

BRÓDY ANDRÁS, A KASZTON- ÉS TÁRSADALMON
KÍVÜLI TUDÓSZALAI ERNŐ¹

Az idő nem lassul. Rendületlen módszerességgel szedi áldozatait. 2010. december 3-án, nyolcvanhetedik életévében, elhunyt a 20. évszázad második felének egyik legkiválóbb, sokak szerint a legnagyobb magyar közgazdásza, Bródy András. Kegyes volt vele sors, mert elég hosszú és érdekes időt ajándékozott neki. A többgenerációs értelmiségi-polgári családból származó, sokirányú tehetséggel megáldott tudós közgazdász a zenében, az irodalomban, a matematikában és a technika világában egyaránt otthon volt. A híres magyar Nobel-díjasokat adó, a 19-20. századforduló körüli évtizedekben virágzó szellemi korszak egy ritka, késői képviselője volt. „Sajátos életpály(á)ja ... az egyéni tehetség, a családi háttér és a kelet-európai lét különös ötvözetéből jött létre” (Bekker [1999]).

Vérbeli, született kutatóalkat volt, akit a kiapadhatatlan kíváncsiság hajtott. A tények izgatják, amelyek számos kollégáját inkább zavarják, akik szívesen ignorálják a zavaró tényeket. Bródy András módszeresen haladt előre a tényektől az elméleteken át a modellekhez, s vissza a gyakorlati alkalmazásukig, eredményeinek illusztrálásáig. Ha kell, maga tervezi meg és állítja elő a szükséges statisztikai adatokat, általában maga viszi számítógépre a modelljét, s ha kell, programot is maga készít hozzá. Fiatalkora óta foglalkoztatja a mérés problematikája, az eredmények megbízhatósága. Nem hisz a túl részletes modellekben. Olyanokat keres, amelyek átfogóak és könnyen áttekinthetőek, a gazdaság összefüggéseinek és mozgástörvényeinek a lényegét ragadják meg, és megbízhatóságuk már igazolódott.

Sokoldalú, összetett személyiség, amit legtalálébban egy zambiai kollégája, egy dél-afrikai szociológus, Simon professzor fogalmazott meg: „úriúrból, liberálisból, kommunistából és anarchistából kevert személy”. „Kaszton- és társadalmonkíviliségére” (281. o.)² igen ad, igyekszik nem elkötelezni magát valami vagy valakik mellett, nem hagyja beskatulyázni magát szűk rekeszekbe. Igyekszik megőrizni autonómiáját és nyitottságát, ami egyáltalán nem könnyű, sőt egyre nehezebb rángatózva átalakuló világunkban. Akár élete mottójául is szolgálhattak az amerikai költő diáknak ajánlott, gyakran idézett sorai:

„Ahhoz, hogy önmagad legyél —egy olyan világban, amely éjjel-nappal arra törekszik minden erővel, hogy olyanná tegyen téged, mint akárki más—

¹Ez úton is szeretném megköszönni Bessenyei Istvánnak és Szabó Katalinnak a nyersváltozathoz fűzött értékes észrevételeiket.

²Az idézetek, ha nincs rájuk más utalás, Kovács János Mátyás [1994]: *Beszélgés Bródy Andrással* című hosszú és tartalmas interjújából származnak. Lényegesebb idézeteknél jelzem az oldalszámot is.

a legnehezebb csatát kell megvívnod amit csak lehet emberileg, és sosem szabad abbahagynod a harcot.” (E. E. Cummings, *A Poet’s Advice*, 1958)

„Nem akarom elkötelezni magam, de nem is akarok nemet mondani.” (308. o.) Kint is van és bent is van. Ráadásul gyakran került előtérbe anarchikus, meg nem alkuvó és másokat sértő énje, mint maga is elismeri, nem volt idegen tőle az „elitizmus és fölényesség”, „gúnyos, cinikus és hihetetlenül pimasz”³ tudott lenni. „János gyereke is ilyen. Nem kapunk kitüntetéset, nincs az az eset, hogy plecsnit kapjunk.” (uo.). Ezzel maga ellen hangolja még a Közgazdaságtudományi Intézeti vezetőit és idősebb, befolyásos kollegáit is. Emiatt nem lett akadémikus belőle, bármennyire is megérdemelte volna kiemelkedő szakmai teljesítményével. De a testületi tagok 1989-ben egyhangúlag az MTA Közgazdaságtudományi Bizottságának elnökévé választják, és ezt a megbízását 1993-ban megújítják. Mintegy kárpótlásként az MTA 1997-ben Széchenyi-díjjal tünteti ki, a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem pedig 1999-ben díszdoktorává avatja.

Könnyű, de egyúttal nehéz is röviden összefoglalni életútját, mivel a már idézett 1994-es hosszú és tartalmas interjúja magáért beszél. Melegen ajánlom mindenkinek az interjú el-, illetve újra elolvasását. Az alábbiakban, a magam emlékei mellett, erőteljesen támaszkodom a saját visszaemlékezéseire, megpróbálok kiszűrni a gazdag részletekből a számomra legfontosabbakat, és felvázolni gazdag életpályájának trendvonalát.

Az indulás és a botladozások kora

Édesapja a Hungária Könyvkiadó vezérigazgatója, maga is már fiatalon bedolgozik a családi vállalkozásba. Osztrák származású édesanyja (akitől anyanyelveként megtanul németül) ugyanott tipográfus volt „művészi fokon”. Volt tehát kiktől elsajátítania a szépírást és esztétikát, ami minden munkájára jellemző volt. Veleszületett nonkonformizmusa már fiatalon megmutatkozik. Középiskolai tanulmányait a piaristáknál kezdi, az evangélikusoknál folytatja, s végül, 1943-ban a Trefort utcai Gyakorló Gimnáziumban fejezi be gimnáziumi tanulmányait.

Középiskolásként a matematika, a technika és az irodalom érdekelte („vájttal és éles ítélőképeséggel”, ami később megmutatkozik a szakirodalom terén is). „... elég korán felismertem a korlátaimat. ... Valahogy természetesen mértem fel a mezőnyt, hogy hol lehet, hol nem lehet érvényesülni, mi és hogyan érdekel.” (278. o.) Mérnöknek jelentkezik, oda nem kerül be, de Fejér Lipót rendkívüli hallgatóként felveszi a matematika-fizika szakra, amiből két évet el is végez. Eközben saját kiadójukban és más nyomdákban is dolgozik, tanulja a könyvkiadó szakmát. A munkaszolgálatot ő sem kerüli el, de sok más sorstársával szemben szerencsésen megússza. A háború után rövid ideig Szegeden dolgozik, és az ottani egyetemen Riesznél folytatja matematikai tanulmányait is.

Végül is nem szerzi meg a matematikusi diplomát, mert közben családot

³Ha az idézőjel után a pontos hivatkozás nincs is megadva, az idézetek akkor is Bródy említett 1994-es interjújából származnak.

alapít. Visszatér Budapestre, ahol belép a kommunista párba. Pártmegbízásai között a propaganda előadások tartása dominál. Ez is arra indítja, hogy jobban megismerje a marxizmust, egyebek mellett elolvassa „*A tőkét*”-t (amin „remekül elszórakozott”), s elkezd érdekelni a közgazdaságtan. Egyidejűleg édesapjától átveszi a Hungária Könyvkiadó vezetését is. A kiadó államosítása után, ami ellen akkor természetesen nem tiltakozhat, először még megtartják vezérigazgatóként, de rövidesen kineveznek fölé egy megbízhatóbb pártkádert, s csak helyettes lehet. Közben 1948 őszén felvételt nyer a Közgazdaságtudományi Egyetem esti tagozatára. A kiadónál nem sokáig bírja az erősödő ideológiai és adminisztratív kontrollt. 1948 végén benyújtja lemondását és elmegy esztergályosnak a MÁVAG-ba („elmentem esztergályni, mert tudtam, hogy akkor békén hagynak...”, 30. o.).

Mégis megfagy körülötte a levegő. Utólag felfedezik „kvázi-tőkés” származását (azért használja a „kvázit”, mert részvényeiket már jóval korábban eladták svájci rokonoknak), kizárják a pártból. Ezt a meghurcoltatást is szerencsésen átvészeli, s munka mellett befejezi egyetemi tanulmányait. Ekkor már a tudomány felé orientálódik, nem „mintha különösen tehetségesnek tartottam volna magamat, hanem mert az adott körülmények között a tudomány volt a legszabadabb hely a világon” (297. o.). 1953-ban rövid ideig a Kohó- és Gépipari Tervezőirodán Jánossy Ferenc mellett közgazdász lesz, akivel itt kezdődik el hosszú és kölcsönösen gyümölcsöző munkakapcsolata. Itt készíti el a Diósgyőri Kohászati Művek sakk tábla táblázatokon (termékmérlegeken) nyugvó önköltségi terveit. Elemzésével kimutatja, hogy a tervezett beruházás növelni fogja a termékek önköltségét, ezért azután rövid időn belül innen is eltávolítják. 1953 és 1955 között a Csepel Csőgyár vezető statisztikusaként dolgozik. Az itt szerzett tapasztalatai alapján jelennek meg az első, a kohászati termékek minőségével foglalkozó tanulmányai a Közgazdasági Szemlében.

A felállás: irány a matematikai közgazdaságtan

1955 végén kapcsolatai révén sikerül bekerülnie az akkor alakuló Közgazdaságtudományi Intézetbe. Az itt írt egyik első tanulmánya, az ugyancsak az éles szemmel megfigyelt gyakorlati tapasztalatai alapján, a hóvégi hajráról szól, és e témához még többször visszatér. Matematika iránti érdeklődésénél és képzettségénél fogva természetes volt ugyanakkor, hogy közgazdasági tanulmányainak kezdetétől fogva kereste azt a témát, amelyben hasznosíthatja matematikai készségeit és ismereteit. A Sztálin halálát követő ideológiai olvadás rehabilitálta ugyan a matematikai tervezési módszereket, de nem a továbbra is burzsoá apologetikának minősített matematikai közgazdaságtant. Bródy András tisztában van vele, hogy veszélyes területre evez, ezért mindenekelőtt alaposan bedolgozza magát „*A tőkét*”-be, és hosszú évek során (már az egyetemen elkezdte, de csak 1959-re jelenik meg) részletes *indexet* készít hozzá: „... tudtam, hogy ez a nyelv, és ebbe nekem bele kell seggelni magamat, és jobbnak kell lennem” másoknál. (294. o.)

Már az intézetbe kerülése előtt foglalkoztatta a marxi munkaérték meg-

határozása mint matematikai probléma, különösen érdekelte a munkaértékek végtelen soros megközelítésének kérdése. Ugyanezt az iteratív módszert alkalmazták a hivatalos árrendezések tervezési gyakorlatában is. Fiatalkori jó barátjával, Rényi Alfréddal 1956-ban publikálják közös tanulmányukat „Az árrendezés problémája”-ról, amelyben az adott nyereségrátát tartalmazó árak meghatározására szolgáló körkörös kiigazítás módszerét, az iteratív megoldás konvergenciájának feltételeit elemezték. Ezzel mintegy újra felfedezték a sajátérték és a sajátérték-tételek, a nyugati közgazdasági irodalmakban már ismert, fontosságát a nyereségrata meghatározásában. Bródy maga is felismerte, hogy a vizsgált ármodelljük hasonlít a Leontief-féle naturális input-output modellhez, nem más, mint annak duálisa.

Hiányzó matematikai közgazdaságtani ismereteit ekkor kezdi gyors ütemben pótolni (az egyetemről ugyanis eltávolították azt a kevés matematikus közgazdászt, akiktől hallgatóként tanulhatta volna). Mindenekelőtt az akkoriban már Magyarországon is terjedőben lévő Leontief input-output modelljével kezd el módszeresen foglalkozni, amelyről először 1957-ben közöl egy ismertető tanulmányt a Közgazdasági Szemlében. Még ugyancsak 1957-ben elkészíti kandidátusi disszertációja tervezetét, s évente közöl tanulmányt ebből a témából. Szakértőként részt vesz az első magyar ÁKM összeállításának Csepinszky Andor által irányított munkálataiban is. Az ÁKM-ről szóló kandidátusi értékelését 1961-ben védi meg, a disszertáción alapuló *Az ágazati kapcsolatok modellje* c. könyve pedig még később, csak 1964-ben jelenik meg.

