TÁBLÁZATOK ADATVÉDELME ÉS GRÁF OPTIMALIZÁCIÓ[1]

FARAGÓ MIKLÓS
Központi Statisztikai Hivatal

Ebben a cikkben az adatvédelem egy régi problémáját helyezzük új megvilágításba. Két dimenziós táblázatok publikálásakor az adatszolgáltató bizonyos érzékeny cellákat ,,letakar", azonban e cellák némelyikének tartalma a közölt többi cellaértékből és a sor- és oszlopösszesenekből esetenként kiszámítható. Cellahelyek egy halmazát védettnek nevezzük, ha azt letakarva egyik cella értéke sem számítható ki egyértelműen. A cellahelyeket rácspontokként kezelve először elemi eszközökkel karakterizáljuk a védett halmazokat, mint ortogonális sokszögek csúcshalmazainak unióit. A védettségre több szükséges és elégséges feltételt is adunk, feltárjuk a védett halmazok hierarchiáját és érdekes tulajdonságaikat. Ha egy halmaz nem védett, akkor ki kell egészíteni újabb, minimális számú, másodlagosan letakart elemmel. Az irodalomban ezt ,,secondary suppression"-nak nevezik. Gusfield (1988) és mások megoldották az optimalizációs problémát úgy, hogy a táblázat cellahely halmazait bijektíve megfeleltették páros gráfoknak és az így előállt feladatra —bővítsünk egy páros gráfot minimális számú él hozzáadásával hídélmentes páros gráffá— lineáris idejű algoritmust adtak. Mi egy új, egyszerű, lineáris idejű algoritmust adunk erre a gráf bővítési feladatra.

Bevezetés

Az adatvédelem egyik tipikus problémája, hogy egy számokat tartalmazó táblázat kibocsátója a táblázat néhány elemét nem kívánja közölni és ezért azokat ,,letakarja" (egy egyezményes karaktert, pl. ,,x"-et ír a helyébe). Azonban mivel a sorok, illetve oszlopok összegét, a ,,peremeket" hiánytalanul mellékeli, a letakart számok a peremekből esetleg mégis egyértelműen kiszámíthatók, hiszen minden letakart elemet tartalmazó sorra és oszlopra fel lehet írni egy-egy egyenletet. A felfedhetőséget, azaz az egyértelmű kiszámíthatóságot viszont meg lehet akadályozni pótlólagosan kiválasztott elemek letakarásával, ezzel ,,megvédve" az eredeti számokat. A cél, mint általában az adatvédelemben, az egyértelműség megakadályozása. Ha a letakart cella csupán egyetlen értéket vehet fel, a letakarás értelmetlen. A probléma első látásra is egészértékű lineáris algebrai megközelítést sugall, és valóban ez is a legelterjedtebb kezelési módja, azonban semmiképp sem a leggyorsabb.

Az első feladat megállapítani a letakart cellákról, hogy van-e közöttük felfedhető. Ha igen, akkor újabb elemeket kell letakarni (,,secondary suppres-

[1]Beérkezett: 2010. március 16. E-mail: `faragomik@t-online.hu`.

sion"), lehetőleg minél kevesebbet, úgy, hogy a kibővített cellahalmaz egyik értéke se legyen egyértelműen kiszámítható. A táblázat celláihoz bizonyos esetekben súlyokat lehet rendelni, melyek a cella letakarásával elvesző információt mérik. Ilyenkor érdemes a másodlagosan letakart cellák számának összege helyett a súlyok összegét minimalizálni. Esweran és Tarjan (1976) belátták, hogy —már két különböző súly esetén is— a probléma (gráfelméleti megfelelője) NP-teljes. Szokásos még a minimum feladathoz csatolni azt a gyakorlatban általában teljesülő feltételt, hogy a letakart számok nemnegatívak. Ekkor egyes felfedhetetlen cellák nyilván felfedhetővé minősülnek. A dolgozat ezt a feltételt nem tárgyalja.

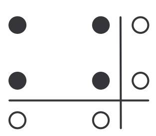
Kiderül, hogy a cellák felfedhetősége nem függ a cellák értékeitől, csak a cellahelyek halmazának ,,alakjától". Az 1. fejezet a védett halmazok geometriai karakterizálásával és tulajdonságaik feltérképezésével foglalkozik, a 2. fejezet pedig —gráfelméleti eszközökkel— egy lineáris idejű algoritmust ad az optimális bővítésre.

Gyakorlati szempontból szerencsésnek bizonyult az a körülmény, hogy a szerző ,,későn" vette észre a cellahely halmazok és a páros gráfok közötti megfelelést, így a védett halmazok karakterizációját közvetlenül adta meg, ellentétben más szerzőkkel (Gusfield, 1988). Ez pedig annyira egyszerűnek és szemléletesnek bizonyult, hogy alkalmazásával egy szokásos méretű táblázat közreadója, pl. egy statisztikai hivatal dolgozója gráfelméleti ismeretek és speciális szoftverek nélkül is könnyen, ,,szemre", megtalálja a védendő halmaz valóban védett elemeinek jó részét. A többit pedig egy az optimumhoz közeli méretű védett halmazzal lefedi.

1 A védett halmazok

Könnyű belátni, hogy ha egy legalább 2×2-es táblázat összes ,,belső" elemét letakarjuk, akkor egyikük értéke sem számítható ki egyértelműen a sor- és oszlopösszesenekből.

Vizsgáljunk meg például egy 2×2-es táblázatot:



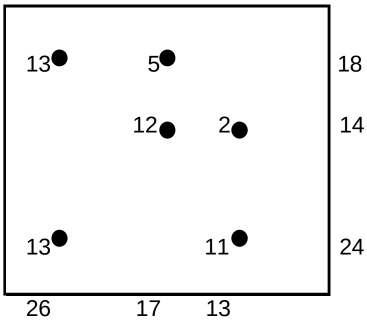
100	100	200
100	100	200
200	200	

101	99	200
99	101	200
200	200	

Világos egyrészt, hogy ha a négy belső elem valamelyikét nem takarjuk le, akkor a letakartak mind egyértelműen kiszámíthatók egy-egy kivonással. Másrészt ha mindet letakarjuk, akkor egyiket sem lehet egyértelműen kiszámítani, ugyanis ha egy számnégyes ,,kiadja" az összeseneket, akkor az a számnégyes is, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti egyik ,,átlóját" alkotó két elemet megnöveljük egy tetszőleges c konstanssal, a másik kettőt pedig $-c$-vel.

Ez az észrevétel a dolgozat kiindulópontja. Az *1. ábra* általánosan mutatja a problémát. Jó lenne, ha a letakart, szürkével jelzett számok egyike sem lehetne egyértelműen rekonstruálható a többiből, beleértve az összeseneket is.

14	4	12	2	10	6	14	4	14	80
6	13	7	6	5	12	1	7	16	73
12	8	1	12	10	13	6	16	3	81
5	13	1	15	12	9	2	5	13	75
8	4	9	14	10	13	2	7	10	77
2	6	15	7	8	4	9	5	13	69
7	13	8	7	11	15	11	7	9	88
10	7	9	15	14	13	1	15	5	89
64	68	62	78	80	85	46	66	83	



1. ábra.

A szürke cellák tartalmának egyértelműségéhez elegendő vizsgálni a jobb oldali ábrát, a többi szám nyilván redundáns. Amint azt látni fogjuk, a letakart hat cella mindegyike felvehet több értéket, azonban, ha a 11-est tartalmazó cellát nem takarnánk le (ekkor a 24 és 13 összesen értékek helyett rendre 13 és 2 állna), akkor a többi cella egyetlen értéket vehetne fel, azt, amelyet tartalmaz. Valójában bármelyik cellát felfedve, a másik öt egyértelműen adódik.

A jobb oldali ábra ráadásul már tükrözi azt a ponthalmaz szemléletet, amelyet alkalmazni fogunk, ugyanis hamarosan kiderül, hogy a jobb oldali ábrán megmaradt számok is érdektelenek: csak a —cellákhoz rendelt— pontok egymáshoz viszonyított helyzetétől függ, hogy a cellák tartalma egyértelmű-e vagy sem — bármilyen összesenek esetén.

1. Definíció. Egy adott méretű $m \times n$-es táblázat $(m, n > 1)$ elemhelyeit *pont*oknak nevezzük. Ezeket sor-oszlop indexpárjuk tehát egyértelműen meghatározza. Ponthalmazokat fogunk vizsgálni, azaz az $X = \{(u, v) : u = 1, 2, \ldots, m; v = 1, 2, \ldots, n\}$ halmaz részhalmazait. Egy $A \subseteq X$ *ponthalmaz kitöltése* az egész táblázat számokkal való feltöltése úgy, hogy az A-n kívüli elemeket 0-val töltjük ki, azaz a következő függvény: $f^A : X \to R$, melyre $f^A(a) = 0$ $(a \notin A)$. Az $f^A(a)$ $(a \in A)$ valós szám az *a elem értéke*. Gyakran elhagyjuk a felső indexet, ha A egyértelműen adott. Az A halmaz egy f^A kitöltésének *peremoszlopa* (a „sorösszesenek") az az m hosszúságú vektor, amelynek i-edik eleme $(i = 1, \ldots, m)$ a táblázat i-edik sorába eső A-beli elemek értékeinek összege (tehát azokban a sorokban, amelyek nem tartalmaznak A-beli elemeket, a peremoszlopban nullák állnak). Hasonlóan definiáljuk f^A *peremsorát* , amely tehát A azonos oszlopba eső elemei értékének szummáiból áll. Az f^A kitöltés *pereme* a peremoszlopból és peremsorból álló $P = (P_1, P_2)$ rendezett pár. Azt mondjuk, hogy az f^A kitöltés *P-peremű kitöltése* A-nak. Ha a perem csak 0-kat tartalmaz, akkor f^A *0-peremű kitöltése* A-nak.

