta e^{-r_h t}$  formában használom. Ez a modell azért nem értelmezhető folytonos változatban, mert a 0. és 1. időszak közötti erőteljes diszkontálás okán nem lehet a diszkontfüggvényt folytonossá tenni. Az első időszaktól kezdődően azonban a kvázi-hiperbolikus diszkontálás ugyanúgy működik, mint az exponenciális. A potenciálisan kvázi-hiperbolikus módszerrel diszkontálandó tényezők mind az innováció időpontja után jelentkeznek, tehát az említett probléma csak akkor bír jelentőséggel, ha az innováció időpontja az 1. időszaknál hamarabbra esik. (4) átalakításával látható, hogy ez abban az esetben következhet be, ha

$$L > \frac{1}{r_e - g} \ln \frac{e^g}{e^g - \frac{I}{H_0}(r_e - g)} .$$

Ellenőrizhető azonban, hogy a paraméterek Duffy által használt értékei mellett mind  $L_{\min}^*$ , mind pedig  $L^*$  értékei kisebbek ennél.

Harmadsorban pedig, mivel a döntéshozók nem maguk a fogyasztók, hanem az ő jólétüket figyelembe vevő állam, ezért a nem-exponenciális diszkontálásból adódó időbeli inkonzisztencia nem játszik szerepet a döntéshozásban. A preferenciafordulás következménye itt éppenséggel a „siettetés” – mint a halogatás ellentéte – lenne: a korábban meghatározott szabadalmi védelmi időt a fogyasztók később szeretnék folyamatosan csökkenteni, a lejáratot fokozatosan előrébb hozva. Az állam azonban ebben a modellben a 0. időpontban elkötelezi magát egy szabadalmi élettartam mellett, amit ezután az idő múlásával nem változtat meg.

A vállalatok számára továbbra is adottságként jelenik meg az állam által meghatározott  $L$  értéke, és ezen adottság mellett határozzák meg az innováció optimális időpontját a nullprofit-feltevés mellett, továbbra is az exponenciális diszkontálást alkalmazva. Az állam számára ebből következő feltétel tehát továbbra is változatlanul (3). Ugyanúgy, mint az eredeti modellben, a vállalat most is minden  $L$  értékhez meg tudja határozni, mi lenne az optimális  $t_I$  érték.

Az állam a maximális jólét elérésére törekszik, miközben a vállalatok optimalizáló viselkedését is figyelembe kell vennie. A maximalizálandó jólét a kvázi-hiperbolikus diszkontálást használva a megfelelő (a fogyasztókra vonat-

kozó) tagok esetén:

$$W_h(L) = \int_{t_I}^{t_I+L} J_0 \beta e^{-(r_h-g)t} dt + \int_{t_I+L}^{\infty} (J_0 + H_0 + K_0) \beta e^{-(r_h-g)t} dt. \quad (7)$$

Felhasználva a 2. fejezet tanulságait a különböző diszkontálási modellekkel számított annuitás-jelenértékekkel kapcsolatban, következtethetünk arra, hogy hogyan viszonyul egymáshoz  $W_e(L)$  és  $W_h(L)$ . Az 1. és 2. fejezet eredményei alapján az a feltételezésem, hogy egyrészt minden egyéb változtatás mellett azonos  $t_I$  függvény esetén más  $L$  érték fogja maximalizálni a  $W_e(L)$  jölétet, mint a  $W_h(L)$  jölétet. Másrészt, hogy a  $W_e(L)$  jölétet maximalizáló  $L$  attól függően lesz nagyobb vagy kisebb, mint a  $W_h(L)$  jölétet maximalizáló  $L$ , hogy az eredeti optimális szabadalmi élettartam hosszabb vagy rövidebb, mint a 2. fejezetben definiált  $T$ .