Ebben a művében még az ismertetés és a módszer tervezésre történő adaptálása dominál, és van benne némi ideológiai felhang is, amiért később egy kicsit szégyenkezik: „még javában szidtam Leontiefet, hogy nem vallja be az igazi gyökereit . . . hogy Sztrumilintől és Popovtól plagizál” (311. o.), hiszen a korai szovjet társadalmi termék sakktabla mérlegét fejlesztette tovább. A disszertáció és a könyv igazi tudományos új eredménye, „legmatematikaibb része” a hibabecsléssel foglalkozó függelék. Megmutatja, hogy az input-output modellekkel végzett elemzések hibahatára jóval kisebb, mint az alapadatoké, ezért nagy biztonsággal lehet belőlük következtetni a kiegyensúlyozott ágazati szerkezetre és arányokra, továbbá a gazdaság növekedési potenciáljára. Ez a felismerés döntőnek bizonyul későbbi pályafutásában, ezért bízik meg az input-output közgazdaságtanban és ragaszkodik az input-output modellekkel végzett gazdaságpolitikai elemzésekhez.

A pálya felível: az értéktermelés és tőkeakkumuláció időszaka

Az 1960-as évtized a legnagyobb hatású és saját maga által is legjobban megírtnak tartott könyve előkészítése jegyében telik. A marxi értékelmélet és újratermelési elmélet matematikai modelljének megfogalmazásával foglalkozó kutatásainak két fontos előhírnöke az 1962-es budapesti nemzetközi input-output konferencián a termelési árak és a profitráta egyértelmű meghatározottságáról, illetve egy 1965-ös, ugyancsak egy budapesti konferencián előadott, a bővített újratermelés modelljéről szóló dolgozata, amelyek megjelennek angolul is.

1964-ben egy évet kutat Ford ösztöndíjjal a Harvardon, ahol Leontief mellett dolgozik. De legalább ekkora jelentőségű ottani találkozása Domarral, akivel később is folyamatosan tartja a kapcsolatot a növekedés témájában. Itt találkozik először jól működő számítógéppel, amelyen számos elemzést végez a legfrissebb amerikai ÁKM segítségével, és az amerikai gazdaság egyensúlyi arányairól és ciklusairól közöl tanulmányokat. Itt kezd el foglalkozni a növekedés és a ciklusok kérdéseivel is, ami hosszú időre meghatározza tudományos érdeklődését. Útban hazafelé fél évet tölt Cambridge-ben, az Applied Economics intézetben, ahol megismerkedhet a Stone által irányított Growth Projecttel. E hosszú külföldi tanulmányúton szerzett gazdag tapasztalatai döntően meghatározzák jövőbeli kutatási elképzeléseit. Azt szeretné megtalálni „hogyan és mitől mozog, leng a gazdaság, megfogalmazni a közgazdasági energiák mibenlétét”.

Külföldi útján szerzett ismertsége, meghívásai és elismerései természetesen megemelik hazai presztízsét is, és növelik munkakedvét. Hazatérve nagyjából készen áll a hosszú távú terve: „először ki kell fejteni a statikát, azután a dinamikát, de még technikai változás figyelembe vétele nélkül, végül föl kell tárnai a technikai változások tendenciáját. Három könyv lebegett előttem, ami az életmunkám lesz. S ha már három könyv, akkor mindegyik három fejezetre és minden fejezet három részre tagolódik, szóval a szonáta formával játszottam.” (315. o.) Nagyszabású elméleti és statisztikai munkába és adatgyűjtésbe kezd, hogy a hosszú távú gazdasági növekedés elemzését, amelyet a Harvardon szinte játszva elvégzett az amerikai gazdaság adataival (és a Harvard számítógépein), megismételhesse itthon magyar adatokkal. Ennek eredményeként lát napvilágot 1967-ben a termelés tökeigényességéről Ráczy Jenő közreműködésével elkészült terjedelmes és kiemelkedő tanulmányuk, illetve a „Gazdasági növekedésünk üteme 1924-től 1965-ig” című cikke.

Jó időben, és részben jó helyen is kezd foglalkozni a marxi témával! Az 1960-as évtizedben a marxi közgazdaságtan egyik reneszánszát éli, az érdeklődés homlokterébe kerül a marxi érték- és újratermelési modellek elemzése „a modern közgazdaságtan fényében” (Morishima). Elég ennek kapcsán példaként csak Seton [1957], Morishima [1958], Johansen [1963], Okishio [1963], Morishima [1973, 1978] munkáira utalni. Ezek sorozatába robban be az évtized végén, 1969-ben a részben már közreadott kutatásait művészi egységbe rendező, *Érték és újratermelés* című könyve magyarul és angolul (Proportion, prices and planning, 1970). A könyv alcímében visszafogottan és pontosabban jelzi tartalmát: *Kísérlet a marxi értékelmélet és újratermelési elmélet matematikai modelljének megfogalmazására*. A mű nagy hazai, és talán még nagyobb nemzetközi visszhangot vált ki. Kísérlete minden vitán felül a legautentikusabb és leghozzáértőbb matematikai újrafogalmazása lett a marxi gondolatoknak és konstrukcióknak. A rá jellemző fanyar humorral és önkritikával maga is úgy tartja később számon, mint „az egyetlen művem, ami viszonylag rendben is van”.⁴

⁴Modelljének komolyabb, de könnyen kijavítható hibája a munkaerőnek a többi áruval teljesen szimmetrikus kezelése. Ez egyrészt alátámasztani látszik a marxi értékelmélettel szemben gyakran felhozott körkötösség vádját, másrészt —Marxszal ellentétben— a

A könyvben természetesen sokkal többről van szó, mint csak a marxi érték- és újratermelési elméletéről. Ebben fejti ki máig is érvényes és szellemes módon a matematikai dualitás közgazdasági lényegét, ami felfogásában nem más, mint az áruk naturális jellemzőinek (használati érték) és értékelési rendszerének (csereérték) kölcsönös meghatározottsága. Könyvébe ugyancsak beépíti az állandó ráfordítási-kibocsátási együttthatókon és a dualitás elvén alapuló három jellegzetes közgazdasági modellt —nevezetesen Neumann és Leontief modelljének, illetve az optimális erőforrás-allokáció lineáris programozáson alapuló makrogazdasági modelljének— szoros matematikai és közgazdaságtani rokonságáról írt tanulmányát.

Könyve olyannyira sikeres lett, hogy a nemzetközi szakma —Bródy bánátára— végérvényesen a munkaérték-elmélet és az input-output szakértőjeként, Oscar Lange e téren végzett munkásságának folytatójaként könyvelte el –panaszkodott 1994-es interjújában. (Langéra valóban erősen támaszkodott a tőkemátrix elméleti megalapozásában.) Az 1970-es évek teoretikus hajlamú fiatal közgazdászai is elsősorban ezen a könyvön keresztül ismerkedtek meg a matematikai közgazdaságtannal, sőt, alapvetően ezen keresztül ismerték meg Marx közgazdaságtani mondanivalójának maradandó lényegét, amely a politikai gazdaságtan sekélyes oktatásában elsikkadt. Színes egyénisége, páratlan szellemessége és eleganciája fölvillanyozta és inspirálta a matematikai közgazdaságtan iránt érdeklődő fiatal közgazdászokat.

Szervesen beépül a nemzetközi vérkeringésbe, aktívan részt vesz nemzetközi input-output konferenciák szervezésében, azok előadásainak a szerkesztésében és publikálásában. 1987-ben közreműködik a Nemzetközi Input-Output Társaság és a társaság tudományos folyóiratának, az Economic Systems Research megalapításában (1989), amelynek 1994-ig főszerkesztője, majd a szerkesztőbizottság tagja volt. Itthon pedig bábáskodik a magyar matematikai-közgazdasági folyóirat, a Szigma 1970-beli megalapításánál, amelyben a fő érdem közvetlen munkatársáé, Martos Béláé. 1987-ben felkérlik a The New Palgrave közgazdasági enciklopédia „prices and quantities” szócikkének megírására.

Ciklus, ingadozás és elbizonytalanodás

Az 1960-as évek mechanizmusreform munkálatai nem ragadják meg fantáziáját: a „reformerek sem csábítottak”. A reform munkálatokat olyan „homokozónak” tartotta, amelyben „lehetett valamit fecsegni arról, hogy hogyan csináljuk a dolgokat, de a *mit* kérdéséhez, tehát a gazdaságpolitikához nem lehetett hozzászólni, és éppen abban voltak a hibák”. (322. o.) A reform előkészítésének az időszakát ezért inkább arra használja fel, hogy elkezdjen „komolyan és nyíltan foglalkozni matematikai-közgazdaságtani kutatásokkal” (306. o.), amit persze akkor még mindig nem nevezhetett a nevének, a nagydoktoriját is ezért korlátozta szigorúan Marx közgazdaságtanára.

munkaerő újratermelését is értékképző, profitot eredményező folyamatként ábrázolja. Mentségére szól, hogy ebbe a csapdába sokan belestek előtte és utána is. (Bővebben erről lásd Zalai [1997].)

A számszerűsített modelljeiből nyert tapasztalatai megnövelik önbizalmát, és 1969-ben írásban is nekimegy a növekedést erőtető gazdaságpolitikának. Ezek éles ellenkezést, feljelentéseket és vizsgálatokat váltanak ki, csúnyán összekülönbözik intézete vezetőivel, a KSH és a Tervhivatal vezető munkatársaival, akik összefognak ellene. E hajsza és a közben beállt „magánéleti bonyodalom” elől menekülne, az oktatásba vagy külföldre. Örök szívfájdalma maradt, hogy ekkor, ereje teljében, hazai és külföldi sikerei csúcán, nem kap tanszéket a Közgazdaságtudományi Egyetemen (korábban a Műegyetemen oktatott operációkutatást, de nem az volt a megfelelő közeg a számára). „Hogy az ember a saját országában ... a saját ismeretanyagával, a saját ifjúságával ne érintkezzék, azt én Bereinek, Szabó Kálmánnak és Berend T. Ivánnak nehezen bocsáthatom meg” (328. o.).

Maradt tehát a külföld, Afrikába menekül, ahol „végre taníthat is, ... lényegében mindent”. 1969 és 1972 között tanszékevezetést, majd 1974 és 1977 között tagozatvezetést vállal a Lusakai Egyetemen, Zambiában. Mellőzése miatt érzett fájdalmát az idő múlása, és az sem tudta vele feledtetni, hogy évek múltán rendszeresen tartott előadásokat a Közgazdaságtudományi Egyetem szakkollégiumaiban, különböző tanszékek rendszeresen meghívták előadni kurzusaikban. Sőt, az 1990-es években (meghívásomra) teljes féléves saját tárgyat is oktathatott a gazdaságelméleti szakirányon (amitől két év után csalódottan visszalép, mert kedvét szegi a lanyha hallgatói érdeklődés és visszacsatolás).

Az 1970-es évek ilyen kissé rendezetlen körülményei között készíti elő a korábban megtervezett második könyv anyagát, ami *Ciklus és szabályozás: Kísérlet a klasszikus piac- és cikluselmélet matematikai modelljének a megfogalmazására* címen fog megjelenni 1980-ban. Ennek a témának a kidolgozása jóval nehezebbnek bizonyult, mint a statikáé és a stacionárius növekedésé. Nem is lesz elég az erre szánt egy évtized, sőt egész hátralevő élete sem ennek kielégítő megoldására. Nem véletlenül. 1994-es interjújában így beszél erről: „Mi az a folyamat, ami elvisz az egyensúlyhoz?” – kérdezte tőle minduntalan Rényi, valahányszor leültek egymással „a gazdasági egyensúly problémáit megfogalmazni. ... ez egy ilyen furcsa szakma, itt semmi nem visz el az egyensúlyhoz, sem a piac, sem a tervezés. Nem tudom megadni a folyamatot, ha van, akkor sem konvergens. Az a csoda, hogy a gazdaság még működik. Azt kéne megmagyarázni, miért marad meg az egyensúly közelében, miért nem repül el a francba.” (307. o.) Bár megjegyzem, egyensúly helyett inkább a „különös attraktorra” (vonzási központra) gondolhatott, amiről pár mondatral később beszél.