Természetesen bizonyos ponthalmazokra bizonyos (P_1, P_2) párok semmilyen kitöltésnek nem peremei, mások meg többnek is. Mi a másokat kedveljük. Hiszen ha egy peremhez egy elemnek több különböző értéke is tartozik, akkor a táblázat ezen helye ,,védett a perem mellett".

2. Definíció. *Az $a \in A$ pontot védi A a P perem mellett*, ha van A-nak legalább két P-peremű kitöltése úgy, hogy a különbözőképpen van kitöltve.

Az alábbiakban a nagyon egyszerű tételek esetében ,,Tétel" helyett ,,Állítás"-t írunk. A következő állításból kiderül, hogy a védelem mindig ,,univerzális".

1. Állítás. *Ha az a pontot védi A valamely P perem mellett, akkor bármely másik P' perem mellett is.*

Valóban, legyen f_1 és f_2 két P-peremű kitöltése A-nak, melyekre $f_1(a) \neq f_2(a)$, továbbá legyen valamely g_1 kitöltés pereme $P' \neq P$. Akkor $g_2 = g_1 + f_2 - f_1$ is P' peremű kitöltés, mivel $f_2 - f_1$ 0-peremű, és nyilván $g_2(a) \neq g_1(a)$. Értelmes tehát a következő definíció:

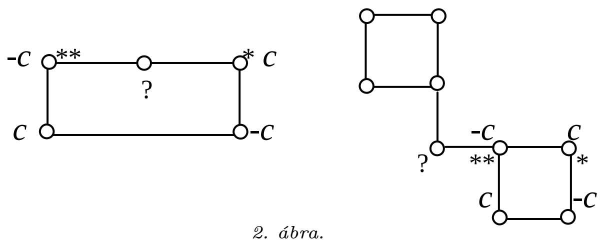
2'. Definíció. *Az $a \in A$ pontot védi A*, ha van A-nak legalább két *azonos* peremű kitöltése úgy, hogy a különbözőképpen van kitöltve. *Az A halmaz védi egy B részhalmazát* , ha B minden pontját védi. Ha tehát a-t védi A és az X táblázatban A-t ,,letakarjuk", akkor a-t nem lehet egyértelműen kiszámítani semmilyen peremből.

2. Állítás. *Az $a \in A$ pontot akkor és csak akkor védi A, ha létezik A-nak 0-peremű kitöltése úgy, hogy a helyére tetszőleges, előre adott, 0-tól különböző számot (például 1-et) írunk.*

Valóban, ha f_1 és f_2 a 2' Definícióban szereplő két kitöltése A-nak, azaz megegyező pereműek és $f_1(a) \neq f_2(a)$, akkor $f = c(f_1 - f_2)/[f_1(a) - f_2(a)]$ $(c \in R)$ egy 0-peremű kitöltés, melyre $f(a) = c$. Fordítva pedig, ha f egy 0-peremű kitöltése A-nak, melyre $f(a) \neq 0$, akkor bármely $c \neq 1$-re cf is 0-peremű kitöltése A-nak és $cf(a) \neq f(a)$.

3. Definíció. *Az A halmaz védett, ha védi önmagát.* Ez azt jelenti, hogy letakarásával egyik eleme sem számítható ki a peremből.

Az alábbi két halmaz összes eleme védett egy kivétellel, a ?-lel jelölt pontok ugyanis egyetlen értéket vehetnek csupán fel, akárhogyan töltjük a többit. Például bármely 0-peremű kitöltése esetén, ha a *-gal jelölt elem értéke c, akkor a **-gal jelölt elem csak $-c$ lehet, tehát a ? helyére mindig csak 0 kerülhet.



2. ábra.

Nyilvánvalóak továbbá az alábbi állítások:

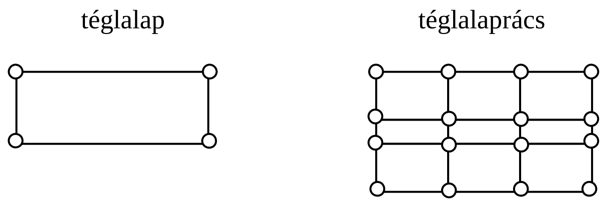
3. Állítás. *Ha a egyedüli A-beliként áll egy sorban, akkor A nem védi a*-t. *Tehát kell, hogy legyen még vele egy sorban és egy oszlopban is egy-egy elem. Sőt, ezeket is védeni kell*, ezért:

4. Állítás. *Legalább 4 pontból kell állnia A-nak ahhoz, hogy legyen védett eleme.*

5. Állítás. *Ha a-t védi A, akkor bármely A-nál bővebb halmaz is védi. Ha a-t védi A, de b-t ($b \in A$) nem védi, akkor $A \setminus \{b\}$ is védi a-t.* Az állítás első feléből következik:

6. Állítás. *Védett halmazok uniója is védett*, mert ha A és B egyaránt védi minden saját elemét, akkor az 5. Állítás miatt $A \cup B$ is védi őket.

4. Definíció. *Téglalapnak* nevezzük azt a pontnégyest, amelynek elemei pontosan két sorba és két oszlopba esnek. *Téglalaprácsnak* nevezzük azt a $k \cdot l$ pontból álló $(k, l > 1)$ halmazt, amelynek elemei k számú sorban és l számú oszlopban helyezkednek el.



3. ábra.

7. Állítás. *Ha A téglalap, akkor védett.*

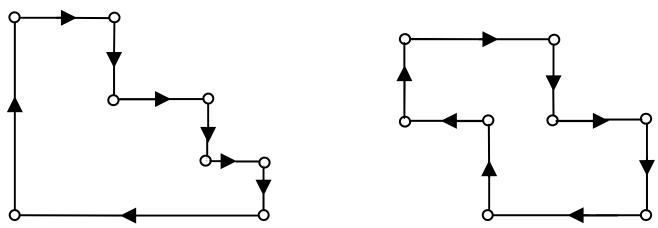
Ugyanis tekintsük A egy kitöltését. Ekkor ha a főátló két végpontjának értékét c-vel megnöveljük, a másik két pontét pedig c-vel csökkentjük, akkor a perem nem változik.

8. Állítás. *Egy téglalaprács is védett*, mivel téglalapok uniója.

A téglalap általánosításaként bevezetünk egy alapvető halmaztípust.

5. Definíció. Egy A halmaz *ciklus*, ha pontjai egy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ismétlődés nélküli sorozatba rendezhetők úgy, hogy bármely (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) egymást követő elemhármasára ($i = 1, \ldots, n-1$ és $a_{n+1} = a_1$) fennáll, hogy a_i és a_{i+1} egy sorban (oszlopban) van, a_{i+1} és a_{i+2} pedig egy oszlopban (sorban).

Azaz A egy gráfnak tekinthető, mégpedig egy olyan körnek, amelynek egymást követő élei —melyek az egymást követő pontokat kötik össze— a táblázatban merőlegesek egymásra. Ha a fenti definícióban nem kötjük ki $a_{n+1} = a_1$-et, akkor az A halmaz egy *út* a_1 *és* a_{n+1} *között.*



4. ábra.

1. Tétel. *Ha az A halmaz ciklus, akkor védett.*

Bizonyítás. Legyen adott A egy f_1 kitöltése, azaz adottak az $f_1(a_i)$ értékek ($a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$). Most konstruálunk egy másik ugyanolyan peremű kitöltését A-nak, amely minden a_i-hoz egy másik értéket rendel. Adjunk hozzá A értékeihez —a kör mentén haladva— váltakozva c-t és $-c$-t ($c > 0$), azaz legyen $f_2(a_i) = f_1(a_i) + c(-1)^{i+1}$, ($i = 1, \ldots, n$). Könnyen látható, hogy $f_2(a_1)$ és $f_2(a_n)$ kitöltése mindig különbözik. És mivel A peremoszlopának minden eleme $f_2(a_{2k+1}) + f_2(a_{2k+2})$ alakú kifejezések — azaz $f_2(a_{2k+1}) + f_2(a_{2k+2}) + c - c$ értékűek— összegeként áll elő (ha például vízszintesen indultunk el a_1-ből), tehát a peremoszlop (és hasonlóan a peremsor) értéke megegyezik a két kitöltés esetén. □

6. Definíció. Az A halmaz egy f kitöltése *tökéletes kitöltése* A-nak, ha 0-peremű kitöltés és $f(a) \neq 0$, $\forall a \in A$.