## 5 Eredmények

Megoldva a  $\partial W_h(L)/\partial L = 0$  egyenletet a feltétel felhasználásával, egy, az eredetihez hasonló kifejezést kapunk:

$$\frac{J_0}{H_0 + K_0} = \frac{g - r_e B}{r_e - g} \frac{B_h}{B}, \quad (8)$$

melyben ismét  $B = e^{-(r_e-g)L}$  és  $B_h = e^{-(r_h-g)L}$ . Az egyenletből először is azonnal adódik, hogy ha a kvázi-hiperbolikus diszkontálás paramétereit úgy választjuk meg, hogy  $\beta = 1$  és  $r_h = r_e$ , akkor az eredeti exponenciális diszkontálást kapjuk vissza, a fenti képletben a jobb oldalon szereplő második tört értéke egy. Így ugyanaz az eredmény adódik az optimális szabadalmi élettartamra. Jelölje  $L^{**}$  a szabadalmi védelmi időnek azt a hosszát, amely kielégíti az egyenletet abban az esetben, ha  $\beta < 1$  és  $r_h < r_e$ ! Zárt formulával ebben az esetben ugyan nem adható meg az optimális szabadalmi élettartam, de megvizsgálhatjuk  $L^*$  és  $L^{**}$  viszonyát. (6) és (8) összevetésével adódik, hogy

$$\frac{g - r_e B^*}{r_e - g} = \frac{J_0}{H_0 + K_0} = \frac{g - r_e B^{**}}{r_e - g} \frac{B_h^{**}}{B^{**}},$$

vagyis

$$g - r_e B^* = (g - r_e B^{**}) \frac{B_h^{**}}{B^{**}}.$$

Tekintve, hogy  $B_h^{**}/B^{**}$  mindenképpen nagyobb egynél,<sup>12</sup> hisz

$$\frac{B_h^{**}}{B^{**}} = \frac{e^{-(r_h-g)L^{**}}}{e^{-(r_e-g)L^{**}}} = e^{(r_e-r_h)L^{**}},$$

<sup>12</sup>Ez a tényező ugyanis nem más, mint a fentebb az annuitás-jelenértékek összehasonlításánál kapott kifejezésben a zárójelben szereplő tényező, a vizsgált modellnek megfelelő folytonos átértelmezéssel és az alkalmazott növekedési tényezővel együtt.



így fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$g - r_e B^* = (g - r_e B^{**}) \frac{B_h^{**}}{B^{**}} > g - r_e B^{**} ,$$

ahonnan

$$B^* < B^{**} .$$

Azt kapjuk tehát, hogy  $e^{-(r_e - g)L^*} < e^{-(r_e - g)L^{**}}$ , ami csak úgy adódhat, ha a jobb oldali kitevő nagyobb, mint a bal oldali, azaz

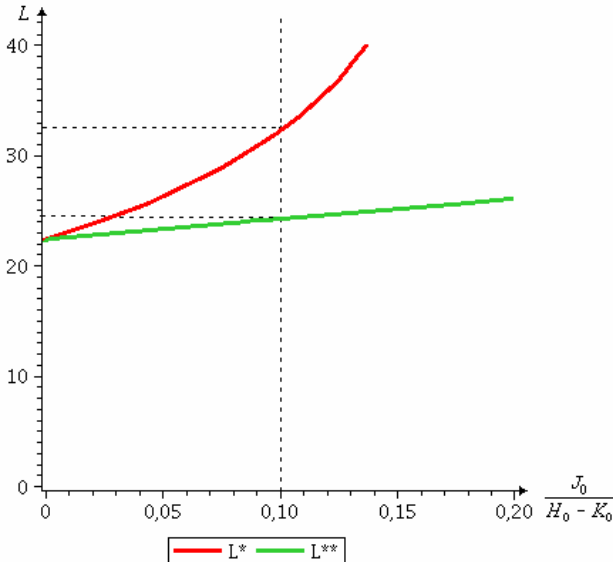
$$-(r_e - g)L^* < -(r_e - g)L^{**} ,$$

ahonnan

$$L^* > L^{**} .$$

Összefoglalva tehát azt kapjuk, hogy a kvázi-hiperbolikus egyenletet igazgató  $L^{**}$  mindenképpen kisebb, mint az exponenciális egyenletet igazgató  $L^*$ . Ha az optimális szabadalmi idő meghatározásánál figyelembe akarjuk venni, hogy a fogyasztók a jövőbeli hasznokat nem exponenciális módon diszkontálják, akkor ceteris paribus egy rövidebb szabadalmi élettartamot kell meghatározni, mintha exponenciális diszkontálást tételeznénk fel róluk. Az első feltevés tehát bebizonyosodott,  $W_h(L)$  jólétet más  $L$  maximalizálja, mint a  $W_e(L)$  jólétet. A második feltevés azonban nem igazolódott be, mivel a kétféle módon számított optimális szabadalmi élettartam mindig ugyanabba az irányba tér el egymástól.