A problémát tehát nem sikerül megnyugtatóan megoldania. Ennek ellenére nagyobbak tartja az utóbbi könyvében megfogalmazott ötleteit (különösen annak kimutatását, hogy a láthatatlan kéz által szabályozott piac ciklust generál, ugyanúgy, mint a látható kéz, a tervezés), mint az előző könyvében találhatók. „Egyelőre” gondolja és mondja később, és ez a kérdés nem hagyja nyugodni, élete utolsó percéig ez foglalkoztatja. Pedig érzi, hogy „a gazdaság nyilvánvalóan nem stabil, és nem megy az egyensúly felé. ... Nem lehet ... olyan elméletet sem alkotni, ami biztosítaná akár a piac, akár a

tervezés révén, hogy ez a (feltételezett – ZE) egyensúly létrejöjjön. ... a piac elméleti reformálása mégis csábos dolog a számomra.” (317. o.)

De ugyanakkor egyre kevésbé hisz abban, hogy „a közgazdaságtan a vezető tudománya ennek a kornak. Ez bizony csak segédtudomány.” (323. o.) Nem tartja kora vezető nemzetközi és hazai közgazdászait „all-round ökonómusoknak”, inkább csak magabiztos, önjelölt tanácsadóknak. Egyre nagyobb tisztelettel fordul a klasszikus közgazdászok felé, akiknek a „kora is klasszikus volt, ... a valóság akkor még valóban megfelelt az elméleteknek. ... mostanában valahogy ... egyáltalában nem óhajt megfelelni. Zavarodott korban vagyunk. Kiáltó ellentmondásokkal, abszurdításokkal tele korban” (uo.) – szögezi le.

Az idő lelassul, de a munka nem áll le

Minden kiábrándultsága ellenére azért írja tovább cikkeit és könyveit, s járja a világot („Természetes közegem volt a munka” (285. o.). A tervezett harmadik kötete, az 1983-ban megjelent *Lassuló idő: A gazdasági bajok magyar-arázatához*, eredetileg angolul született meg. A saját megítélése szerint is ez lett „legrosszabbul megcsinált” könyve, de ennek ellenére ez lett a legnépszerűbb műve. Ezt a könyvet részben „az OMFB-nek és a Tervhivatalnak jó pénzért” 1979-ben készített tanulmányok, részben az Indiában 1982-ben végzett kutatásai és előadásai alapján „odakentem és már inkább a publicisztika határán mozgott” (328. o.). (Delhibe Chakravarty professzor hívta meg, de előtte volt egy Leontief által kezdeményezett USA-beli kiruccanása is.) „Amit eredetileg vártam, hogy egy kicsit többet tudok írni a technikai fejlődés elméletéről, az nem jött be.” (340. o.) Ami fontosabb volt benne, az a Kondratieff-ciklusra alapozott előrejelzése annak, hogy a világ mély válság felé tart. Hasonló következtetésre jutott később a leghosszabb, mintegy kétszáz éves ciklusok vizsgálata során „*Arány, ütem és forma*” 2003-ban megjelent cikkében is. A sok kétséget támasztó ciklusmodellel való foglalkozást a későbbiekben is „kellemes öregkori elfoglaltságnak” találta.

A ciklusmodellek mellett elkezdett foglalkozni a termodinamika gazdasági alkalmazásainak lehetőségeivel, a gazdasági és fizikai mérés elméletével, illetve a hamiltoni formák elméletével. Erre Neumann János nevezetes sejtése sarkallta, aki úgy vélte, hogy a növekedési modelljéből származtatott profitfüggvénye formái szempontból analóg a termodinamika potenciálfüggvényeivel, sőt „feltehető, hogy a hasonlóság fennáll teljes fenomenológiai általánosságában” (Neumann [1965], 161. o.). Ugyancsak elkezd foglalkozni kurrens pénzelméleti témákkal, különösen azt vizsgálja, hogyan lehetne mérni a pénz forgalmi sebességet, a növekedési ciklusok és a pénz kapcsolatát. De ugyanakkor vissza-visszatér korábbi témáihoz is, Leontief zárt dinamikus modelljéhez, az ekvivalens árrendszerekhez, az input-output módszer hibátűrésének vizsgálatához, mivel úgy ítéli meg, hogy az árak és a mennyiségek állandó ingadozásai bizonytalan kiinduló adatokat szolgáltatnak, és ezért korrigálандók.

Részben az elméleti szakfolyóiratok, mindenekelőtt a hazai publikációinak

(a Szigma mellett) elsősorban helyet adó Közgazdasági Szemle példányszámának és olvasottságának drasztikus visszaesése, részben a rendszerváltás visszasságai indítják arra, hogy „próbálkozzék a szabad újságírással”. Válogatott publicisztikai írásai 1994-ben *Kompország ezredfordulója*, 1996-ban *Falraborsó* címen jelennek meg. Később ezt a passzióját feladja, mert nem vérbeli publicista, ezeket a karcolatait ugyanolyan műgonddal és lassan készíti el, mint tudományos dolgozatait. De lehet, hogy az is hozzájárult visszavonulásához, hogy ezek a közéleti írásai nem mindig voltak összhangban azzal az erősen „kaszton- és társadalmonkívüli” személyiség képével, amilyennek magát látni és láttatni szeretne volna.

Élete utolsó napjáig, még halálos betegen is dolgozott. Makacs kitartással próbálta megoldani a megoldhatatlant: megtalálni, szabatosan és egyszerű formában leírni a gazdaság gravitációs törvényét, azt a mechanizmust, ami egy piacgazdaságot „egyensúly” közelében tart és egyidejűleg „fejlődésre” sarkall, éspedig nagyobb ingadozások nélkül. A félig csonkán maradt utolsó angol nyelvű kézírata (Growth or development?) az ebben az irányban folytatott tapogatózásainak mementója. Életműve azonban nem maradt csonka, így is maradandót alkotott. Nyugodjék békében!

Bródy András kiemelt, illetve idézett munkái időrendben

1. A minőség javításának és az önköltség csökkentésének néhány problémája. *Közgazdasági Szemle*, 2. évf. 1955. 3–4.sz. 453–461.
2. Az árrendezés problémája. *A MTA Matematikai Kutatóintézetének Közleményei*, 1. évf. 3. sz., 1956, 325–335. o. (társszerző Rényi Alfréd)
3. A hóvégi hajrá és gazdasági mechanizmusunk. *Közgazdasági Szemle*, 3. évf. 1956. 7–8.sz. 870–833.
4. Input-output: Módszer a nemzetgazdasági folyamatok elemzésére. *Közgazdasági Szemle*, 4. évf. 1957. 2. sz. 145–165.
5. *Tárgymutató A tőke három kötetéhez*. Bp. Kossuth Könyvkiadó, 1959. 124 o.
6. The unicity of the prices of production prices and of the average rate of profit. In: *Input-output tables. Their compilation and use*. Bp.: Akadémiai Kiadó, 1962, 243–249.
7. *Az ágazati kapcsolatok modellje: a felhasznált absztrakciók, azok korlátai és a számítások pontossága*. Bp: Akadémiai K. 1964. 218 o.
8. The model of expanding reproduction. In: *Colloquium on applications of mathematics to economics* (Bp. 1963). Bp.: Akadémiai Kiadó, 1965. 61–63.
9. A termelés tőkeigényessége a kapitalizmusban (13–71. o.). *Az állóalapok és a termelés összefüggése a magyar iparban*. Bp. Akadémia K. 1966. 331. o. (társszerző Rácz Jenő)
10. Gazdasági növekedésünk üteme 1924-től 1965-ig. *Közgazdasági Szemle*, 13. évf. 1967. 4. sz. 417–431.
11. A gazdaság lineáris matematikai modelljéről. *Közgazdasági Szemle*, 13. évf. 1967. 2. sz. 168–181.
12. *Érték és újratermelés: kísérlet a marxi értékelmélet és újratermelési elmélet matematikai modelljének megfogalmazására*. Bp.: KJK, 1969. 357 o.

13. *Beszámoló a dinamikus ÁKM-moddellel végzett első magyarországi számításookról.* Bp. MTA KTI, 1969. 43. o.
14. *Proportion, prices and planning. A mathematical restatement of the labor theory of value.* Bp., Amsterdam: Akadémiai K., North-Holland Publishing Co. 1970. 194 p.
15. *Ciklus és szabályozás: Kísérlet a klasszikus piac- és cikluselmélet matematikai modelljének megfogalmazására.* Bp.: KJK, 1980. 271 p.
16. *Lassuló idő: A gazdasági bajok magyarázatához.* Bp.: KJK, 1983. 166 p. Utánnnyomás: 1984. (angolul: Slowdown: Global economic maladies. Beverly Hills, Calif.: Sage, 1985. 160 p.)
17. Gazdasági és termodinamikai mérés. *Közgazdasági Szemle*, 33. évf. 1986. 19–27. (társszerzők: Martinás Katalin és Sajó Konstantin)
18. Prices and quantities. *The new Palgrave.* London: Macmillan, 1987. 957–960.
19. Economics and thermodynamics. *John von Neumann and modern economics* (ed. Dore – Chakravarty – Goodwin). Oxford: Clarendon Press, 1989. 141–148.
20. A gazdasági mérésről: Elmélet, illusztráció és modellszintézis. In: *A mérés problémája a társadalomtudományokban*, Bp.: OMIKK : TÁRKI, 1993. 88–106.
21. Money-flow computations. *Economics Systems Research*, Vol. 5. 1993. No. 3. 225–233. (társszerző Leontief, W. W.)
22. *Kompország ezredfordulója.* Szombathely: Savaria Univ. Press, 1994. 169 o.
23. *Falrabszó. Válogatott mérgelődések.* Szombathely: Savaria University Press, 1996. 182 o.
24. A piac és az egyensúly: A neumanni és a kvázi-hamiltoni rendszer. *Közgazdasági Szemle*, 44. évf. 9. sz. 1997. 738–755.
25. A növekedési ciklusok és a pénz: A legegyszerűbb hullámmátrix és alakzatai. *Sigma*, 29. évf. 3. sz. 1998. 67–80. o.
26. Arány, ütem és forma: A ciklusok alaktanához. *Közgazdasági Szemle*, 50. évf., 2003. február 136–151.
27. Ekvivalens árrendszerek. *Sigma*, 35. évf. 1-2. sz. 2004. 61–65.
28. A tartós depresszióról – a tőzsdeindex mozgása. *Közgazdasági Szemle*, 56. évf. 2. sz. 2009. február, 119–132. o.

További idézett irodalmak

1. Bekker Zsuzsa [1999]: Bródy András 75 éves. *Közgazdasági Szemle*, 46. évf., október 849–850.
2. Cummings, E. E. (1958): A Poet's Advice. In: Dupee, F. W. and G. Stade, eds. *Selected Letters of E. E. Cummings*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1969.
3. Johansen, L. [1963]: Labour theory of value and marginal utilities. *Economics of Planning*, Volume 3, Number 2, 89–103.
4. Kovács János Mátyás [1994]: Beszélgetés Bródy Andrással. In: *Miért hagytuk hogy így legyen? Tanulmányok Bródy Andrásnak.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 271–348.

5. Morishima, M. [1958]: Prices, interest and profits in a dynamic Leontief system, *Econometrica*, No. 3.
6. Morishima, M. [1973]: *Marx's Economics*. Cambridge University Press, Cambridge.
7. Morishima, M. – Catephores, G. [1978]: *Value, Exploitation and Growth (Marx in the Light of Modern Economic Theory)*. McGraw–Hill, London.
8. Neumann János [1965]: Az általános gazdasági egyensúly egy modellje. In: Neumann János. *Válogatott előadások és tanulmányok*. (ford. Augusztinovics M.) Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 160–176.
9. Okishio, N. [1963]: A Mathematical Note on Marxian Theorems. *Weltwirtschaftliches Archiv*, Bd. 91, 287–299.
10. Seton, F. [1957]: The Transformation Problem, *Review of Economic Studies*, Vol. 24. 149–160.
11. Zalai Ernő [1997]: Production Prices and Proportions Revisited (In: Simónovits and Stenge, ed's., *Prices, Growth and Cycles: Essays in Honour of András Bródy*, Macmillan Press and St. Martin's Press, 280–301.)