2. Tétel. *Egy A halmaz akkor és csak akkor védett, ha van tökéletes kitöltése.*

Bizonyítás. A 2. Állítás szerint elég csak az egyik irányt igazolni. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ védett halmaz. Ekkor léteznek A-nak olyan 0-peremű $f_1, f_2, \ldots, f_n$, kitöltései, melyekre $f_i(a_i,) \neq 0$, $a_i \in A$. A $g = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$ ($c_i \in R$) kitöltés tökéletes, feltéve, hogy a c_i együtthatók úgy vannak választva, hogy $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_k f_k$ és $c_{k+1} f_{k+1}$ az $\{ a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \}$ halmazhoz két diszjunkt halmazt rendel ($k = 1, \ldots, n-1$). Ez elérhető például akkor, ha c_{k+1}/c_k elég nagy ($k = 1, \ldots, n-1$). Ha ugyanis $c_{k+1} f_{k+1}$ az $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ helyeken felvett legkisebb abszolút értékű zérustól különböző értéke nagyobb, mint $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_k f_k$ legnagyobb abszolút értékű felvett értéke, akkor $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_k f_{k+1}$ zérustól különbözik ezeken a helyeken. Egy ennél jóval „gazdaságosabb" konstrukciót tartalmaz a 6. Tétel 2. következménye. □

7. Definíció. Egy védett halmaz *minimális védett halmaz*, ha nincs védett valódi részhalmaza.

3. Tétel. *Egy védett halmaz akkor és csak akkor minimális védett halmaz, ha minden tökéletes kitöltése egyetlen tökéletes kitöltés skalárszorosa.*

Bizonyítás. Egyrészt legyenek A és B, $B \subset A$ védett halmazok és f^A, f^B egy-egy tökéletes kitöltésük. Ekkor bármely olyan $c \in R$-re, amelyre teljesül, hogy minden $a \in A$-ra $cf^B(a) \neq -f^A(a)$, $cf^B + f^A$ A-nak egy f^A-tól „lényegesen különböző” (nem skalárszorzóban eltérő) tökéletes kitöltése. E feltételt kielégíti minden elég nagy c, mégpedig: $c > \max_{a\in A} f^A(a)/\min_{a\in A} f^B(a)$.

Másrészt legyen f és g két lényegesen különböző tökéletes kitöltése A-nak. Ekkor tetszőleges rögzített $a \in A$-ra alkalmas c esetén $f(a) = cg(a)$ és létezik $a' \in A$, melyre $f(a') \neq cg(a')$. Így a 0-peremű $h = f - cg$ kitöltésre teljesül $h(a) = 0$ és $h(a') \neq 0$. Tehát A-nak azon $A_{a,a'}$ részhalmaza, amelyhez h 0-tól különböző értéket rendel, nemüres és A-nak valódi része. És mivel h tökéletes kitöltése $A_{a,a'}$-nek, a 2. Tétel szerint $A_{a,a'}$ védett halmaz. Tehát A nem minimális. □

8. Definíció. Az A és B halmazokat *független halmazoknak* nevezzük, ha A elemei „nem látják” B elemeit, azaz nincs olyan $a \in A$ és $b \in B$, amelyek egy sorba, vagy egy oszlopba esnek. Egy halmaz *összefüggő*, ha nem bontható fel független halmazok uniójára.

Független halmazok tehát diszjunktak is. Nyilvánvaló, hogy az A halmaz akkor és csak összefüggő, ha bármely két pontja között van A pontjaiból álló út. (Lásd az 5. definíció végét.)

9. Definíció. Egy halmazt *páros halmaznak* nevezünk, ha az X táblázat minden sorából és oszlopából páros számú elemet tartalmaz.

9. Állítás. *Minden ciklus konstrukciójából adódóan összefüggő és páros.*

10. Állítás. *Ha C páros és $C = A \cup B$, A és B függetlenek, akkor A és B is páros halmaz.*

Ha ugyanis vagy A vagy B nem páros és függetlenek, akkor C sem lehet páros.

11. Állítás. *Ha C védett és $C = A \cup B$, A és B függetlenek, akkor A és B is védett halmaz.*

A 2. Tételből, hiszen ha például A-nak nincs tökéletes kitöltése, akkor $A \cup B$-nek sincs.

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy a „ciklus” és a „páros” tulajdonság lényegében ekvivalensek.

4. Tétel. *Az X táblázat egy A halmaza akkor és csak akkor páros, ha előáll diszjunkt ciklusok uniójaként. Ekkor tehát A védett.*

Bizonyítás. A 9. Állítás miatt és mert diszjunkt páros halmazok uniója páros halmaz, csak az egyik irányt kell igazolni, továbbá a 11. Állítás miatt elegendő a tételt összefüggő A halmazra belátni.

Legyen tehát A összefüggő páros halmaz és kezdjünk el lépdelni az elemein egy utat bejárva, azaz egy tetszőleges a_1-ből —mondjuk vízszintesen— kiindulva ismétlés nélkül és váltakozó irányban, azaz a_i és a_{i+1} minden $i \in N$-re vagy egy sorban vagy egy oszlopban van, azonban a_i, a_{i+1} és a_{i+2} már nem esik sem egy sorba sem egy oszlopba. Ez a sorozat A páros volta miatt addig nem akad el, amíg $a_{n+1} = a_1$-hez nem értünk — függőlegesen. Mivel a „felsorolt” B_1 halmaz páros, sőt ciklus, a maradék $A \setminus B_1$ is páros. Így ennek bármelyik eleméből kiindulva az eljárás megismételhető és folytatható egészen addig, amíg A elemei el nem fogynak. A keletkezett B_j halmazok ciklusok, páronként diszjunktak, továbbá teljesül $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$. □

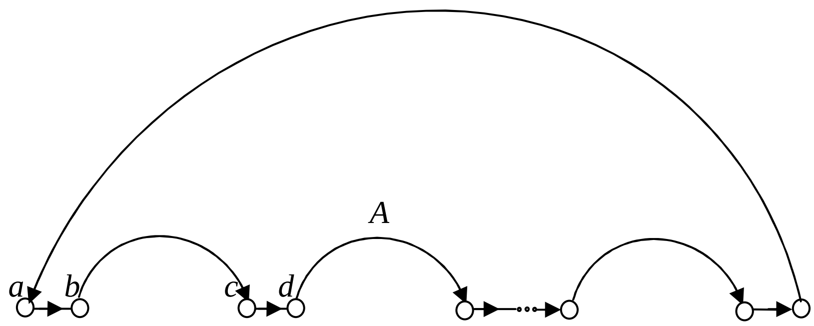
10. Definíció. Ha egy ciklus minden sora és oszlopa pontosan két elemet tartalmaz, akkor azt mondjuk, hogy a ciklus *C^2-típusú.* Ha egy ciklus nem C^2-típusú, azaz van legalább négy elemet tartalmazó sora vagy oszlopa, *akkor C^{2+}-típusú.*

Megjegyzés. Minden C^2-típusú ciklus alkalmas sor- és oszlopcserékkel lépcső alakú ortogonális sokszögekbe vihető (lásd a *4. ábra* bal oldali halmazát).

5. Tétel. *Egy ciklus akkor és csak akkor bontható fel két diszjunkt ciklus rész uniójára, ha C^{2+}-típusú.*

Bizonyítás. a) Ahhoz, hogy a diszjunkt A és B ciklusok uniója ciklus legyen, szükséges, hogy lássák egymást. Ekkor viszont lesz olyan sor vagy oszlop, amelyben $A \cup B$-nek legalább négy eleme van.

b) Essenek a C^{2+}-típusú C halmaz $a, b, c, d, \ldots$ elemei egy sorba. Könnyű meggondolni, hogy C és az őt definiáló kör az általánosság megszorítása nélkül átrajzolható az alábbi alakba, ahol az ívek ciklusokat jelölnek.



5. ábra.

Ha az *5. ábrán* látható kis ívek vagy a nagy ív bármelyikét —azaz az azt alkotó pontok együttesét, beleértve a két végpontot is— A-val jelöljük, akkor A és $B = C \setminus A$ egyaránt ciklus. □

Megjegyzés. Ráadásul az $a, b, c, d, \ldots$ elemek közül is került mindkét halmazba (páros számú) elem.

Következmény 1. *Tetszőleges ciklus és így tetszőleges páros halmaz előáll C^2-típusú páronként diszjunkt ciklusok uniójaként. (Kivéve persze, ha maga is C^2-típusú.) Ezek már nem bonthatók tovább ciklusokra.*

Az utóbbi két tételből és az iménti megjegyzésből ez közvetlenül adódik.

Megjegyzés. Ha egy ciklusból elhagyunk egy ciklust, nem biztos, hogy a megmaradt rész is ciklus (könnyen adható egy 12 elemű példa a kiinduló halmazra), azonban a maradék nyilván diszjunkt ciklusok uniója, hiszen páros halmazból párosat vettünk el.