Az alábbi 3. ábra az optimális szabadalmi időt mutatja az exponenciális, illetve a kvázi-hiperbolikus diszkontálást alkalmazva. Az ábrán  $L^*$  illetve  $L^{**}$  értékeit  $J_0/(H_0 + K_0)$  különböző értékeihez rendelve ábrázoltam, miközben rögzítettem a növekedési ütem, illetve a diszkontálási paraméterek értékeit  $g = 0,02$ ,  $r_e = 0,085$  és  $r_h = 0,045$  értéken. Egy fontos probléma a kvázi-hiperbolikus modellel kapcsolatban itt említendő meg. Jóllehet léteznek kísérletek, melyek a modellben alkalmazott hosszú távú kamatlábat becslik meg, ez a kamatláb változhat döntéshozóról döntéshozóra, vagy akár a döntési helyzettől függően is. Míg az exponenciális kamatlábat kezelhetjük mindenki és minden döntési helyzet számára állandó nagyságú adottságként, a kvázi-hiperbolikus kamatlábat aligha. Kérdéses, hogy aggregálható-e valahogyan a különböző döntéshozók által hosszú távon alkalmazott kamatláb, értelmezhető-e össztársadalmi szinten annak nagysága. Az általam használt paraméterek változása függvények egymáshoz való viszonyát nem változtatja meg mindaddig, amíg teljesülnek a modell feltevései, vagyis hogy  $r_e > r_h > g > 0$ .



3. ábra. Az optimális szabadalmi élettartam hossza exponenciális, illetve kvázi-hiperbolikus diszkontálás mellett. *Forrás:* saját szerkesztés

Az optimális szabadalmi idő meghatározásánál döntő tényező  $J_0/(H_0 + K_0)$ , a Duffy által társadalmi többlet-hányadnak (Social surplus ratio, Duffy 2005, 13. o.) nevezett mutató. Ez az innovációból a társadalom által elsajátítható túlsorduló hasznokkal van kapcsolatban. Az innováció időszakonként  $J(t)$  többlethasznot hoz az innováció időpontjától kezdődően, és további  $H(t) + K(t)$  többlethasznot a szabadalom lejártától kezdve: e kettő aránya a társadalmi többlet-hányad. Ez a mutató nulla értéket vesz föl, ha  $J_0 = 0$ , vagyis hogyha a találmányból extern hasznok nem származnak: az újítás a szabadalmi védelem időszaka alatt csak az innovátornál eredményez bevételeket. Ekkor az innováció összes előnye a fogyasztók számára csak a szabadalom lejárta után jelentkezik. Ennek az összes előnynek a jelenértéke pedig mind az exponenciális, mind a kvázi-hiperbolikus diszkontálást használva a fent említett  $L_{\min}^*$  minimálisan optimális szabadalmi idő esetében lesz maximális. Ez indokolja, hogy a 3. ábrán mindkét függvény függőleges tengelymetszete éppen a Duffy (2005, 12. o.) által meghatározott  $L_{\min}^* = (\ln r - \ln g)/(r - g)$ , a paraméterek általam rögzített értékei mellett 22,26 év. A társadalmi többlet-hányad növekedése azt jelenti, hogy egyre nagyobb a szabadalom élettartama alatt megszerezhető hasznok nagysága a szabadalom lejárta után szerezhető többlethasznokhoz képest, vagyis annál érdemesebb siettetni az innovációt. Ennek megfelelően az ábrán a társadalmi többlet-hányad növekedése mind az exponenciális, mind a kvázi-hiperbolikus diszkontálás esetén növeli az optimális szabadalmi élettartamot. A társadalmi többlet-hányadról Duffy azt írja (13. o.), hogy az általa használt modellben, ahol úgynevezett „run-of-the-mill” folyamat-innovációkat vizsgál, ennek a nagysága általában nullához közeli. Az ilyen innovációk esetében egy már létező technológián hajtanak végre valamilyen kis lépésnyi fejlesztést, és a