PAUL ANTHONY SAMUELSON
(1915-2009)

VINCZE JÁNOS

Paul Anthony Samuelson a XX. század egyik legnagyobb és egyik legnagyobb hatású közgazdásza volt. Halála előtt és azután is sokat és sokan méltatták, tudományos, oktatói, közírói tevékenységéről bárki megtudhat szinte mindent, és egyéniségéről is olvashatunk bőségesen. Mint „nagy klasszikust” vélhetőleg kevesen olvassák közvetlenül —valószínűleg ma már a híres tankönyvet sem ismerik annyian, mint régen— hiszen azt gondoljuk, hogy ami fontos volt munkásságában azt azóta is használja az irodalom, beépült a tankönyvekbe. Én azok közé tartozom, akik sok eredeti Samuelson-t olvastak, és elmondhatom, hogy ezek nemcsak élményt jelentettek számomra, hanem maradandó hatást is tettek rám. Egy ilyen kései nekrológ egyetlen esetben lehet valamennyire is értelmes: ha találunk valami olyat, ami talán elsikkadt a megemlékezésekből és méltatásokból, sőt ami „nem épült be”. Mivel a folyóirat, ahol ez az írás megjelenik „matematikai közgazdaságtani”, igyekszem a matematika és a közgazdaságtan kapcsolatára koncentrálni.

Első találkozás: a „Samuelson”

Első évfolyamos közgazdász hallgatóként kezdtem el tanulmányozni a vastag tankönyvet, és, ha jól emlékszem, többé-kevésbé végig is olvastam. Nagyon más volt, mint a mi könyveink, amiből tanulnunk kellett. Én mindenesetre rendkívüli módon élveztem. A „Közgazdaságtan” bevezető tankönyv, amely nem használ felsőbb szintű matematikát, egy szinte triviális dolgot szeretnék kiemelni belőle, ami azonban érzésem szerint elsikkadt az utóbbi évtizedekben a közgazdaságtan modernizált oktatása során is.

Samuelson évdő természet volt —legalábbis írásaiban— és megjegyezte, hogy a közgazdászok, és általában az emberek, unos-untalan használják a kereslet-kínálat fogalompárt, mint valami varázskifejezést. De tudjuk-e mindig pontosan, hogy miről beszélünk, amikor azt mondjuk, hogy a kereslet nő? Itt egy világos, grafikus bevezetés következett a keresleti függvény fogalmáról, és arról, hogy meg kell különböztessük a görbén való elmozdulást, a görbék eltolódásától. A mindmáig érvényes tanulság számomra a következő. A közgazdaságtan szükségképpen használ olyan köznapi kifejezéseket, amelyeket „nagyjából” értünk, de precíz definíció híján nem biztos, hogy nem értjük-e félre egymást. A matematika legegyszerűbb funkciója az, hogy az alapfogalmak tisztázásában és közös megértésében segít, e nélkül a kommunikáció gyakran kudarcot vall. Időnként felsőbb éves hallgatóktól meg szoktam kérdezni néhány általuk is gyakran használt alapfogalom jelentését, és ritkán kapok kifogástalan választ. Miért kell törődnünk az alapfogal-

makkal? Elég, ha gazdasági szaklapokat olvasunk, vagy gazdaságpolitikai beszélgetéseket hallgatunk. A viták gyakran látszólagosak, úgy tűnik, a vitázó feleknek csak egy közös szótárra lenne szükségük.

Második találkozás: „Foundations”

A Foundations of Economic Analysis az egyik utolsó klasszikus közgazdaságtudományi könyv. Különböző időpontokban, nem sorrendben, de majdnem az egész könyvet olvastam, illetve használtam kézikönyvként is. A könyv alap gondolatát az szolgálta, hogy a szerző rájött arra, hogy egymástól látszólag távol eső területeken lényegében ugyanazokat az állításokat vezette le („... I was simply proving the same theorems a wasteful number of times” P. A. Samuelson: Foundations of Economic Analysis, Atheneum, New York, 1970, 3. oldal). Azaz léteznek olyan absztrakt struktúrák, amelyek „felfedése” gyümölcsöző lehet, hiszen az absztrakció eredményeként olyan helyeken is alkalmazhatóvá válhatnak bizonyos gondolatok, ahol erre eddig nem gondoltunk. (A példák nemcsak a közgazdaságtanon belülről származnak, több fizika és közgazdaságtan közti átvitel is megfogalmazódik, talán a leghíresebb a Le Chatelier-Samuelson elv.) Ez már a matematika, a matematikai gondolkodás egyértelmű diadala, ahol a felhasznált matematika is felső szintű.

Az általam ismert kiadás előszava kimondottan a matematika szerepével is foglalkozik a közgazdaságtanban. Samuelson egyik nagy alkalmazója a „mottó-módszernek”, vagyis mondanivalóját gyakran egy idézettel, mottó formájában vezeti be, és teszi világossá. A mottó itt J. Willard Gibbs-től, a kiváló amerikai fizikustól származik, és egy nagyon egyszerűnek tűnő állítás: Mathematics is a language. A mottók egyik funkciója az, hogy gondolkodásra készítetnek, ami sokkal fontosabb bizonyos esetekben, mint az explicit megfogalmazása néhány tézisnek. Mit is jelent a fenti aforizma? Nem akarok senkit megfosztani a gondolkodás örömétől, de néhány olyan megjegyzést szeretnék tenni, amivel azt hiszem Samuelson is egyetértene.

A nyelvhasználat az ember egyik legfontosabb attribútuma, az emberiség biztosan nem érte volna el azokat az „eredményeket”, amiket elért, nyelvhasználat nélkül. Ugyanakkor a nyelv nem az egyetlen lehetséges módja a kommunikációnak, és a gondolkodás és a nyelv azonosítása filozófiai nézetnek is extrém. Másfelől, mint minden nagy „találmány”, a nyelv sem csak jóra használható, egymás félrevezetése, rágalmozása is lehet a nyelvhasználat célja. Mi következik ezekből a matematika, mint nyelv, és a közgazdaságtan kapcsolatára? Számomra elsősorban az, hogy a matematika használata óriási fejlődést tesz lehetővé, olyan eredményekre juthatunk el segítségével a közgazdaságtanban, ahova matematikai modellek nélkül nagyon nehéz, vagy inkább lehetetlen lenne eljutnunk. Samuelson munkássága ezt fényesen bizonyítja. A matematika használatát általában ellenzők vagy anti-intellektualizmusból, vagy a technokrácia elutasításának ideológiai elvéből, vagy egyszerűen csak tudatlanságból teszik ezt, ahogy a primitív emberek is hajlamosak lenézni az idegeneket, akiket nem értenek. Ugyanakkor a nyelv (a matematika) használata lehet inadekvát, fölösleges, és néha alkalmas önmagunk és mások

félvezetésére is. Mint lejjebb a harmadik találkozás leírásánál látható lesz, Samuelson számára a közgazdaságtan empirikus tudomány volt, amelynek végső soron konkrét társadalmi jelenségekről kell mondania valamit, és az absztrakt, matematikai modellek hasznossága, vagy jósága csak ennek a végcélnek a függvényében értelmezhető. Bár egy futballistának jó atlétikus adottságokkal is rendelkeznie kell, és ezeket fejlesztheti is, a futballista nem futó vagy magasugró. Hasonlóképpen a közgazdász csak alkalmazza a matematikát, és maga nem matematikus. Persze nem ártalmas, ha egy futballista 10 másodperc alatt futja a 100 métert, vagy ha egy közgazdász kiváló matematikus, és egyébként is van csapaton belüli munkamegosztás a világon. Mellékesen megjegyzem, hogy Samuelson-nal egyik legmeglepőbb találkozásom az volt, amikor egy mátrixelmélet könyvben találkoztam vele, a karakterisztikus polinomokkal kapcsolatos cikke 1942-ben jelent meg az *Annals of Mathematical Statistics*-ban, és még ma is idézik.

A könyv előszavának van egy másik számomra emlékezetes gondolata is. Samuelson mindig is elismerte, hogy a közgazdaságtan „puha” tudomány, tette ezt avval együtt, hogy a matematika közgazdaságtani alkalmazásának egyik legnagyobb hatású úttörője volt. Viszont úgy gondolta, hogy a közgazdaságtannak az a képessége, hogy természeténél fogva több matematika „befogadására” alkalmas, mint más társadalomtudományok, a „két kultúrát” összekötő kapocs szerepkört biztosíthat neki. Számomra, aki annak idején C.P. Snow lelkes olvasója voltam, ez sokat jelentett, úgy éreztem, hogy mégis csak van valami transzcendentálisabb értelme a közgazdász foglalkozásnak.

Harmadik találkozás: „Samuelson borotvája”

Lehet, hogy ma már kevesen tudják, de az 50-es és 60-as években a közgazdaságtan metodológiájáról nemcsak metodológus specialisták, hanem közgazdászok is vitatkoztak. Friedman 1953-as pozitív közgazdaságtant hirdető munkája vihart kavart, és Friedman egyik legnagyobb kritikusa Samuelson volt (lásd például *American Economic Review* Vol. 53, No. 2, *Papers and Proceedings of the Seventy-Fifth Annual Meeting of the American Economic Association*, 331–336. o.). Samuelson Friedman gondolatai közül elsősorban az általa F-csavarnak nevezettet bírálta. Az F-csavar jelentése az, hogy ha van egy elméletünk, és abból levezetünk bizonyos olyan empirikusan tesztelhető következményeket, amelyek tűrhetően egyeznek a megfigyelésekkel, akkor nem kell törődnünk azzal, hogy az elmélet „feltevései” igazak, vagyis azok maguk összhangban vannak-e megfigyelésekkel. Samuelson ezt az állítást logikailag abszurdnak tartotta, és ezt igyekezett formálisan is bizonyítani. Ez a bizonyítása egy szép alkalmazása a matematikai érvelésnek, persze lehet ellene úgy védekezni, hogy Samuelson nem helyesen „modellezte” a kritizált érvelést.

Másfelől az F-csavar elfogadásának pszichológiai gyökereit abban vélte felfedezni, hogy a közgazdászok szeretik a szép, egyszerű, és általános (nice, simple, unified) elméleteket, és ezért ragaszkodnak például a kompetitív piacok elméletéhez, a már akkor is létező monopolisztikus verseny elmélettel

szemben. Az egyszerűség, általánosság stb. tipikusan matematikai kritériumok, amelyek azóta is velünk maradtak, habár mára a monopolisztikus verseny elmélete is felruházódott ezekkel a tulajdonságokkal. Viszont Samuelson rámutatott arra is, hogy az absztrakt és leegyszerűsített („valóságidegen”) modellek nem haszontalanok. Nemcsak a közgazdaságtan, hanem „keményebb” tudományok is használnak ilyeneket. Hasznosságuk az összefüggések felfedezésének segítése, a megértés felé vezető út megkönnyítése. Hasonlata szerint az állványzat fontos az építkezésben, de az épületnek magában is meg kell tudnia állnia. Empirikusan „hamis” absztrakt modellek érvényes elméletként való elfogadása olyan, mintha az állványt összekevernénk az épülettel.