Következmény 2. *A minimálisan védett halmazok pontosan a C^2-típusú ciklusok.*

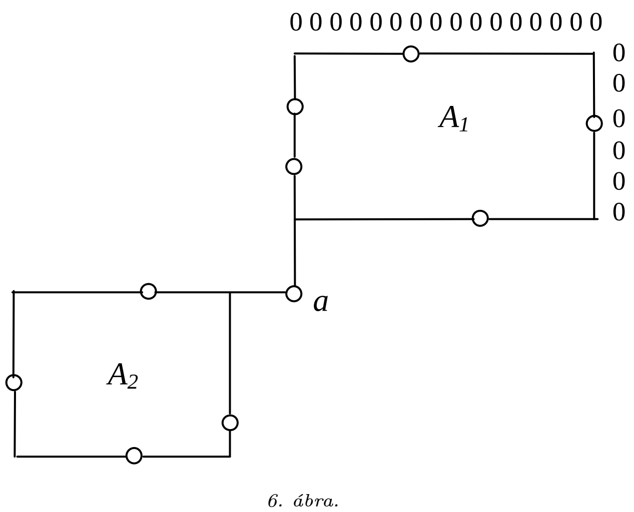
6. Tétel (felbontási/karakterizációs tétel). *Egy táblázat valamely A halmaza akkor és csak akkor védett, ha előáll ciklusok uniójaként.*

Bizonyítás. Mivel védett halmazok uniója védett halmaz, elég belátni, hogy egy védett A halmaz minden pontját tartalmazza A-nak valamely rész-ciklusa (vagy képszerűen: átmegy rajta egy ciklus). Sőt elegendő belátni a következő lemmát:

LEMMA: *Ha a-t védi A, akkor a-t tartalmazza A-nak egy részciklusa.*

Tegyük fel, hogy a nem eleme A egyetlen ciklusának sem. Ekkor legyen A_1, illetve A_2 az a-tól különböző összes olyan A-beli pontok halmaza, melyek az a-val egy oszlopba, illetve egy sorba eső pontokból (ilyenekből a 3. Állítás szerint legalább egy-egy van) elérhetőek olyan úttal, amely nem tartalmazza a-t. Ekkor az összefüggő $A' = A_1 \cup A_2 \cup \{a\} \subseteq A$ a feltétel szerint három diszjunkt halmaz uniója, ahol A_1 és A_2 függetlenek is, mivel ellenkező esetben a-t tartalmazná egy ciklus.

Könnyű elképzelni —bár a bizonyításhoz nem szükséges—, hogy A' sor- és oszlopcserékkel az *6. ábrán* látható helyzetbe hozható (a két téglalap A_1 és A_2 ,,téglalap burkát" jelöli, a ,,határpontokat" feltüntettük, a ,,belső" pontokat nem; $A \setminus A'$ nem látszik az ábrán, hiszen nincs szerepe). Ha most belátjuk, hogy A' minden 0-peremű f kitöltésére $f(a) = 0$, akkor a 2. Állítás szerint A' nem védi a-t, tehát A sem védi (mivel $A \setminus A'$ és A' függetlenek, ha az előbbi nemüres) és így igaz a lemma. Legyen tehát f egy 0-peremű kitöltése A'-nek.



6. ábra.

Ekkor az A_1 halmaz a-val egy oszlopba eső elemeinek értékösszege $s = 0$, hiszen ez az érték előáll úgy, hogy A_1 elemei sorösszegeinek (mind 0) összegéből kivonjuk az a-t nem tartalmazó oszlopok oszlopösszegeit (mind 0). Mivel f 0-peremű kitöltés, így $s + f(a) = 0$ is fennáll, azaz $f(a) = 0$. Tehát a lemma és így a tétel is igaz. □

Következmény 1. *Egy A halmaz akkor és csak akkor védett, ha előáll C^2-típusú ciklusok uniójaként.* (Az 5. Tétel alapján.)

Tehát a védett halmazok ,,tulajdonképpeni lépcsők" uniói (lásd a 10. Definíció alatti megjegyzést).

A felbontási tételből a 2. Tétel egy újabb bizonyítása adódik, a tökéletes kitöltés egy gazdaságosabb konstrukciójával:

Következmény 2. *Egy A halmaz akkor és csak akkor védett, ha van egész értékű tökéletes kitöltése.*

Bizonyítás. A 2. Állítás szerint, ha f egy tökéletes egész értékű kitöltése A-nak, akkor A védett. Fordítva, legyen a védett A halmaz az $A_1, \dots A_k$ ciklusok uniója. Jelölje f_i $(i = 1, \dots, k)$ A_i olyan kitöltését, amely A_i elemeihez c_i-t vagy $-c_i$-t rendel (a két lehetséges kitöltésből bármelyiket), ahol $c_i = 2^{i-1}$. Ekkor $f_1 + \dots + f_k$ egész értékű és tökéletes kitöltése A-nak, mivel ha $a \in A_i$, akkor $|f_1(a)| + \dots + |f_{i-1}(a)| \le 2^{i-1} - 1 < 2^{i-1} = |f_i(a)|$ $(i = 2, \dots, k)$. Ha A összefüggő, akkor a még mindig nem túl gazdaságos konstrukció szerint a kitöltött értékek abszolút értékei az $[1, 2^{k-1}]$ intervallumba eső egész számok.

A különböző tulajdonságú védett halmazok hierarchiáját összefoglalja az alábbi implikáció-séma:

téglalap $\Rightarrow$ téglalaprács $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ C^2 halmaz ($\Leftrightarrow$ minimális védett halmaz $\Leftrightarrow$ lényegében egy tökéletes kitöltése van) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ciklus ($\Leftrightarrow$ diszjunkt C^2 halmazok uniója, összefüggő) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ páros halmaz ($\Leftrightarrow$ diszjunkt C^2 halmazok uniója) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ védett halmaz ($\Leftrightarrow$ C^2 halmazok uniója $\Leftrightarrow$ van tökéletes kitöltése)

Egy példa olyan védett halmazra, mely nem páros és nem is áll elő diszjunkt ciklusok uniójaként: a 2×3-as téglalaprács.

2 A bővítési algoritmus

Az eddigiek alapján könnyen lehet gyors és ,,elég jó" algoritmusokat előállítani a bővítési feladat megoldására, azaz egy tetszőleges A halmaz védett halmazokkal való lefedésére. Például téglalapok uniójával vagy egy páros halmazzal vagy ezek kombinációjával. Ezek ráadásul gyorsan kódolható eljárások. Sőt, amint arra a bevezetőben is utaltunk, nem túl nagy méretű A esetén ,,szemre" könnyen meg lehet találni A ciklusait, azaz a védett elemeket. A többin pedig könnyen ,,átfektethetők" ciklusok néhány —a minimálishoz közeli számú— másodlagosan kijelölt pont letakarásával, számítógép használata nélkül. Ezt szemlélteti az alábbi példa:

52	25	48	60	48	9	65	24	33	43	36	89
34	38	90	49	17	68	66	66	57	1	85	66
32	49	28	65	47	18	76	27	72	39	77	31
21	43	72	80	42	85	89	26	39	19	32	19
15	8	87	86	46	89	12	31	74	34	52	65
28	29	49	51	69	35	95	88	61	80	34	7
64	12	15	1	58	35	77	73	85	42	15	19
22	35	20	20	73	43	59	78	95	20	40	61
35	19	3	84	8	30	4	8	89	61	52	65
32	27	57	15	18	68	57	17	25	34	10	34
21	89	96	57	87	54	0	60	59	18	32	73
3	48	61	85	7	50	17	73	2	24	61	47

52	25	48	60	48	9	65	24	33	43	36	89
34	38	90	49	17	68	66	66	57	1	85	66
32	49	28	65	47	18	76	27	72	39	77	31
21	43	72	80	42	85	89	26	39	19	32	19
15	8	87	86	46	89	12	31	74	34	52	65
28	29	49	51	69	35	95	88	61	80	34	7
64	12	15	1	58	35	77	73	85	42	15	19
22	35	20	20	73	43	59	78	95	20	40	61
35	19	3	84	8	30	4	8	89	61	52	65
32	27	57	15	18	68	57	17	25	34	10	34
21	89	96	57	87	54	0	60	59	18	32	73
3	48	61	85	7	50	17	73	2	24	61	47

7. ábra.

A *7. ábrán* a szürkével jelzett cellákat (pontokat) akarjuk letakarni. A cél olyan ciklusokat találni, amelyeknek minél több szürke pont az eleme (sarokpontja). Látható, hogy két cella, a 90-es és a 32-es tartalmú kivételével mindegyik cella eleme valamely ciklusnak. Egyetlen pont (a körrel jelzett) felvételével, azaz egy új cella letakarásával azonban ezek is bevonhatók egy harmadik ciklusba, amelynek negyedik pontja a 85-ös tartalmú cella. Ezzel tehát minden szürke pont védetté válik. (Megjegyezzük, hogy a „72-es" cella helyett megfelelt volna az alatta lévő 49-es, 3-as vagy 96-os tartalmú is.)

Van-e azonban gyors algoritmus a bővítési probléma optimális megoldására, azaz minimális számú újabb cella letakarására? A fenti példa megoldása nyilván optimális.

Most megmutatjuk, hogy az eddig bevezetett fogalmak és kimondott állítások átfogalmazhatók gráfelméleti fogalmakká és állításokká. A bővítési feladat optimális megoldására így már ismert gráfelméleti tételek és algoritmusok állnak rendelkezésünkre.

Egy táblázat A ponthalmazaihoz kölcsönösen egyértelműen páros gráfok rendelhetőek a következőképpen:

12. Definíció. Feleltessük meg egy táblázat A ponthalmazának a $G_A = G_A(U, V, E)$ páros gráfot, ahol U és V diszjunkt nemüres halmazok a következő tulajdonságokkal: Álljon U azon u_i elemekből (pontokból), amelyek a táblázat i-edik sorának felelnek meg, feltéve ha az tartalmaz A-beli pontot. Hasonlóan, V álljon az A-beli elemeket tartalmazó oszlopoknak megfeleltetett v_j pontokból. Az élek E halmazát pedig definiálja a következő: u_i és v_i között pontosan akkor van él, ha a táblázat i-edik sorának j-edik eleme A-beli pont. Azt mondjuk, hogy G_A az A *ponthalmaz gráfja*.