hatékonyabb technológia verseng a már meglévővel. A kvázi-hiperbolikus modell bevezetése és a rá jellemző alacsonyabb hosszú távú kamatláb alkalmazása ceteris paribus csökkenti az optimális szabadalmi élettartamot, az exponenciális modell alkalmazásával kapott optimális élettartamhoz képest. Megmutatható ugyanakkor, hogy az exponenciális modellnél maradván, és abban csökkentve a kamatlábat, az optimális szabadalmi idő növekedne. A különbség tehát minőségi, nem csupán az alkalmazott alacsonyabb kamatláb okozza. Az ábrán bejelöltem a társadalmi többlet-hányad egy tetszőleges értékét, ezen értéknél a két függvényérték közti különbség mutatja meg, hogy mennyivel tér el egymástól  $L^*$  és  $L^{**}$ . Ahogyan a számítások is igazolták, tetszőleges pozitív társadalmi többlet-hányad esetén fennáll, hogy  $L^* > L^{**}$ .

A jelenség magyarázata a kvázi-hiperbolikus diszkontálás időben növekvő türelmességében rejlik.  $L$  növelése  $L_{\min}^*$  fölé korábbra hozza az innováció idejét, míg távolabbra tolja a szabadalom lejártának idejét. Visszatekintve a 2. ábrára az  $L^*$  értékét úgy kaptuk meg  $L_{\min}^*$ -hez képest, hogy addig növeltük a szabadalmi védelem időtartamát, amíg a növelésből származó költségek jelenértéke meg nem egyezett a növelésből származó hasznok jelenértékével. A kvázi-hiperbolikus esetben azonban ezeket az időben később jelentkező költségeket a hosszú távú nagyobb türelem miatt gyengébben, míg az időben közelebb jelentkező hasznokat a rövid távú nagyobb türelmetlenség miatt erősebben diszkontáljuk, mint az exponenciális esetben. Ezért tehát az  $L$  növeléséből származó hasznok és költségek jelenértéke csak egy  $L^*$ -nál kisebb  $L^{**}$  esetén lehet egyenlő.

Duffy tanulmányában több indokot is felsorol, amely miatt mégis érdemes a szabadalom élettartamát a minimálisan optimális szabadalmi élettartamban meghatározni a ténylegesen optimális mellett. Az egyik indoka éppen az említett társadalmi többlet-hányad nehéz meghatározása, főleg amennyiben ezt egy „átlagos” innovációra kell meghatározni. Másik érve, hogy megmutatható a modelltől, hogy  $L_{\min}^*$  esetén az elérhető társadalmi jólét legalább 70%-a az  $L^*$  esetén, tehát elvileg maximálisan elérhető társadalmi jólétnek. Ha a kvázi-hiperbolikus diszkontálást alkalmazó modell optimális szabadalmi élettartama  $L^{**} < L^*$ , akkor ez az arány vélhetően még kedvezőbb. Ha a kvázi-hiperbolikus diszkontálási modellt pozitív és nem normatív modellként alkalmazzuk, akkor a jelen cikk tanulsága az optimális szabadalmak Duffy-féle modelljére nézve az, hogy a minimálisan optimális szabadalmi élettartamot alkalmazva a tényleges társadalmi jólét maximumától kevesebbel térünk el, mint azt az exponenciális modell alkalmazása sugallná.

## 6 Összegzés

A magatartás-gazdaságtani kutatások azt mutatják, hogy a fogyasztók a pénz időértékét máshogyan kezelik, mint a hagyományos modellek azt feltételezik. Az emberek fejében lezajló mentális diszkontálás az exponenciális modell helyett jobban megmagyarázható más, alternatív modellekkel. A nem exponenciális diszkontálás egyik tünete az időbeli inkonzisztencia, mely a halo-

gátás problémáját okozza, és amely visszavezethető a fogyasztók rövid távú nagyobb türelmetlensége és hosszú távú nagyobb türelme közötti konfliktusra. A tanulmány megmutatja, hogy egy alternatív diszkontálási modell, mint amilyen a kvázi-hiperbolikus, hogyan változtatja meg a jövőbeli hasznosságok, illetve hasznosságáramlások jelenértékét. A tanulmány célja, hogy a bemutatott különbözőséget beépítse egy nagyobb elméletbe. Az optimális szabadalmak elméletén keresztül szemléltettem, hogy hogyan ragadható meg a gazdaságpolitika szempontjából annak jelentősége, hogy exponenciális vagy kvázi-hiperbolikus diszkontálást tételezünk fel a fogyasztókról. Bemutattam, hogy egy innovációból származó, nem pénzben megjelenő többlethasznokat kvázi-hiperbolikusan diszkontálva a megállapítandó optimális szabadalmi idő ceteris paribus alacsonyabb lesz, mintha a pénzbeli hasznokra alkalmazott exponenciális diszkontálást használnánk.