Érvelése során megalkotta a Samuelson borotvája elvet. Álljon itt az elv az eredeti megfogalmazásban: All economic regularities that have no common-sense core that you can explain to your wife will soon fail. Az elv ma —sajnos— nem ismert és nem népszerű. Ennek egyik oka lehet a megfogalmazás, ami nem korrekt politikailag. (Samuelson valószínűleg akkor még nem ismerte ezt a fogalmat.) Fogalmazzuk át az elvet az alábbi módon: minden közgazdasági szabályszerűség, amely maradandó érvényű, tartalmaz annyi józan megfontolást, hogy egy általános műveltséggel és intelligenciával rendelkező egyén, aki szellemi erőfeszítésekre is hajlandó, megértheti. Így a megfogalmazás persze sokkal unalmasabb, de legalább nem kifogásolható ideológiailag. Az állítás mindenképpen kevésbé „ütős”, mint az F-csavar. Az utóbbi könnyen átültethető volt gyakorlati viselkedési szabállyá: építs egy olyan egyszerű modellt, amelynek van valami köze a valósághoz (ne törődj avval, hogy bizonyos részeiben ellentmond akár a hétköznapi tapasztalatoknak is), vezesd le néhány empirikus következményét, majd építs rá valamilyen statisztikai modellt, amelyben, ha ügyesen választod meg az alternatív hipotézist (azaz az ellenfelet), akkor a tesztelés eredményeként az elméletedet elfogadhatónak nyilváníthatod. (Nem kell, hogy mindenki magára vegye ezt a leírást, ami karikatúra kívánt lenni.)

Ezzel szemben Samuelson borotvája kétféleképpen is használható lenne. Egyfelől empirikus állításként: találhatunk vajon olyan maradandó közgazdasági szabályszerűséget, amely nem tesz eleget a „józan ész” követelménynek? Másfelől pedig irányíthatná a kutatást, a kutatási pénzek odaítélését, a folyóiratok működését stb. Manapság több új és régebbi sütetű elméletkritikus tudja be az absztrakt, ám irrealisztikus modelleknek magát a válságot, vagy a válsággal szembeni tehetetlenséget. Nem szeretnék ezekhez csatlakozni, mert ez egyszerű tradicionális bűnbakkeresés. A probléma kevésbé drámai, de lehet, hogy rosszabb. Úgy gondolom, hogy a Friedman-féle metodológia győzelme Samuelson-nal szemben az erőforrások hosszabb távon hibás elosztásához (misallocation) vezetett, és még vezet ma is. Túl sokan folytatnak reménytelen „validációs” gyakorlatokat egyszerű, és nyilvánvalóan empirikusan hamis modellekkel, amelyek bizonyos jól megválasztott aspektusokban „sikeresek”, azaz megpróbálják fenntartani a látszatot, hogy az állványzat maga az építmény. Hangsúlyozom még egyszer, amit Samuelson mondott: az egyszerű modell (az állványzat) nem haszontalan, csak nem kell összekeverni azzal, aminek a felépítésében segít.

Tehát van három tanulságom Samuelson életművéből leszűrve: 1. a matematika tiszta fogalmakhoz, és ezáltal kevesebb értelmetlen vitához vezet, 2. a matematika, ha ott és úgy alkalmazzuk, ahogyan kell, akkor hatalmas segítőtje a közgazdaságtannak, 3. de a közgazdaságtan nem matematika, nem matematikai kritériumoknak kell döntenünk a közgazdasági elméletek között. A matematikai jellegű kritériumok használata alapvetően „védekező” jellegű, legalábbis a közgazdaságtan egyes területein, speciálisan a makroökonómiában. Ugyanis, ha törődnénk az elméletek „feltevéseinek” igazságával, akkor sokkal nehezebb lenne „érvényes” elméletet megfogalmazni, és be kellene látnunk azt, hogy elméletek gyártása helyett a tények gyűjtésének kevésbé elegáns munkája is komoly feladat. Samuelson képességei és vélhetőleg ízlése alapján igazi elméleti közgazdász volt, csak talán szkeptikusabb, és józanabb, mint sok kollégája.

Hadd tegyek hozzá az eddigiekhez még valamit: Samuelson az egyik legszórakoztatóbb szerző, akit valaha olvastam, és nemcsak a közgazdászok között. Ha valaki értékeli a humort, akkor is előveheti, ha nem ért egyet a filozófiájával.

LOKÁLIS ENERGIAMÓDSZER KICSI RENDBEN GERJESZTETT LIÉNARD-EGYENLETEKRE¹

KÁNNAI ZOLTÁN
Budapesti Corvinus Egyetem

Az $x'' + f(x) \cdot x' + g(x) = 0$ alakú Liénard-típusú differenciálegyenlet központi szerepet játszik az üzleti ciklusok Káldor-Kalecki-féle [3,4] és Goodwin-féle [2] modelljeiben, sőt egy a munkanélküliség és vállalkozás-ösztönzések ciklikus változásait leíró újabb modellben [1] is. De ugyanez a nemlineáris egyenlettípus a gerjesztett ingák és elektromos rezgőkörök elméletét is felöleli [5]. Az ezzel kapcsolatos irodalom nagyrészt a határciklusok létezését vizsgálja (pl. [5]), pedig az alapvető stabilitási kérdések jóval áttekinthetőbb módon kezelhetők, s a kapott eredmények közvetve a határciklusok létezésének feltételeit is sokkal jobban be tudják határolni. Jelen dolgozatban az egyváltozós analízis hatékony nyelvezetével olyan egyszerűen megfogalmazható eredményekhez jutunk, amelyek képesek kitéríteni az üzleti és más közgazdasági ciklusok modelljeinek kereteit, illetve pl. az [1]-beli modellhez újabb szemléltető speciális eseteket is nyerünk.

Kulcsszavak: Liénard-egyenlet, pendulum, stabilitás, Ljapunov-függvény.

1 Bevezetés: Stabil és instabil pendulum

Az alábbiakban vizsgálandó Liénard-egyenletek relevanciája nem korlátozódik határciklusok vizsgálatára, hanem ezek az egyenletek hatékonyan alkalmazhatók olyan egyensúlyi vizsgálatok során is, amelyeket hagyományosan lineáris modellekkel szoktak leírni, ám az elsőrendű közelítés jogossága távolról sem tisztázott. Erre már a legegyszerűbb matematikai pendulum (inga) is jó példa, hiszen a rá vonatkozó irodalom egy részében nem is érintik ezt a kérdést. Bonyolultabb rendszerek esetén pedig akár még hamis képet is adhat a lineáris közelítés. Később még arra is látunk példát (15. Példa), hogy az

$$x'' + x^2 \cdot x' + x^3 = 0$$

egyenlet origóbéli lineáris közelítése instabil, jóllehet az eredeti egyenlet nullállapota aszimptotikusan is stabil.

Összetett társadalmi és gazdasági jelenségeket tapasztalva gyakran élünk „az inga kileng” és „az inga túllendül” frázisokkal, attól a gondolattól vezérelve, hogy ugyanannak a törvényszerűségnek a bonyolultabb arcát az egyszerűbbel világítsuk meg. Valójában azonban nagyon hamar túllépünk a törvényszerűségek megállapításán, s nem gondolunk arra, hogy mindenekelőtt

¹Beérkezett: 2010. április 23. E-mail: szidar@sie.arizona.edu.

olyan egyszerű dologgal is tisztába kellene jönnünk, mint a matematikai pendulum.

Fizikai tanulmányokból ismert, hogy a matematikai pendulum mozgását az

$$x'' + \sin x = 0$$

másodrendű differenciálegyenlet írja le. Mivel az egyenlet közvetlen megoldása viszonylag nehéz, ezért kis kilengések esetére $\sin x \approx x$ azonosítással át szoktak térni az

$$x'' + x = 0$$

egyenletre, amit már könnyű megoldani, sőt a megoldásából kapott lengésidő nagy pontossággal esik egybe a pendulum kísérleti értékeivel. Viszont nagyon sok olyan másodrendű egyenlettel is találkozunk, amelyeket nem hogy nem tudunk megoldani, de még egy leegyszerűsített egyenlet során sem tudjuk kísérletileg leellenőrizni, hogy az egyszerűsített egyenlet megoldásai mennyire pontosan közelítik az eredeti egyenlet megoldásait. (Egy atomerőmű tervezésekor például túlságosan késő lenne kísérletileg verifikálni, hogy az eredeti rendszer nem követte a linearizált rendszer stabilitását.)

Kézenfekvő hát a kérdés: egy másodrendű egyenlet során jogos-e a linearizálás, a fenti típusú elsőrendű közelítés? Másképpen: az eredeti egyenlet (rendszerre átírt alakja) nullállapotának stabilitása leolvasható-e a linearizált rendszer nullállapotának stabilitásából? (Ha tudniillik a válasz nemleges, akkor az eredendően nemlineáris folyamat lineáris közelítése — abszurdum.)

A válasz kettős: egyrészt látni fogjuk (3. Tétel), hogy egy az állapot első deriváltjától *közvetlenül* nem függő

$$x'' + g(x) = 0$$

alakú egyenlet (amilyen a matematikai pendulum is) sosem lehet úgy instabil, hogy a linearizált rendszere stabil lenne. ($g'(0) = 0$ esetén viszont előfordulhat, hogy a linearizált rendszer instabil, míg az eredeti rendszer stabil.) Másrészt egy az első deriválttól is függő egyenlet esetében már előfordulhat, hogy a linearizált rendszer ugyan stabil, de az eredeti egyenlet instabil. Sőt olyan instabil nullállapotú másodrendű egyenlet is létezik, amelynek a linearizálása azonos a matematikai penduluméval. A későbbiek során még olyan másodrendű differenciálegyenletre is mutatunk példát, amelynek nullállapota aszimptotikusan stabil, jóllehet az elsőrendű közelítés instabil. Ez mind arra mutat, hogy a pendulum esetében is az elsőrendű közelítéssel való helyettesítés – minden további indoklás nélkül – jogtalan.

1. Példa. *Vizsgáljuk meg az*

$$x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$$

másodrendű egyenletet. Vegyük ennek az $x = 0$, $x' = 0$ állapota körüli lineáris közelítését, és jellemezzük a linearizáció stabilitását! Jellemezzük az eredeti egyenlet $x = 0$, $x' = 0$ állapotának stabilitását is!

Megoldás. Rendszerre átírva

$$\begin{cases} x' &= & y \\ y' &= & -x + 3x^2y \end{cases},$$

ennek egyedüli egyensúlya az origó. A jobb oldal deriváltja $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+6xy & 3x^2 \end{bmatrix}$, ami a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ helyen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát az egyenletünkéből adódó linearizált rendszer azonos a matematikai penduluméval, ami stabil (persze nem vonzó). A Ljapunov-féle direkt módszerrel megmutatjuk, hogy ennek ellenére egyenletünk nullállapota instabil. A

$$V(x, y) := -x^2 - y^2 + x^3y - xy^3$$

egyenlőség Ljapunov-függvényt definiál a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pontban. Ekkor

$$V'(x, y) = [-2x + 3x^2y - y^3, -2y + x^3 - 3xy^2]$$

és

$$V''(x, y) = \begin{bmatrix} -2 + 6xy & 3x^2 - 3y^2 \\ 3x^2 - 3y^2 & -2 - 6xy \end{bmatrix},$$

tehát

$$V''(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

ami negatív definit mátrix, tehát V -nek az origóban szigorú lokális maximuma van. Ez $V(0, 0) = 0$ miatt azt jelenti, hogy V negatív definit Ljapunov-függvény az origóban. Ugyanakkor V -nek a fenti rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} \partial_f V(x, y) &= -2xy + 3x^2y^2 - y^4 + 2xy - x^4 + 3x^2y^2 - 6x^2y^2 + 3x^5y - 9x^3y^3 = \\ &= -y^4 - x^4 + 3x^5y - 9x^3y^3. \end{aligned}$$

Gondoljuk meg, hogy ez negatív definit az origóban. Legyen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos \alpha \\ r \cdot \sin \alpha \end{bmatrix}$ ($r \geq 0$), ezzel

$$\begin{aligned} \partial_f V(x, y) &= -r^4 \sin^4 \alpha - r^4 \cos^4 \alpha + 3r^6 \cos^5 \alpha \sin \alpha - 9r^6 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha = \\ &= -r^4 \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 3r^2 \cos^5 \alpha \sin \alpha + 9r^2 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha). \end{aligned}$$

Mivel $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \geq \frac{1}{2}$, így a zárójelben levő rész legalább $\frac{1}{2} - 12r^2$, ami $r < \frac{1}{2\sqrt{6}}$ esetén pozitív. Azaz $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2\sqrt{6}}$ esetén $\partial_f V(x, y)$ negatív. Tehát $\partial_f V$ tényleg negatív definit az origóban.