Világos, hogy G_A nem tartalmaz izolált pontot, továbbá, hogy A akkor és csak akkor áll elő egy táblázatbeli B halmazból a táblázaton végrehajtott elemi sor-, illetve oszlopcserék valamely sorozatával, ha G_A és G_B izomorf gráfok.

12. Állítás. Közvetlenül G_A definíciójából adódik, hogy az alábbiak ekvivalensek:

(i) *az A halmaz összefüggő* (ii) G_A *összefüggő gráf*

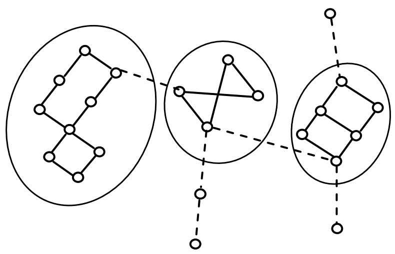
Minden gráf egyértelműen felbontható maximális (tovább nem bővíthető) összefüggő, páronként független *komponensek* uniójára. Ismert gráfelméleti tétel (pl. Hajnal, 2003) a következő: egy G gráf valamely e éle akkor és csak akkor nem éle egyetlen G-beli körnek sem, ha e-t elhagyva a gráfból, a kapott gráfnak több komponense lesz, mint G-nek. Ekkor e-t *hídél*nek nevezik. Ha az összefüggő, legalább három szögpontú G-gráfnak minden éle valamely körnek éle („körél"), akkor G-t *kétszeresen élösszefüggő*nek nevezik.

Belátható, hogy az alábbi három állítás ekvivalens: (i) G kétszeresen élösszefüggő (ii) G-nek nincs hídéle (iii) G bármely két pontját összeköti két út, amelyeknek nincs közös éle.

Mivel az A-beli C^2 halmazoknak a G_A gráf körei felelnek meg és fordítva, ezért a felbontási tétel szerint:

13. Állítás. *Egy A halmaz akkor és csak akkor védett, ha G_A minden éle körél. Ekkor G_A páronként független, kétszeresen élösszefüggő komponensekre bontható.*

A *8. ábra* páros gráfjának (ez ellenőrizhető) szaggatottal jelzett hídélei védtelen pontoknak felelnek meg az eredeti táblázatban, a többi él körél, tehát valamely védett pont képe.



8. ábra.

Érdemes felsorolni A és G_A néhány egymásnak megfelelő „objektumát". Emlékeztetünk arra, hogy egy gráf *vonala* nem tartalmazhat élismétlődést, egy *útja* vagy egy *köre* pedig még pontismétlődést sem.

Táblázatok halmazai	Páros gráfok
ponthalmaz (a táblázatban)	– páros gráf
pont	– él
pontok száma az i-edik sorban	– u_i fokszáma
páros halmaz	– minden fokszám páros a gráfban
ciklus (mindig páros)	– zárt vonal (mindig páros fokszámú pontokból áll)
C^2-típusú halmaz	– kör (fokszám $\equiv 2$)
téglalaprács	– teljes gráf
független halmazok	– független gráfok
összefüggő halmaz	– összefüggő gráf (bármely két pont között van út)
összefüggő páros halmaz	– összefüggő Euler gráf $\Leftrightarrow$ van zárt Euler vonala (minden fokszám páros)
védett pont /nem védett pont	– körél / hídél
védett halmaz	– hídélmentes gráf $\Leftrightarrow$ minden éle körél

Érdekes analógia, hogy a 4. Tétel annak a klasszikus gráfelméleti tételnek a ,,táblázat-nyelvi" megfelelője, hogy ,,egy gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha minden csúcsnak fokszáma páros." A bizonyítások is analógak.

Az alábbi algoritmus egy tetszőleges A halmazhoz konstruál minimális számú pont hozzáadásával egy A-t lefedő A' védett halmazt. Az algoritmus az elsődlegesen letakart pontok száma szerint lineáris idejű lesz, azaz a lépésszám kisebb lesz, mint $a|A|+b$, ahol a és b alkalmas konstansok. Az algoritmus ,,magja" egy olyan eljárás lesz, amely megoldja páros fák kétszeresen összefüggő páros gráffá bővítését minimális számú új él beiktatásával, a fa éleinek száma szerint lineáris számú lépésben.

ELŐKÉSZÍTÉS

Ismeretes (pl. Hajnal, 2003), hogy egy gráf minden összefüggő komponense egyértelműen felbontható diszjunkt alkomponensekre, melyek vagy maximális kétszeresen élösszefüggő részgráfok vagy önálló pontok, és melyeket hídélek kötnek össze (ha legalább két alkomponens van). Bármely két alkomponenst legfeljebb egy hídél köt össze. Az alkomponensek és a hídélek együttesen alkotják a komponenst (8. ábra). Például egy fa alkomponensei a szögpontjai, hídélei pedig az élei. Tekintsük az A halmazt és gráfját, G_A-t. A 13. Állítás szerint A pontosan akkor védett halmaz, ha G_A minden komponense egyetlen kétszeresen élösszefüggő alkomponensből áll.

Régóta ismertek olyan algoritmusok (Tarjan, 1972), amelyek elvégzik a $G(V,E)$ gráf komponensekre bontását (a gráf minden pontját besorszámozva az azt tartalmazó komponens sorszámával) valamint az alkomponensekre bontást lineáris —$O(|V|+|E|)$— időben, és a hídéleket is hozzárendelik a megfelelő alkomponens-párokhoz.

ALGORITMUS-KEZDET

Ezentúl G_A-t röviden G-vel jelöljük. Először elvégezzük a G páros gráf komponensekre és alkomponensekre bontását. Ha G minden komponense kétszeresen élösszefüggő, akkor A védett, az algoritmus leáll.

Ellenkező esetben:

A) Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor G összefüggő. Mivel G páros gráf, minden pontja beszínezhető két szín, mondjuk a zöld és kék egyikével úgy, hogy él csak különböző színű pontokat köthet össze. Olyan algoritmust adnunk, amely G-be úgy húz be a ,,színszabály" betartásával minimális számú élt, hogy a kapott páros gráfban minden él körél lesz.

Tekintsük azt a $T(G)$ gráfot, amelyet úgy kapunk G-ből, hogy annak — már előállított— alkomponenseit ,,összehúzzuk" egy-egy ponttá. Azaz az új gráfban minden pont egy-egyértelműen megfelel G egy (esetleg egy pontból álló) alkomponensének, és a pontok közt pontosan akkor húzunk élt él, ha a megfelelő alkomponensek között volt (híd-) él. $T(G)$ egy fa. A valóban összehúzott, azaz egynél több pontból álló alkomponensekből (ezek legalább két kék és két zöld pontot tartalmaznak) keletkezett $T(G)$-beli pontok színe legyen kékesszöld, a többi pont pedig örökölje G-beli színét. $T(G)$-re tehát egy általánosított színszabály teljesül: kék pont kékkel, zöld pont zölddel nincs összekötve.

Nyilván elegendő most már a $T(G)$ fát minimális számú él behúzásával kétszeresen élösszefüggővé bővíteni – a színszabály betartásával. Hiszen ha e egy az a és b pontok közé újonnan behúzott él $T(G)$-ben, akkor G-ben behúzva egy élt a $T^{-1}(a)$ és $T^{-1}(b)$ alkomponensek egy-egy ellenkező színű pontja közé, a kapott G' is kétszeresen élösszefüggő gráf lesz.

A $T(G)$-t minimális számú él behúzásával kétszeresen élösszefüggő kibővítő algoritmus legfontosabb további lépéseit az alábbi tétel bizonyítása tartalmazza. Bár a tételben mellőzzük a kékeszöld pontokat is tartalmazó fákat, ezeket azonban a végén egyszerűen elintézzük.

Először a $T(G)$ fát a szokásos módon ,,gyökereztetjük", azaz egy tetszőleges legalább másodfokú pontjából, a *gyökér*ből kiindulva, tőle elfelé mutató irányítással látjuk el. Rögzített gyökér esetén az irányítás nyilván egyértelmű. Az ezt végző lineáris idejű algoritmus megjelöli a leveleket, továbbá minden pontot megcímkéz a gyökértől való távolságával, a ,,szintjével", azaz a pontból a gyökérhez vezető egyetlen út éleinek számával. Ekkor $T(G)$-t a páros gráfoknál megszokott módon így is jelölhetjük: $T(A, B, F)$, ahol A és B az irányítás által generált páros, ill. páratlan szinteken elhelyezkedő (kék, ill. zöld) pontok, E pedig az élek halmaza. Fák esetén a lineáris időre szokásosan alkalmazott $O(|E|)$, $O(|V|)$, $O(|E| + |V|)$ kifejezések ($|E|$ és $|V| = |A| + |B|$ az élek, ill. csúcsok száma) egyszerre teljesülnek, hiszen $|V| - |E| = 1$, ezért egyszerűen ezt írjuk: $O(T)$.