Az optimális szabadalmak elmélete azonban csak egy a számos lehetséges alkalmazási terület közül. A tanulmányban felvetett optimalizációs probléma egy általánosabb tárgykör, a Ramsey-problémák egy fajtája. A Ramsey-problémák során a kormányzat úgy igyekszik valamilyen cselekvési paraméter optimális nagyságának meghatározására, hogy bizonyos korlátozó feltételek mellett maximális társadalmi jólét legyen elérhető. Az általam bemutatotthoz hasonlóan tehát a kvázi-hiperbolikus diszkontálás beépíthető akár olyan területeken is, mint az optimális adópolitika vagy a zsúfoltságra hajlamos javak optimális szabályozása.

## Irodalom

1. Ainslie, G. (1992): *Picoeconomics: The Strategic Interaction of Successive Motivational States within the Person*. New York, Cambridge University Press.
2. Angeletos, G-M. – D. Laibson – A. Repetto – J. Tobacman – S. Weinberg (2001): The Hyperbolic Consumption Model: Calibration, Simulation and Empirical Evaluation. *Journal of Economic Perspectives* 15(3), 47–69.
3. Cropper, M. – Laibson, D. (1998): *The Implications of Hyperbolic Discounting for Project Evaluation*. World Bank, Policy Research Working Paper No. 1943.
4. Duffy, J. F. (2005): *A Minimum Optimal Patent Term*. Law and Technology Scholarship, elérhető online: <http://www.escholarship.org/uc/item/9zs6f4cv>
5. Fisher, I. (1930): *The Theory of Interest*. New York, Macmillan.
6. Frederick, S. – G. Loewenstein – T. O'Donoghue (2002): Time Discounting and Time Preference: A Critical Review. *Journal of Economic Literature*, XL(June), 351–401.
7. Kirby, K. – R. J. Herrnstein (1995): Preference Reversals Due to Myopic Discounting of Delayed Reward. *Psychological Science* 6(2), 83–89.
8. Laibson, D. (1996): *Hyperbolic Discount Functions, Undersaving and Saving Policy*. NBER working paper No. 5635.
9. Laibson, D. (1997): Golden Eggs and Hyperbolic Discounting. *Quarterly Journal of Economics* 112(2), 443–477.
10. Laibson, D. – A. Repetto – J. Tobacman (2007): *Estimating Discount Functions with Consumption Choices over the Lifecycle*. NBER working paper No. 13314

11. Lippai L. (2009): Az intertemporális diszkontálási folyamatok jelentősége a fogyasztói döntésekben. *Közgazdasági Szemle* LVI. évf., 689–708.
12. Lippai L. (2010): Fogyasztói önkontrollt igénylő döntések empirikus vizsgálata. *Közgazdasági Szemle* LVII. évf., 700–714.
13. Loewenstein, G. – D. Prelec (1992): Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation. *Quarterly Journal of Economics* 107(2), 573–597.
14. Mulligan, C. B. (1996): *A logical economist's argument against hyperbolic discounting*. Working Paper, University of Chicago.
15. Nagy B. (2008): A szabadalmak közgazdasági vizsgálatáról. In: Lengyel Imre – Lukovics Miklós (szerk.): *Kérdőjelek a régiók gazdasági fejlődésében*. JATE-Press, Szeged, 91–106.
16. Nordhaus, W. D. (1967): *The Optimal Life of a Patent*. Cowles Foundation Discussion Papers 241. New Haven.
17. Phelps, E. S. – R. A. Pollak (1968): On second-best national saving and game-equilibrium growth. *Review of Economic Studies* 35, 185–199.
18. Rachlin, H. (2006): Notes on discounting. *Journal of the Experimental Analysis of Behaviour* 85(3), 425–435.
19. Read, D. (2001): Is Time-Discounting Hyperbolic or Subadditive? *Journal of Risk and Uncertainty* 23(1), 5–32.
20. Read, D. (2003): *Intertemporal Choice*. Working Paper. Internetcím: <http://eprints.lse.ac.uk/22769/1/03058.pdf>. letöltve: 2010. okt. 20.
21. Samuelson, P. A. (1937): A Note on Measurement of Utility. *The Review of Economic Studies* 4, 155–161.
22. Strotz, R. H. (1956): Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization. *The Review of Economic Studies* 23(3), 165–180.
23. Thaler, R. (1981): Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency. *Economic Letters* 8(3), 201–207.
24. Trope, Y. – N. Liberman (2003): Temporal Construal Theory of Time-Dependent Preferences. In: Brocas, I. – Carrillo J. D. (szerk.): *The Psychology of Economic Decisions*. Volume I. Oxford, OUP, 235–249.