Mivel V is, $\partial_f V$ is negatív definit az origóban, ezért a megfelelő Ljapunov-tétel miatt a fenti rendszer, következésképp másodrendű egyenletünk nullállapota is instabil, jóllehet a pendulum elsőrendű közelítésének megfelelő szokásos logikával itt is ugyanahhoz a stabilan rezgő rendszerhez jutnánk.

2. Megjegyzés. A $V(x, y) := x^2 + y^2 + x^3y - xy^3$ Ljapunov-függvény segítségével a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy az

$$x'' + 3x^2 \cdot x' + x = 0$$

másodrendű egyenlet $x = 0, x' = 0$ állapota aszimptotikusan stabil.

3. Tétel. Legyen $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a 0 egy környezetében értelmezett folytonosan deriválható függvény, továbbá $G(0) = G'(0) = 0$. Ekkor az

$$x'' + G'(x) = 0$$

másodrendű egyenletnek az origó soha nem lehet vonzó egyensúlya, továbbá

- ha G -nek 0-ban szigorú lokális minimuma van (speciálisan ha G' a 0-ban $(-, +)$ -előjelet vált), akkor az origó stabil;
- ha G' a 0-ban $(+, -)$ -előjelet vált akkor az origó instabil.

Következésképp, ha G kétszer folytonosan deriválható és $G''(0) \neq 0$, akkor az egyenlet stabilitása ekvivalens a megfelelő

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -G''(0) \cdot x \end{aligned}$$

linearizált rendszer stabilitásával.

Bizonyítás. Az egyenletet írjuk át rendszerré:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -G'(x) \end{aligned}$$

és tekintsük ehhez a

$$V(x, y) := G(x) + \frac{1}{2}y^2$$

Ljapunov-függvényt. Ennek a jobb oldal szerinti deriváltja

$$G'(x) \cdot y + y \cdot (-G'(x)) = 0$$

(tehát V a rendszernek egy ún. első integrálja). Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek a 0 egy alkalmas környezetében haladó tetszőleges x megoldására

$$G(x(t)) + \frac{1}{2}(x'(t))^2 = \text{konstans},$$

így $x'(0) \neq 0, x(0) = 0$ esetén $x(t)$ és $x'(t)$ nem tarthat egyidejűleg 0-hoz. Ezért a rendszer (és így az egyenlet) nullállapota nem lehet vonzó.

Tekintsük most az 1. esetet, azaz amikor G -nek 0-ban szigorú lokális minimuma van. Ekkor V nyilván pozitív definit az origóban, így a jobb oldal szerinti derivált nulla volta miatt a rendszer (és így az egyenlet) nullállapota stabil.

Végül tekintsük a 2. esetet. Ekkor

$$W(x, y) := -xy$$

az origóban indefinit Ljapunov-függvény, amelynek a rendszer szerinti deriváltja

$$-y^2 + x \cdot G'(x),$$

ami az origóban negatív definit, hiszen $x \cdot G'(x)$ -nek 0-ban szigorú lokális maximuma van. Így Ljapunov megfelelő instabilitási tétele miatt a rendszer (és így az egyenlet) nullállapota instabil. \square

4. Következmény. *A matematikai pendulumra vonatkozó $x'' + \sin x = 0$ egyenlet nullállapota stabil, de nem vonzó.*

5. Példa. *A fenti tétel alapján az*

$$x'' + x^3 = 0$$

egyenlet nullállapota stabil (nem vonzó); az

$$x'' - x^3 = 0$$

egyenlet nullállapota pedig instabil. Megjegyezzük, hogy mindkét egyenlet rendszerre való átírásának origóbeli lineáris közelítése $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ami instabil.

A fenti tételből az is következik, hogy ha G -nek 0-ban szigorú lokális minimuma van, akkor az $x'' + G'(x) = 0$ egyenlet $x(0) = x'(0) = 0$ megoldása egyértelmű. Ez azért érdekes, mert ha G' csak folytonos, akkor az egyenletre nem alkalmazható a Picard-Lindelöf-féle egzisztenciátétel, amelyből az egyértelműség szokásosan tudható.

6. Következmény. *Legyen $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a 0 egy környezetében értelmezett folytonosan deriválható függvény, továbbá $G(0) = G'(0) = 0$. Ha G -nek 0-ban szigorú lokális minimuma van, akkor az*

$$\begin{aligned} x'' + G(x) &= 0 \\ x(0) &= x'(0) = 0 \end{aligned}$$

Cauchy-feladat megoldása a pozitív félegyenesen egyértelmű.

7. Példa. *Ha G -re nem tesszük föl a fenti következményben szereplő minimalitási feltételt, már nem csak a stabilitás, de a szóbanforgó Cauchy-feladat egyértelműsége is sérülhet. Például az*

$$\begin{aligned} x'' - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} &= 0 \\ x(0) &= x'(0) = 0 \end{aligned}$$

feladatnak tetszőleges $\alpha < 0 < \beta$ esetén megoldása az

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{27}(t - \alpha)^3 & \text{ha } t \leq \alpha \\ 0 & \text{ha } \alpha < t \leq \beta \\ \frac{2\sqrt{2}}{27}(t - \beta)^3 & \text{ha } \beta < t \end{cases}$$

függvény.

2 Liénard-egyenletek stabilitása

Legyenek $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a 0 egy környezetében értelmezett folytonosan deriválható függvények, továbbá $F(0) = G(0) = 0$. A

$$(1) \quad x'' + F'(x) \cdot x' + G'(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet *Liénard-típusú egyenletnek* nevezzük.

Például az előző szakaszban tárgyalt $x'' \pm 3x^2 \cdot x' + x = 0$ és $x'' + G'(x) = 0$ egyenlet is Liénard-típusú (tehát a matematikai pendulum egyenlete is az). Ezekkel Liénard-egyenlet $x = x' = 0$ egyensúlyának instabilitására, aszimptotikus stabilitására, sőt vonzás nélküli stabilitására is van már példánk. Sőt $F \equiv 0$ esetén az egyensúly soha nem lehet vonzó.

Az (1) egyenlet az $y := x' + F \circ x$ definícióval ekvivalens a

$$(2) \quad \begin{cases} x' &= y - F(x) \\ y' &= -G'(x) \end{cases}$$

rendszerrel, amelyet *Liénard-féle rendszernek* mondunk. (1) az $y := x'$ definícióval ekvivalens a

$$(3) \quad \begin{cases} x' &= y \\ y' &= -F'(x)y - G'(x) \end{cases}$$

rendszerrel is. $F(0) = 0$ miatt az origó pontosan akkor egyensúlyi helye akár (2)-nek, akár (3)-nak, ha $G'(0) = 0$. Ekkor az origót a (1) egyenlet egyensúlyi helyének vagy *nullállapotának* is mondjuk.

2.1 Egy elemi elégséges feltétel

8. Állítás. *Tegyük föl, hogy $G'(0) = 0$. Ha*

1. *0-ban G -nek szigorú lokális minimuma van, $F \cdot G'$ -nek pedig lokális minimuma, akkor (1)-nek az origó stabil egyensúlya;*
2. *$F'(0) > 0$, továbbá 0-ban G' negatívról pozitívrá előjelet vált, akkor (1)-nek az origó aszimptotikusan stabil egyensúlya;*
3. *G kétszer is folytonosan deriválható, továbbá $G''(0) < 0$ vagy $F'(0) < 0$, akkor (1)-nek az origó instabil egyensúlya.*

Bizonyítás. Az origó egyensúlya (1)-nek. Az 1. esetben (2)-höz

$$V(x, y) := G(x) + \frac{1}{2}y^2$$

az origóban pozitív definit Ljapunov-függvény. Ennek (2) szerinti deriváltja

$$\partial_{(2)}V(x, y) = G'(x) \cdot y - G'(x) \cdot F(x) + y \cdot (-G'(x)) = -F(x) \cdot G'(x) \leq 0,$$

tehát $\partial_{(2)}V$ az origóban negatív szemidefinit, így Ljapunov megfelelő stabilitási tétele miatt az origó stabil.

2. esetén (3)-hoz

$$W(x, y) := 4G(x) + y^2 + (y + F(x))^2$$

pozitív definit Ljapunov-függvény az origóban, amelynek gradiense

$$W'(x, y) = [4G'(x) + 2(y + F(x)) \cdot F'(x) , 4y + 2F(x)] ,$$

továbbá (3) szerinti deriváltja

$$\partial_{(3)}W(x, y) = -2G'(x) \cdot F(x) - 2F'(x) \cdot y^2 ,$$

ami $F'(0) > 0$ és G' szóbanforgó előjelváltása miatt negatív definit. Így Ljapunov megfelelő tétele miatt az origó aszimptotikusan stabil.

3. esetén (2) jobboldalának Jacobi-mátrixa az origóban

$$\begin{bmatrix} -F'(0) & 1 \\ -G''(0) & 0 \end{bmatrix} ,$$

amelynek sajátérték-egyenlete $\lambda^2 + F'(0) \cdot \lambda + G''(0) = 0$, tehát a (komplex) sajátértékek

$$\lambda_{1,2} = \frac{-F'(0) \pm \sqrt{(F'(0))^2 - 4G''(0)}}{2} .$$

Mivel $G''(0) < 0$ vagy $F'(0) < 0$, ezért legalább az egyik sajátérték pozitív valós részű. Így Ljapunov megfelelő lineáris közelítési tétele miatt az origó instabil. \square

9. Következmény. Ha

- vagy $G'(0) = 0$ és 0-ban G -nek szigorú lokális minimuma van, $F \cdot G'$ -nek pedig lokális minimuma;
- vagy G kétszer is folytonosan deriválható,

akkor az

$$\begin{aligned} x'' + F'(x) \cdot x' + G'(x) &= 0 \\ x(0) &= x'(0) = 0 \end{aligned}$$

Cauchy-feladat megoldása a pozitív félegyenesen egyértelmű.

Bizonyítás. Az első esetben az origó stabil, tehát egyértelmű megoldása is (2)-nek a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kezdeti feltétel mellett. A második esetben (2) jobb oldala folytonosan deriválható, így a Picard-Lindelöf-féle egzisztenciátétel értelmében ugyanez az egyértelműség igaz. Innen a Cauchy-feladat egyértelműsége már triviális. \square

10. Példa. (van der Pol-oszcillátor) Vizsgáljuk meg adott $\mu \in \mathbb{R}$ mellett az

$$x'' + \mu \cdot (x^2 - 1) \cdot x' + x = 0$$

ún. van der Pol-egyenlet $x = 0$, $x' = 0$ egyensúlyi állapotának stabilitását!

Megoldás. Jelen esetben $F(x) = \mu \cdot (\frac{x^3}{3} - x)$ és $G(x) = \frac{x^2}{2}$, így $F'(0) = -\mu$ és $G''(0) = 1$.

1. eset: $\mu < 0$ esetén $F'(0) > 0$ és G' negatívról pozitívrá előjelet vált, tehát a nullállapot a fenti állítás alapján aszimptotikusan stabil.

2. eset: $\mu > 0$ esetén $F'(0) < 0$, tehát a nullállapot a fenti állítás alapján instabil.

3. eset: $\mu = 0$ esetén az egyenlet harmonikus rezgő mozgásba megy át (lineáris), aminek a nullállapota közismerten stabil, de nem vonzó.

2.2 Egy élesebb elegendő feltétel

Az alábbi állításban az ω -határhalmazok invarianciáját is használjuk.