6. Tétel. *Egy $T = T(A, B, F)$ gyökereztetett fa* $\max(|K|, |Z|)$ *új él behúzásával kétszeresen élösszefüggő páros gráffá bővíthető, ahol $K \subseteq A$ és $Z \subseteq B$ rendre a fa kék, illetve zöld leveleinek halmaza. Ennél kevesebb él nem elegendő. A bővítő élek $O(T)$ időben való megadását a bizonyítás tartalmazza.*

Bizonyítás. Az alábbi állítás alsó becslést ad a behúzandó élek számára.

14. Állítás. *$T(G)$ minden leveléből, azaz elsőfokú pontjából ki kell indulnia egy újonnan behúzott élnek ahhoz, hogy $T(G)$ minden éléből körél legyen.* A levelekbe futó élek nyilvánvalóan csak így lesznek körélek.

1) Legyen először $|K| = |Z|$.

- *0. lépés ($k = 0$)*

Párosítsuk össze tetszőlegesen a kék leveleket a zöldekkel. Ha $|K| = |Z| = 1$, akkor egy élt behúzva a két levél közé, a kapott gráf nyilvánvalóan egyetlen kört alkot. Ha $|K| = |Z| > 1$, akkor az egyes párok tagjai közötti egyetlen utat a fában könnyű megadni: az adott levélpár tagjaiból indított, egy-egy az irányítással ellentétesen, ,,felfelé" vezető út biztosan találkozik egy pontban, ,,legkésőbb" a gyökérben. Az összes ilyen út eme —páronként független— kiinduló $\{T_{0,1}, T_{0,2}, \ldots, T_{0,|K|}\}$ rendszerét jelölje F_0. Ha ez tartalmazná a T fa összes élét, akkor a párok tagjait egy-egy új éllel összekötve előállna egy T-t részgráfként tartalmazó kétszeresen élösszefüggő gráf. Az egyes utakon még egyszer végighaladva címkézzük meg az éleket és a pontokat az út zöld végpontjával.

0. lépés vége

Ezután szélességi kereséssel bejárjuk T-t, azaz végigmegyünk a pontjain, szintenként, a gyökértől távolodva.

- *1. lépés* $(k = 1)$

Rálépünk a p_0-ra, T gyökerére. Az első lépés előtt a rendelkezésre álló F_0 rendszerre teljesülnek az alábbi tulajdonságok, ha k helyébe mindenhol 1-et írunk:

a. T minden levele pontosan egy $T_{k-1,j}$ fának levele. Ebből következően $T_{k-1,j}$-k páronként független gráfok. Fordítva: mindegyik $T_{k-1,j}$ fa minden levele T-nek is levele.

b. $T_{k-1,j}$-nek ugyanannyi zöld és kék levele van, és ezek össze vannak párosítva.

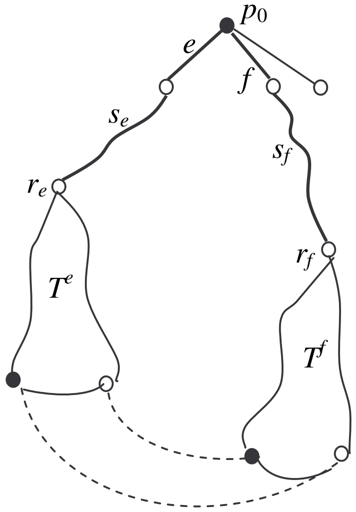
c. $T_{k-1,j}$-t kiegészítve az összepárosított leveleket összekötő egy-egy új éllel: kétszeresen élösszefüggő gráf áll elő.

d. $T_{k-1,j}$ minden éle és pontja címkézve van $T_{k-1,j}$ valamelyik zöld levelével.

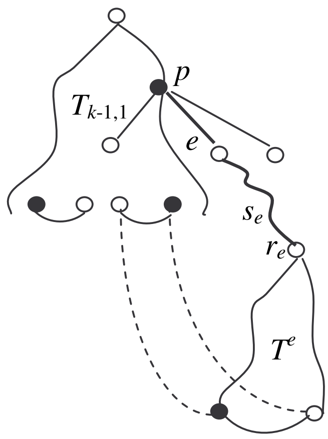
Mivel p_0 fokszáma legalább 2, jelöljön e és f egy-egy belőle kiinduló élt (*9.a ábra*). Ekkor p_0-ból e-n keresztül elindulunk egy címkézetlen élekből álló tetszőleges s_e útvonalon az első címkézett pontig, amelyet jelöljön r_e. Ez nyilván valamelyik F_0-beli T^e fa gyökere, hiszen T fa. Hasonlóan, p_0-ból az f-fel kezdődő tetszőleges s_f útvonalon eljutunk az F_0-beli T^f fáig az r_f pontban. T^e és T^f valójában egy-egy út. Jelölje $T_{1,1}$ a két fa és az őket összekötő útvonal, azaz T^e, T^f, s_e és s_f egyesítésével előállt fát. (Az első index: k.) Ezután tekintsük az r_e és r_f pontok címkéjét, azaz a két összetevő fa egy-egy zöld levelét, valamint kék párjukat. Végezzünk el köztük párcserét a színszabályt betartó egyetlen lehetséges módon (**b.**). Ekkor, ha az új $T_{1,1}$ fában minden pár közé behúzunk egy élt, kétszeresen élösszefüggő gráfot kapunk (**c.**), hiszen a két összetevő fa között e-n (és f-en) át is vezet út, valamint a párcserében részt vevő leveleket összekötő éleken át is (mindjárt kettő). Végül az összekötő útvonal összes r_e és r_f közötti élét és pontját, tehát p_0-t is, címkézzük meg r_e címkéjével. Így $T_{1,1}$ minden pontja és éle címkézve lesz egy zöld levelével (**d.**).
1. lépés vége

Az első lépés eredményeként előállt egy új, eggyel csökkent elemszámú rendszer: $F_1 = \{T_{1,1}, T_{1,2}, \dots\}$, ahol $T_{1,1}$ két „eredeti”, azaz F_0-beli fa összevonásával és az őket összekötő út „bekebelezésével” keletkezett, a további elemek pedig a megmaradt —átjelölt— eredeti fák (**a.**). Az F_1 rendszer tehát rendelkezik az **a-d.** tulajdonságokkal. Mivel $T_{1,1}$ tartalmazza a gyökeret, F_1 az alábbi tulajdonsággal is rendelkezik:

e. A $k > 0$ lépés megtétele után: minden olyan T-beli pont, amelyre már ráléptünk, a p_0 gyökerű $T_{k,1}$ fa pontja.



9.a ábra



9.b ábra

• *k. lépés* $(k > 1)$

A lépés megtétele előtt rendelkezésünkre áll az $F_{k-1} = \{T_{k-1,1}, T_{k-1,2}, \dots\}$ fa-rendszer, amelyben az elsőt kivéve mindegyik fa az eredeti F_0-beli, még érintetlen fák valamelyike.

Ez a lépés az 1. lépés egyszerűsített változata (*9.b ábra*). Az 1. lépésben két eredeti fából előállítottuk a $T_{1,1}$ fát. Ezután már minden lépésben egy-egy újabb eredeti fát olvasztunk bele az előző lépésben előállított $T_{k-1,1}$ fába a sorban mögötte állók közül, a kettejüket összekötő úttal együtt, egyúttal elvégzünk egy alkalmas párcserét a levelek között, míg végül egyetlen fa marad: $T_{n,1} = T$.

Ha az aktuális p pontból kiinduló összes él címkézett, azaz a p-ből lefelé induló összes nem F_{k-1}-hez tartozó élre egyszer már ráléptünk (akár p-ből kiindulva, akár már korábban, p valamelyik elődjéből), azaz p „ki lett fejtve" akkor a szélességi bejárás szerinti következő pontra lépünk, ezt jelölve p-nek. Ellenkező esetben legyen e egy p-ből lefelé irányuló címkézetlen, azaz nem F_{k-1}-hez tartozó él. Most is, mint az 1. lépésben, induljunk el p-ből egy az e-vel kezdődő, címkézetlen élekből álló tetszőleges s_e útvonalon, amíg eljutunk a még érintetlen $T^e \in F_{k-1} \setminus T_{k-1,1}$ fa r_e gyökerébe. Az **e.** tulajdonság miatt $T_{k-1,1}$ tartalmazza p-t. Jelöljük $T_{k,1}$-gyel a $T_{k-1,1}$ és T^e fák, valamint az őket összekötő s_e út egyesítésével előállt fát. A párcserét és a címkézést az 1. lépésben leírtakkal megegyezően végezzük, azaz tekintsük r_e és p címkéjét, azaz a két összetevő fa egy-egy zöld levelét, valamint kék párjukat. Ezután végezzük el köztük az egyetlen lehetséges párcserét. Végül az összekötő útvonal összes p és r_e közötti élét és pontját címkézzük meg r_e címkéjével. Így $T_{k,1}$ minden pontja és éle címkézve lesz egy zöld levelével.

A k. lépés eredményeként előállt egy új, eggyel csökkent elemszámú rendszer: $F_k = \{T_{k,1}, T_{k,2}, \dots\}$, ahol az első tagot követő elemek (az utolsó lépés után már nincs ilyen) a még megmaradt F_0-beli fák.

k. lépés vége

A k. lépés nyomán előállt F_k rendszer tehát ugyanúgy rendelkezik az **a-d.** tulajdonságokkal, mint az 1. lépés után. Az **e.** tulajdonság meglétét pedig a szélességi bejárás biztosítja, hiszen minden $p \neq p_0$ pont a rálépés előtt már rendelkezik címkével, amelyet valamelyik T-beli őse kifejtésekor kapott, hiszen az összes p-nél magasabb szinten lévő pont már ki van fejtve.