#### APPLYING QUASI-HYPERBOLIC DISCOUNTING TO THE THEORY OF OPTIMAL PATENTS

Economic policy-making often entails trade-offs of immediate costs and long-run benefits or immediate benefits and long-run costs. Neoclassical economics has a tool for such decisions: present and future value calculations and the net present value rule. Experimental economics, however, has criticised exponential discounting used for these calculations. Based on experiments they propose, in the sense of more psychological realism, alternatives to the exponential model: hyperbolic and quasi-hyperbolic models. These alternative discounting models may offer explanation for the time-inconsistent behaviour of consumers, when they change their decision or valuation solely because of time elapsing. The aim of this paper is twofold. First it aims at reviewing the various discounting models and the connections between them and at pointing out that their differences can give rise to differences in comparing the present value of single pay-offs, and an even more empathic difference when

used for calculating present value from flows of yields. The literature has not yet applied the hyperbolic and quasi-hyperbolic models to this field. Second it aims at showing the relevance of the difference between discounting models to economic policy. I will show, using the theory of optimal patents, that applying a non-exponential discounting model will result in a different optimal patent life, and thereby a different recommendation for economic policy-makers.

*Keywords:* quasi-hyperbolic discounting, optimal patents, annuity

# CONTENTS

ÁGOSTON, KOLOS CSABA: Cash Flow Management with glpk Software.....	1
FARAGÓ, MIKLÓS: Expected Duration of Marriage and of Post-Marital Survival ..	21
KOSZTYÁN, ZSOLT TIBOR – HEGEDŰS, CSABA: Risk-based Measurement Uncertainty Treating in Industrial Conformance Assessment Decisions .....	43
NAGY, BENEDEK: Applying Quasi-hyperbolic Discounting to the Theory of Optimal Patents .....	57

# TARTALOM

ÁGOSTON KOLOS CSABA: Készpénz optimalizálás glpk program használatával...	1
FARAGÓ MIKLÓS: A házasságok várható tartama és túlélése.....	21
KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR – HEGEDŰS CSABA: A mérési bizonytalanság kockázat alapú kezelése megfelelőségi döntésekben ipari körülmények között.....	43
NAGY BENEDEK: A kvázi-hiperbolikus diszkontálás alkalmazása az optimális szabadalmak elméletében.....	57



# SZIGMA

## Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

BESSENYEI ISTVÁN

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: [essenyei@ktk.pte.hu](mailto:essenyei@ktk.pte.hu)

Társszerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

e-mail: [fulop@oplab.sztaki.hu](mailto:fulop@oplab.sztaki.hu)

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: [laszlo.hunyadi@office.ksh.hu](mailto:laszlo.hunyadi@office.ksh.hu)

KOMLÓSI SÁNDOR

e-mail: [komlosi@ktk.pte.hu](mailto:komlosi@ktk.pte.hu)

KOVÁCS ERZSÉBET

e-mail: [erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu](mailto:erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu)

VÍZVÁRI BÉLA

e-mail: [vizvari@cs.elte.hu](mailto:vizvari@cs.elte.hu)

Szerkesztőbizottság:

CSERHÁTI ILONA, FORGÓ FERENC, LIGETI CSÁK, MELLÁR TAMÁS,  
MESZÉNA GYÖRGY, SISAKNÉ FEKETE ZSUZSA, SZÉP KATALIN,  
TEMESI JÓZSEF, VÖRÖS JÓZSEF

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA  
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

[www.sigma.ktk.pte.hu](http://www.sigma.ktk.pte.hu)