11. Állítás. *Legyen F folytonosan deriválható, G pedig kétszer folytonosan deriválható. Ha 0 -ban mind G -nek, mind pedig $F \cdot G'$ -nek szigorú lokális minimuma van, akkor (1)-nek az origó aszimptotikusan stabil egyensúlya. Ha ezenfelül 0 -ban $F \cdot G'$ -nek szigorú globális minimuma is van, akkor az origó globálisan is vonzó.*

Bizonyítás. Az előző állításban az origóban pozitív definit

$$V(x, y) := G(x) + \frac{1}{2}y^2$$

Ljapunov-függvénnyel már igazoltuk, hogy a (2) rendszernek az origó stabil egyensúlya. Már csak azt kell igazolnunk, hogy (2)-nek az origó egy alkalmas környezetéből induló megoldásai a $+\infty$ -ben tartanak az origóhoz. Legyen $\varepsilon_0 > 0$ olyan szám, hogy $0 < |x| < \varepsilon_0$ esetén $0 < F(x) \cdot G'(x)$. A már igazolt stabilitás miatt van olyan $\delta_0 > 0$ szám, hogy bármely $x^2(0) + y^2(0) \leq \delta_0^2$ tulajdonságú $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ megoldásra minden $t \geq 0$ mellett $x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon_0^2$. Namost olyan $\delta_1 > 0$ szám is létezik, hogy bármely $x^2(0) + y^2(0) \leq \delta_1^2$ tulajdonságú $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ megoldásra minden $t \geq 0$ mellett $x^2(t) + y^2(t) \leq \delta_0^2$. Egy ilyen megoldásra

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \partial_{(2)}V(x(t), y(t)) = -F(x(t)) \cdot G'(x(t)) \leq 0,$$

tehát $V(x(\cdot), y(\cdot))$ monoton fogyó. Ekkor

$$\alpha := \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t), y(t)) \geq 0$$

választással minden $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in \Omega$ esetén határátmenettel azonnal adódik, hogy $V(\xi, \eta) = \alpha$ (ahol Ω az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ megoldás ω -határhalmaza). Mivel ez invariáns halmaza a (2) rendszernek, ezért egy ilyen $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ pontból induló $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ megoldásra minden $t \geq 0$ mellett $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \in \Omega$ miatt

$$V(x_1(t), y_1(t)) = \alpha,$$

tehát $V(x_1(t), y_1(t))$ konstans. Ezért minden $t \geq 0$ -ra

$$0 = \frac{d}{dt}V(x_1(t), y_1(t)) = \partial_{(**)}V(x_1(t), y_1(t)) = -F(x_1(t)) \cdot G'(x_1(t)).$$

Ugyanakkor δ_1 választása miatt határátmenettel $\xi^2 + \eta^2 \leq \delta_0^2$, így minden $t \geq 0$ -ra $x_1^2(t) + y_1^2(t) < \varepsilon_0^2$, ezért ε_0 választása miatt $F(x_1(t)) \cdot G'(x_1(t)) = 0$ alapján $x_1(t) = 0$. Innen persze $y_1(t) = x_1'(t) = 0$ is fennáll minden $t > 0$ mellett. Tehát $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ a (2) rendszer nullállapota, speciálisan $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ezzel éppen azt mutattuk meg, hogy

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Innen pedig $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ korlátos volta miatt azonnal adódik, hogy $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a $+\infty$ -ben tart az origóhoz. Ezzel igazoltuk a (2) rendszer nullállapotának vonzó voltát is.

Hátra van még a globális vonzásra vonatkozó állítás igazolása. Ez viszont a már bizonyítottakból $\varepsilon_0 = \delta_0 = \delta_1 = +\infty$ mellett következik. \square

12. Következmény. Legyen F folytonosan deriválható, G pedig kétszer folytonosan deriválható. Ha 0-ban mind G -nek, mind pedig $F \cdot G'$ -nek szigorú lokális minimuma van, akkor (1)-nek az origó alkalmas környezetén belül nem alakulhat ki sem ciklusa, sem határciklusa. Ha ezenfelül 0-ban $F \cdot G'$ -nek szigorú globális minimuma is van, akkor (1)-nek nem létezhet semmilyen ciklusa, sem határciklusa.

13. Megjegyzés. Egy korábbi megjegyzésben szereplő $x'' + 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának aszimptotikus stabilitása a fenti állításból is következik. (De a szintén tárgyalt $x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának instabilitása a legutóbbi két állítás egyikéből sem következik.)

14. Példa. Vizsgáljuk meg tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett az

$$x'' + x^{2n} \cdot x' + x = 0$$

Liénard-egyenlet nullállapotának stabilitását!

Megoldás. Jelen esetben $F(x) = \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ és $G(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tehát G -nek és $F(x) \cdot G'(x) = \frac{1}{2n+1}x^{2n+2}$ -nek is 0-ban szigorú lokális minimuma van, így a fenti állítás értelmében az egyenlet nullállapota aszimptotikusan stabil.

A következő példa azt mutatja, hogy már Liénard-egyenletek körében is vannak olyanok, amelyek nullállapota annak ellenére aszimptotikusan stabil, hogy az origóbeli lineáris közelítés instabil.

15. Példa. Határozzuk meg az

$$x'' + x^2 \cdot x' + x^3 = 0$$

Liénard-egyenlet nullállapotának stabilitását! Próbálkozzunk először linearizálással!

Megoldás. Az egyenlet (3) alakja

$$\begin{cases} x' &= & y \\ y' &= & -x^2y - x^3 \end{cases} .$$

A jobb oldal origóbeli Jacobi-mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

amelyhez instabil lineáris rendszer tartozik. Ugyanakkor most $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ és $G(x) = \frac{1}{4}x^4$, így $F(x) \cdot G'(x) = \frac{1}{3}x^6$, tehát mind G -nek, mind pedig $F \cdot G'$ -nek 0-ban szigorú lokális minimuma van, ezért a fenti állítás miatt az egyenlet nullállapota aszimptotikusan stabil.

3 Kvázipendulumok

A fenti két állítás távolról sem fedi le az összes Liénard-egyenlet stabilitási vizsgálatát; nemcsak a már említett $x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenletre nem alkalmazhatók, de az $x'' + x \cdot x' + x = 0$ vagy $x'' + (2x - 3x^2) \cdot x' + x = 0$ Liénard-egyenletekre sem. Az alábbiakban ezekhez némileg hasonló Liénard-egyenleteket vizsgálunk. Ezekkel fizikai relevanciájukon túl fő célunk, hogy ízelítőt adjunk a legtriviálisabb eseteknél egy fokkal már összetettebb Ljapunov-függvények keresésének — bizonyos értelemben — nagyon is természetes logikájából. Előbb azonban két technikai megállapítást teszünk.

16. Megjegyzés. *Legyen p pozitív egész, k, j pedig olyan nemnegatív egészek, amelyekre $k + j > 2p$. Ekkor*

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{x^k y^j}{(x^2 + y^2)^p} = 0 .$$

Bizonyítás. $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ alapján triviális.

17. Megjegyzés. *Legyen $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a 0 egy környezetében értelmezett n -edrendben kicsi függvény, azaz*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$$

($n \in \mathbb{N}$). Ekkor tetszőleges kétváltozós, konstans tag nélküli valós p polinomra

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{r(x) \cdot p(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}} = 0 .$$

Bizonyítás. $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ alapján $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}^n} = 0$. Ugyanakkor a $k + j \geq 1$ tulajdonságú $k, j \geq 0$ egészekre $x^2 + y^2 \neq 0$ esetén

$$0 \leq \left| \frac{x^k y^j}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|^k |y|^j}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^{k+j}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ami a hiányos egységömbön korlátos. Emiatt persze

$$\frac{p(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

is korlátos a hiányos egységömbön. Innen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}^n} = 0$ alapján azonnal adódik az állítás. \square

18. Példa. Keressünk Ljapunov-függvényt az

$$(4) \quad \begin{cases} x' &= y - Ax^2 - Bx^3 \\ y' &= -x \end{cases}$$

rendszer stabilitásának vizsgálatához ($A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ adott számok)!

Megoldás. A Ljapunov-függvényt több lépésben találjuk meg. Első közelítésben a legegyszerűbb Ljapunov-függvény (az egyedül nulladrendben kicsi $y \leftrightarrow -x$ tagok kiejtésére) a normanégyzet:

$$V_0(x, y) := x^2 + y^2.$$

Ennek (4) szerinti deriváltja

$$2x \cdot (y - Ax^2 - Bx^3) - 2yx = -2Ax^3 - 2Bx^4,$$

ami már csak másodrendben kicsi tagokat tartalmaz, persze ez még nem jó nekünk. Viszont V_0 -hoz vehetünk újabb tagokat úgy, hogy (4) szerinti deriváltjaik kiejtsék a legalacsonyabbfokú x^3 -ös tagot. (Itt két lehetőség közt kell választanunk; ügyeljünk rá, hogy ne az eredeti tagokból „faragjunk le”.)

A

$$-2Ax^2y$$

új taggal ez teljesül is. Persze ehhez még újabb tagot kell hozzávennünk, hiszen ezzel a (4) szerinti deriváltba bejött az újabb harmadfokú $-4Axy^2$ tag. Ennek eliminálására viszont megfelel a $-\frac{4}{3}Ay^3$ tag, ami a (4) szerinti deriváláskor már nem hoz be újabb „kellemetlen” tagot. Legyen hát

$$V_1(x, y) := V_0(x, y) - 2Ax^2y - \frac{4}{3}Ay^3,$$

ennek (4) szerinti deriváltja tehát

$$4A^2x^3y - 2Bx^4 + 4ABx^4y,$$

ami már csak harmadrendben kicsi tagokat tartalmaz. Viszont ez sem pozitív, sem negatív definit (amelyre alkalmazható volna valamelyik Ljapunov-tétel). V_1 -hez tehát veszünk még újabb tagokat: egyet, ami a (4) szerinti deriválás során kiejti a $-2Bx^4$ tag felét, $-Bx^4$ -t (azért nem az egész, mert azal deriválásakor semmiképpen nem jutnánk definit Ljapunov-függvényhez); és egy másikat, amelyik kiejti a $4A^2x^3y$ tagot. Erre megfelel $2A^2x^2y^2 - Bx^3y$. Viszont a (4) szerinti deriválásakor ezek az újabb negyedfokú $4A^2xy^3 - 3Bx^2y^2$ részt hozza be, ami vegyes tagokból áll. Ezeket újabb tagokkal fogjuk eliminálni, nevezetesen $A^2y^4 - Bxy^3$ hozzáadásával, amely a deriválásakor — a negyedrendben kicsi és az elimináló tagokon kívül— már csak a $-Bx^4$ új tagot hozza be. Tehát legyen

$$\begin{aligned} V_2(x, y) &:= V_1(x, y) + 2A^2x^2y^2 - Bx^3y + A^2y^4 - Bxy^3 = \\ &= x^2 + y^2 - 2Ax^2y - \frac{4}{3}Ay^3 + 2A^2x^2y^2 - Bx^3y + A^2y^4 - Bxy^3. \end{aligned}$$

Mivel az első két tag kivételével V_2 legalább harmadfokú tagokból áll, így a 16. Megjegyzés értelmében

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{V_2(x, y)}{x^2 + y^2} = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + 0 = 1.$$

Ezért az origó egy alkalmas hiányos környezetében V_2 pozitív, tehát V_2 pozitív definit. Továbbá

$$V_2'(x, y) = \left[\begin{array}{c} 2x - 4Axy + 4A^2xy^2 - 3Bx^2y - By^3, \\ 2y - 2Ax^2 - 4Ay^2 + 4A^2x^2y - Bx^3 + 4A^2y^3 - 3Bxy^2 \end{array} \right]^T.$$

Így V_2 -nek (4) szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} \partial_{(4)}V_2(x, y) &= 2xy - 4Axy^2 + 4A^2xy^3 - 3Bx^2y^2 - By^4 - \\ &\quad - 2Ax^3 + 4A^2x^3y - 4A^3x^3y^2 + 3ABx^4y + ABx^2y^3 - \\ &\quad - 2Bx^4 + 4ABx^4y - 4A^2Bx^4y^2 + 3B^2x^5y + B^2x^3y^3 - \\ &\quad - 2xy + 2Ax^3 + 4Axy^2 - 4A^2x^3y + Bx^4 - 4A^2xy^3 + 3Bx^2y^2 = \\ &= -By^4 - Bx^4 - 4A^3x^3y^2 + 3ABx^4y + ABx^2y^3 + \\ &\quad + 4ABx^4y - 4A^2Bx^4y^2 + 3B^2x^5y + B^2x^3y^3. \end{aligned}$$

Tehát

$$\partial_{(4)}V_2(x, y) = -B(x^4 + y^4) + R(x, y),$$

ahol az $R(x, y)$ kétváltozós polinom ötöd- és hatodfokú tagokból áll. Így a 16. Megjegyzés alapján

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Eszerint van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ esetén

$$|R(x, y)| \leq \frac{|B|}{4}(x^2 + y^2)^2,$$

ez esetben $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ miatt $\partial_{(4)}V_2(x, y) = -B(x^4 + y^4) + R(x, y)$ előjele megegyezik $-B(x^4 + y^4)$ előjével. Nevezetesen, a $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ hiányos gömbben

- $B > 0$ esetén $\partial_{(4)}V_2(x, y)$ negatív, tehát ekkor $\partial_{(4)}V_2$ negatív definit Ljapunov-függvény;
- $B < 0$ esetén $\partial_{(4)}V_2(x, y)$ pozitív, tehát ekkor $\partial_{(4)}V_2$ pozitív definit Ljapunov-függvény.