Az algoritmus az eredeti fák elfogyásával, azaz $n = |Z| - 1$ lépés után leáll. Az előállt $T_{n,1} = T$ fa és leveleinek előállt párosítása rendelkezik az **a-e.** tulajdonságokkal, tehát azzal is, ha minden levelet összekötünk a párjával egy éllel, akkor kétszeresen élösszefüggő páros gráfot kapunk. A 14. Állítás következménye, hogy ennél —azaz $|Z|$-nél— kevesebb él behúzásával ezt nem lehet elérni.

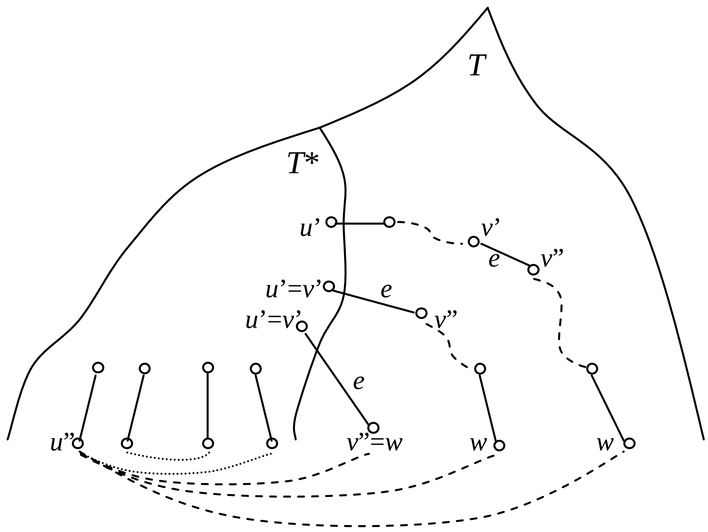
Az eljárás, amely tulajdonképpen K és Z megfelelő párosításának megkeresése, az élek $|F|$ száma szerint lineáris idejű a következők miatt: T bejárásakor minden p pontban a belőle kiinduló (s_e-vel vagy s_f-fel jelölt) utak hosszával arányos időt töltünk: először végighaladva rajtuk, másodszor „visszafelé” megcímkézve pontjaikat és éleiket. (A 0. lépésben is ez történik, csak a bejárt és megcímkézett utakat ott a $T_{0,j}$ jelöli, amelyeket nem felülről generálunk, hanem alulról.) Ezek az utak páronként éldiszjunktak és együttesen előállítják T-t. Egy adott út minden egyes pontjához két „rálépés” és a címkézés konstans ideje tartozik, valamint az úthoz tartozó párcsere bejegyzési idejének ráeső része. Tehát a idő $a|F| + b$ alakú.

2) Legyen most $|Z| < |K|$.

Legyen K_z a kék levelek egy tetszőleges $|Z|$ elemszámú részhalma. Először előállítjuk T azon legszűkebb T^* részfáját (*10. ábra*), melynek pontosan $Z \cup K_z$ a levélzete. Ilyen fa nem lehet egynél több, mert akkor metszetük is egy ugyanolyan levélzetű fa lenne. Jelölje d a gyökér és a hozzá legközelebb eső $Z \cup K_z$-beli levelek távolságát, d-t a gyökereztető algoritmus megadja. A d szinten lévő levelek halmazát jelölje L_d. A gyökértől d-nél nagyobb távolságra eső („mélyebb szinten” lévő) levelek mindegyikéből induljunk el a gyökér felé egy-egy úton egészen a d szintig. Az utak d szintű pontjaiból és L_d pontjaiból folytassuk egy-egy úton a felfelé haladást addig, míg valamelyik szinten a megmaradt élek egyetlen pontban találkoznak (legkésőbb T gyökerében). Ekkor a bejárt utak együtt nyilván a keresett T^* fát adják, amelyben az utolsó elért pontot tekinthetjük gyökérnek, hiszen fokszáma egynél nagyobb. Eme bejárás T éleinek egy részén egyszer halad át, tehát ideje $O(T)$.

Párosítsuk össze az 1)-ben leírt eljárással Z és K_z leveleit a T^* fában és a párokat kössük össze egy-egy új éllel. Ezzel T^* összes éle körél lesz. Azt állítjuk, hogy ha T megmaradt — kék— leveleit, azaz a $K \setminus K_z$-be esőket összekötjük T^* „szinte” bármelyik zöld pontjával, például bármelyik zöld levelével, akkor az összes T^*-n kívüli él is belekerül valamilyen körbe. Legyen ugyanis e egy tetszőleges T^*-on kívüli éle T-nek, v' és v'' végpontokkal. Ekkor közülük pontosan az egyikből, mondjuk v'-ből, vezet olyan út T^*-ba, amely nem tartalmazza e-t, ellenkező esetben e körél lenne. Az út első T^*-ba eső pontját jelölje u'. Másrészt v''-ből egy tetszőleges, nem e-vel kezdődő úton haladva T valamelyik levelébe érkezünk, hiszen T^*-ban nincs kör. Ez a w-vel jelölt levél csak $K \setminus K_z$-beli lehet, ellenkező esetben e egy T^*-n áthaladó $(u' \ldots v', e, v'' \ldots w \ldots u')$ kör éle lenne, ahol $(w \ldots u')$ a w és u' közötti T^*-beli út. Tehát ha w-t egy új éllel összekötjük T^* bármely u'-től különböző zöld u'' pontjával, például egy zöld levéllel, akkor e benne lesz az $(u' \ldots v', e, v'' \ldots w, u'' \ldots u')$ körben, ahol $(u'' \ldots u')$ a w és u' közötti T^*-beli —egyetlen— út. (Az $u' \neq u''$ kikötés biztosítja, hogy valódi, azaz kettőnél több szögpontból álló kör jöjjön létre). Ha tehát minden $K \setminus K_z$-beli levelet egyszerűen összekötünk egy alkalmas T^*-beli zöld ponttal, például egy levéllel, akkor minden T^*-on kívüli él körél lesz. Ennek ideje nyilván $c(|K| - |Z|) + d$.

Ezzel valóban összesen $|K|$ számú új élt húztunk be a T fába: először $|Z|$ számút T^* levelei közé, majd $|K| - |Z|$ számút $K \setminus K_z$ és T^* zöld levelei közé. A 14. Állítás alapján pedig ismét következik, hogy ennél kevesebb él behúzásával nem lehet T-t kétszeresen élösszefüggő páros gráffá bővíteni. A két idő összege pedig felülről becsülhető $e|F| + g$-vel, ahol e és g alkalmas konstansok. □



10. ábra

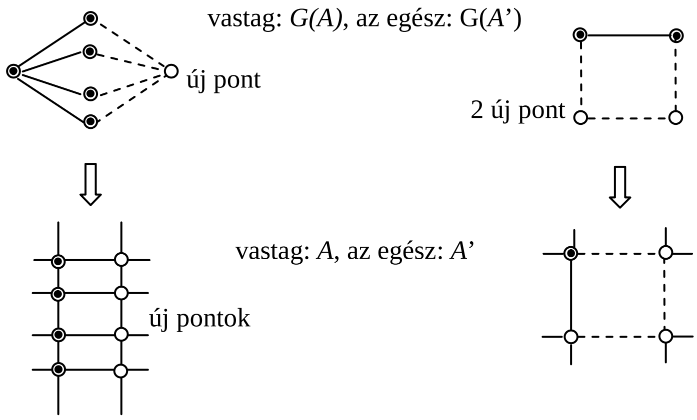
Eddig feltettük, hogy a $T(G)$ fának nincsenek kékeszöld levelei. Ha vannak kékeszöld levelei, m darab, és $|Z| \leq |K|$, akkor $m \leq |K| - |Z|$ esetén pakoljuk mindegyiket Z-be, ellenkező esetben osszuk el őket Z és K között úgy, hogy a két így kibővített K' és Z' halmaz elemszáma vagy legyen egyenlő, vagy K'-é legyen eggyel nagyobb. Ezzel biztosítottuk K' és Z' között a maximális párosítást, és 1)-et vagy 2)-t végrehajtva előállítható a leveleket összekötő minimális számú él.

3) Néhány esetben az eddig leírt módszer nem alkalmazható. Mégpedig akkor, ha $T(G)$ levelei nem köthetők össze sem egymással (mert vagy mind zöldek vagy mind kékek), sem a többi belső ponttal (mert csak a szomszédaik más színűek). Ezek a fák pontosan az ún. csillag-gráfok. Ezeknek egy pont

kivételével —jelöljük ezt a-val— csak elsőfokú pontjaik vannak, mondjuk mind kékek. Ekkor,

3a) ha a kékeszöld, akkor minden levelet egy a szomszédjától különböző zöld $T^{-1}(a)$-beli ponttal kötjük össze ($T^{-1}(a)$ legalább két zöld és két kék pontot tartalmaz).

3b) Ha pedig a zöld (ezek azoknak a táblázatbeli halmazoknak felelnek meg, amelyek pontjai egy sorban vagy oszlopban helyezkednek el), akkor egynél több levél esetén —most először— fel kell venni egy új (zöld) pontot és a leveleket össze kell vele kötni (lásd a *11. ábra* bal oldalát). Végül ha a $T(G)$ egy két-szögpontú csillag, akkor két új pont felvétele és ,,körbekötése" a megoldás. Ez az eset a táblázatban az egyetlen pontból álló halmaz téglalappal való lefedését jelenti (a 11. ábra jobb oldala).



11. ábra

B) Ha G egynél több komponensből áll: $G_1, G_2, \ldots$, akkor a $T(G_i)$ fák közül az 1), 2) vagy 3a) tulajdonságúakra végezzük el az ott írottakat, így téve kétszeresen összefüggővé őket. A 3b) alá tartozó $T(G_i)$ fák esetén ellenben —elkerülendő az új pontok felvételét— a fa leveleit összekötjük bármely másik G_j $(i \neq j)$ komponens valamely más színű pontjával.
ALGORITMUS-VÉG

Az imént ismertetett algoritmus —az egy komponensű 3b) esettől eltekintve, azaz amikor az A halmaz minden pontja egy sorba vagy oszlopba esik— a G_A gráfhoz nem vesz hozzá új szögpontokat, hanem csupán új éleket húz bele, azaz A-t az őt tartalmazó legszűkebb téglalaprács bizonyos pontjaival egészíti ki.

Röviden összefoglaljuk az algoritmus lépéseit egy pszeudo kódú program formájában. A programban a T_i fa csillag-gráf mivoltára vonatkozó `if` $\{T_i \ldots\}$ alakú feltételek kiértékelése konstans időt vesz igénybe, mivel ezt már korábban elvégzi a T_i-t irányítással ellátó alprogram. l_i jelöli T_i leveleinek számát.

```
BŐVÍT(G)
• G-t felbontjuk a G_i komponensekre (i = 1,...,n)  O(|V| + |E|)
for i = 1 to n
   • G_i -t alkomponensekre és hídélekre bontjuk  O(|V_i| + |E_i|)
   if {a hídélek száma = 0} then
      next i
   else
      • G_i-ből alkomponensei összehúzásával T_i fát készítünk O(T_i)
      • T_i-t gyökereztetjük, innen irányítjuk, majd meghatározzuk a leveleit. O(T_i)
      if {n = 1 & T_1 egy 3b)-típusú csillag} then
         • új pontokat veszünk fel (egyet vagy hármat): next i
      end if
      if {T_i nem csillag} then
         • a lehető legtöbb kék, zöld és kékeszöld levelet két halmazba:
           Z-be és K_z-be osztjuk O(l_i)
         • generáljuk a Z-hez és K_z-hez tartozó minimális T* fát O(T_i)
         • előállítjuk Z és K_z kezdő párosítását O(l_i)
         • generáljuk a kezdő párosításhoz tartozó kiinduló S_0 útrendszert O(T_i)
         • előállítjuk a T* kétszeresen élösszefüggővé tevő párosítást O(T_i)
         • a Z-n és K_z-n kívül eső leveleket ,,bekötjük" Z-be O(l_i).
      else
         • if {T_i 3a)-típusú csillag} then a leveleit bekötjük magába O(l_i)
         • if {T_i 3b)-típusú csillag} then a leveleit bekötjük egy másik
           komponensbe O(l_i)
      end if
   end if
next i
return
```

A fenti program az összetevők ideje alapján $O(|V|+|E|)$ idejű. Az alkomponensekre bontás utáni idő $O(\sum_{i=1}^{n}|T_i|)$, azaz G hídéleinek száma szerint lineáris.

Megjegyzés. A most ismertetett algoritmus nyilvánvalóan alkalmas egy tetszőleges (nem páros) G gráf hídélmentes gráffá bővítésére minimális számú él behúzásával, ha a T fa L számú (színtelen) levelét két —K és Z— halmazba soroljuk úgy, hogy páros L esetén $|K| = |Z|$, páratlan esetén $|K| = |Z| - 1$, és elvégezzük az 1) vagy 2) pontban leírtakat. A 3) pontban felmerült speciális esetek is egyszerűsödnek.

Addendum

A szerző a cikk megírása után lelt rá Gusfield (1988) gráfbővítő algoritmusára. Érdekes következtetések adódnak, ha összevetjük Gusfield algoritmusát (röviden GA) a 6. Tételben leírttal (röviden FA). Mindkettő fákra ,,fut", lineáris időben. Az alapötlet azonos: a levelek egy kezdeti párosítását párcserékkel addig javítani, amíg egy hídmentes páros gráf áll elő. Azonban a két algoritmus minden egyéb jellemzőjében egyfajta ,,dualitás" figyelhető meg.

– GA először mélységileg bejárja a fát, csak azért, hogy beszámozza a leveleket az elérés sorrendjében 1-től n-ig. Ezután összepárosítja a leveleket: az i-ediket a $k+i$-edikkel, ahol $k = \lfloor n/2 \rfloor$, tehát nem törődve a színszabállyal.

Felhasználja Esweran és Tarjan (1976) azon eredményét, hogy ezzel a párosítással, a párokat összekötve egy-egy éllel, a bővített gráf hídmentes[2]. Ezután, a színhibákat kijavítandó, a zöld-zöld és kék-kék párok között egymás után párcseréket hajt végre, észrevéve, hogy a hídmentesség ilyenkor megmarad.

– FA először találomra, ,,maximálisan" összepárosítja a különböző színű leveleket (a hoppon maradottakat a végén ,,beköti" a fába). Ezután szélességi keresés közben minden lépésben —amikor hídélt talál— egy alkalmas párcserét hajt végre, észrevéve, hogy ezzel csökkenti a hídélek számát.

Összefoglalva: GA gráfjai a kezdettől fogva hídélmentesek, de végig színhibásak (kivéve a leálláskor). FA gráfjai a kezdettől fogva színhelyesek, de végig hídélt tartalmaznak (kivéve a leálláskor). GA színhibás párokat cserél, FA színhelyeseket. GA a mélységi keresés után egyhuzamban cseréli a párokat, FA szélességi keresés közben, lépésenként teszi azt.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani az egyik anonim lektornak a különösen gondos javításért és azért, hogy felhívta figyelmemet egy fontos, a probléma általánosításával foglalkozó cikkre. A másik lektornak köszönhetően bővült a dolgozat számpéldákkal, melyek bizonyára könnyebbé teszik a megértést.

Irodalom

1. Hajnal P., Gráfelmélet, Polygon Kiadó - SZTE Bolyai Intézet, 2003
2. Cormen, Thomas H. – Leiserson, Charles E. – Rivest, Ronald L. (1999): *Algoritmusok*, Műszaki, Budapest
3. K. P. Eswaran and R. E. Tarjan, Augmentation problems, *SIAM Journal on Computing*, 5 (1976), 653–665,.
4. A. Frank: Edge-connection of graphs, digraphs, and hypergraphs, in: *More sets, graphs and numbers*, (E. Győri, G. Katona, L. Lovász, eds), Bolyai Mathematikcal Society Math. Studies
5. Gabow, H. N. (2000). Path-based depth-first search for strong and biconnected component, *Information Processing Letters* 74: 107–114.
6. Gusfield, Optimal mixed graph augmentation, *SIAM Journal on Computing*, 16 (1987), pp. 599–612.
7. D. Gusfield, A Graph Theoretic Approach to Statistical data Security, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 17 (1988), No.3, 552–571.
8. S. Raghavan A Note on Eswaran and Tarjan's Algorithm for the Strong Connectivity Augmentation Problem. pp 19–26, in *The Next Wave in Computing, Optimization, and Decision Technologies*, edited by Golden, Raghavan, and Wasil (Springer) 2005.
9. Robert Tarjan: Depth-first search and linear graph algorithms. In: *SIAM Journal on Computing*. Vol. 1 (1972), No. 2, 146–160.

[2]Meglepő fejlemény, hogy az Eswaran és Tarjan híres cikkében közölt bővítési algoritmusban 30 év múltán hibát találtak (Raghavan, 2005), ellenpéldával, azaz egy olyan gráffal, melyet az algoritmus egy nem erősen összefüggő gráffá bővít. A cikkben a hibát szerencsésen korrigálták.

10. Tsan-sheng Hsu and Ming-Yang Kao, Optimal Augmentation for Bipartite Componentwise Biconnectivity in Linear Time, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 19 (2005), No. 2, 345–362.

TABULAR DATA PROTECTION AND GRAPH OPTIMIZATION

In this article we put an old problem of data protection into a new context. Though certain sensitive cells of published two-dimensional tables are often „hidden" by the data providers, the content of some of these suppressed cells might be computed using the available cell values and sums of rows and columns. We call a set of cell locations protected, if none of the exact cell values can be uniquely computed. Considering the cell locations as points on a grid we characterize the protected sets as unions of vertex sets of orthogonal polygons. We give several necessary and sufficient conditions for being protected, describe the hierarchy of protected sets, and investigate their properties. When a set is not protected we consider the problem of suppressing the fewest additional cells to protect the sensitive cells. This process is called „secondary suppression" in the literature. Gusfield (1988) and others solved the optimization problem by establishing a bijection between the sets of cell locations and bipartite graphs. They gave a linear time algorithm for the corresponding graph theory problem: making a bipartite graph edge-biconnected by adding a minimum number of new edges. We give a new, simple linear time algorithm for this augmentation problem.