Ez V_2 pozitív definit volta miatt azt jelenti, hogy

- $B > 0$ esetén a (4) rendszernek az origó aszimptotikusan stabil egyensúlya;
- $B < 0$ esetén pedig (4)-nek az origó instabil egyensúlya.

Mostantól legyen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a 0-ban háromszor deriválható függvény és $F(0) = 0$.

19. Definíció. Az

$$(5) \quad x'' + F'(x) \cdot x' + x = 0$$

Liénard-típusú differenciálegyenletet kvázipendulumnak nevezzük. (Ennek lineáris közelítése ugyanaz, mint a pendulumé.)

Az (5) egyenlet az $y := x' + F \circ x$ definícióval ekvivalens a

$$(6) \quad \begin{cases} x' &= y - F(x) \\ y' &= -x \end{cases}$$

rendszerrel. Ennek az origó az egyetlen egyensúlyi pontja, továbbá adott kezdeti feltételhez tartozó megoldása egyértelmű.

20. Tétel.

- Ha vagy $F'(0) > 0$, vagy $F'(0) = 0$ és $F'''(0) > 0$, akkor (5) nullállapota aszimptotikusan stabil.
- Ha vagy $F'(0) < 0$, vagy $F'(0) = 0$ és $F'''(0) < 0$, akkor (5) nullállapota instabil.

Bizonyítás. A jobb oldal deriváltja $\begin{bmatrix} -F'(x) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ami az origóban

$$\begin{bmatrix} -F'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen azonnal $F'(0) > 0$ esetén a nullállapot aszimptotikusan stabil, $F'(0) < 0$ esetén pedig instabil.

Hátra van még az $F'(0) = 0$ eset. Mivel $F(0)$ is 0, így a L'Hôpital-szabály alapján közismerten van olyan $r : \mathcal{D}_F \rightarrow \mathbb{R}$ a 0-ban harmadrendben kicsi függvény, hogy minden $x \in \mathcal{D}_F$ -re

$$F(x) = Ax^2 + Bx^3 + r(x),$$

ahol $A = \frac{1}{2}F''(0)$ és $B = \frac{1}{6}F'''(0) \neq 0$. Ezzel (6) a

$$(7) \quad \begin{cases} x' &= y - Ax^2 - Bx^3 - r(x) \\ y' &= -x \end{cases}$$

alakot ölti. Mivel a jobboldal csak az első komponensben egy harmadrendben kicsi tagban tér el a már tárgyalt (4) rendszertől, ezért kézenfekvő az ahhoz megfelelőnek bizonyult

$$V(x, y) := x^2 + y^2 - 2Ax^2y - \frac{4}{3}Ay^3 + 2A^2x^2y^2 - Bx^3y + A^2y^4 - Bxy^3$$

pozitív definit Ljapunov-függvényt tekinteni. V -nek a legutóbbi példában már kiszámolt (4) szerinti deriváltja

$$\partial_{(4)}V(x, y) = -B(x^4 + y^4) + R(x, y),$$

ahol

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy

$$\partial_{(6)}V(x, y) - \partial_{(4)}V(x, y) = \partial_1V(x, y) \cdot r(x),$$

s mivel $\partial_1V(x, y)$ konstans tagot nem tartalmazó kétváltozós polinom, továbbá r az origóban harmadrendben kicsi, ezért a 17. Megjegyzésből

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{\partial_1V(x, y) \cdot r(x)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Eszerint van olyan kétváltozós q függvény, amelyre

$$\partial_{(6)}V(x, y) = -B(x^4 + y^4) + q(x, y)$$

és

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{q(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Eszerint van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ esetén

$$|q(x, y)| \leq \frac{|B|}{4}(x^2 + y^2)^2,$$

ez esetben $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ miatt $\partial_{(6)}V(x, y) = -B(x^4 + y^4) + q(x, y)$ előjele megegyezik $-B(x^4 + y^4)$ előjével. Nevezetesen, a $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ hiányos gömbben

- $F'''(0) = 6B > 0$ esetén $\partial_{(6)}V(x, y)$ negatív, tehát ekkor $\partial_{(6)}V$ negatív definit Ljapunov-függvény;
- $F'''(0) = 6B < 0$ esetén $\partial_{(6)}V(x, y)$ pozitív, tehát ekkor $\partial_{(6)}V$ pozitív definit Ljapunov-függvény.

Ez V pozitív definit volta miatt azt jelenti, hogy

- $F'''(0) > 0$ esetén a (6) rendszer (és így az (5) egyenlet) nullállapota aszimptotikusan stabil;
- $F'''(0) < 0$ esetén a (6) rendszer (és így az (5) egyenlet) nullállapota instabil.

□

21. Következmény. *A fenti tétel értelmében a matematikai pendulumból egy az origóban háromszor deriválható F függvény gerjesztésével származtatott*

$$x'' + F'(x) \cdot x' + x = 0$$

kvázipendulum nullállapota $F'''(0) \neq 0$ esetén vagy instabil, vagy aszimptotikusan stabil. Tehát az egyensúly egy alkalmas környezetén belül soha nem alakulhat ki sem ciklus, sem határciklus. Ha ezenfelül az $x \mapsto x \cdot F(x)$ függvénynek 0-ban globális szigorú minimuma van, akkor a 12. Következmény miatt sehol nem alakulhat ki sem ciklus, sem határciklus.

22. Példa. *A fenti tétel alapján az $x'' + (2x - 3x^2) \cdot x' + x = 0$ egyenlet ($F(x) = x^2 - x^3$) nullállapota instabil. Hasonlóan adódik, hogy az $x'' + (2x + 3x^2) \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapota aszimptotikusan stabil. A korábban már tárgyalt $x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának instabilitása is következik a fenti tételből; szintúgy, mint az $x'' + 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának aszimptotikus stabilitása.*

23. Példa. *Az*

$$x'' + x \cdot x' + x = 0$$

kvázipendulumra nem alkalmazható sem a 20. Tétel, sem a 8. vagy a 11. Állítás. A stabilitást a

$$V(x, y) := 2 + (x^2 - 2y - 2) \cdot e^{-y}$$

Ljapunov-függvénnyel vizsgáljuk. (Az alábbi megjegyzésben világítjuk meg, hogyan találtunk rá erre a függvényre.) V gradiense

$$V'(x, y) = [2xe^{-y}, (2y - x^2)e^{-y}] ,$$

valamint Hesse-mátrixa

$$V''(x, y) = \begin{bmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (x^2 - 2y + 2)e^{-y} \end{bmatrix} ,$$

tehát

$$V''(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, tehát V pozitív definit Ljapunov-függvény az origóban. Ugyanakkor V -nek a

$$(8) \quad \begin{cases} x' &= y - \frac{x^2}{2} \\ y' &= -x \end{cases}$$

rendszer szerinti deriváltja

$$\partial_{(8)}V(x,y) = 2xe^{-y} \cdot (y - \frac{x^2}{2}) - (2y - x^2)e^{-y} \cdot x = 0,$$

tehát V első integrálja (8)-nak. Innen azonnal következik, hogy az $x'' + x \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapota stabil. Ugyanakkor ebből az is következik, hogy az egyenlet tetszőleges x megoldására

$$V(x(t), \frac{x^2(t)}{2} + x'(t)) = \text{konstans},$$

tehát pl. az origóhoz kellően közelről induló, $x(0) = 0$, $x'(0) \neq 0$ kezdeti feltételű megoldásra $x(t)$ és $x'(t)$ soha nem tarthat egyidejűleg az origóhoz. Tehát az egyenlet nullállapota nem vonzó.

24. Megjegyzés. A fenti példabeli Ljapunov-függvényt a 18. Példa logikájával találtuk meg. Legelőször vettük az $y \leftrightarrow -x$ tagok kiejtésére legegyszerűbb

$$V_0(x,y) := x^2 + y^2$$

Ljapunov-függvényt. Ennek (1) szerinti deriváltja $-x^3$, amit kiejthetünk a

$$-x^2y$$

új taggal. Ennek hozzávételével az (1) szerinti derivált $-2xy^2 + x^3y$ -ra módosul. Ezek eliminálására behozhatjuk az

$$-\frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2$$

tagokat. Ha ezt az eljárást folytatjuk, hamar rájövünk, hogy a módosult derivált soha nem tűnik el, és definit sem lesz soha. Viszont az eljárás folytatásával egyre kisebb rendű maradékokat kapunk, ráadásul az egyre újabb tagokban szabályosságot figyelhetünk meg. Minden lépésben kétféle tag jön be: egy „ x^2 -tel szorzott” és egy „tiszta y -os”. Ezek rendre a következők (az eredeti $x^2 + y^2$ -et is hozzájuk számítva):

$$\begin{aligned} &x^2 - x^2y + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^2y^3}{6} + \frac{x^2y^4}{24} - \frac{x^2y^5}{120} + \dots \\ &y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} - \frac{y^7}{420} + \dots \end{aligned}$$

Mivel az egyre újabb maradékok az origó körül 0-hoz tartanak, ezért végtelen összegzéssel a maradék várhatólag teljesen el fog tűnni (tehát első integrált kapunk). Az első sor összegzése triviálisan $x^2 \cdot e^{-y}$. A második soré nehezebbnek tűnik, de az általános tag könnyű:

$$\frac{(-1)^k(2k-2)}{k!} \cdot y^k$$

ezek sora az egységkör belsejében konvergens és a $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-2)}{k!} y^k$ összeg tagonként deriválható. A tagonkénti derivált (erre a jobb oldal szerinti deriváláshoz egyébként is szükségünk van) egyszerűsítés után

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2y \frac{(-y)^k}{k!} = 2y \cdot e^{-y},$$

amiből integrálással zárt alakban kapjuk meg az eredeti sorösszeget. Tehát

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-2)}{k!} y^k = \int_0^y 2u \cdot e^{-u} du = 2 - (2y+2) \cdot e^{-y}.$$

Így jutottunk a

$$V(x, y) = x^2 \cdot e^{-y} + 2 - (2y+2) \cdot e^{-y} = 2 + (x^2 - 2y - 2) \cdot e^{-y}$$

Ljapunov-függvényhez, amely leellenőrizve tényleg első integrálnak bizonyult.

25. Példa. A Liénard-egyenletek fontos speciális esetét jelentik a Lotka-Volterra-típusú

$$\begin{cases} x' &= x \cdot (\alpha - \lambda_1 y) \\ y' &= y \cdot (\lambda_2 x - \beta) \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszerek abban az értelemben, hogy az $u = \ln x - \ln \frac{\beta}{\lambda_2}$ függvény triviálisan az

$$u'' + \beta(1 - e^u) \cdot u' - \alpha\beta(1 - e^u) = 0$$

Liénard-egyenletet elégíti ki (amelynek a 0 egyensúlyi helye éppen az eredeti rendszer pozitív egyensúlyának felel meg). Erre a fenti eredményeink nem alkalmazhatók, ami összhangban áll azzal az elemi módon is kiszámítható ténnyel, hogy a Lotka-Volterra-féle rendszer nem egyensúlyi pozitív megoldásai eleve ciklikusak; viszont a fenti állítások a ciklusok és határciklusok vonatkozásában csak azok esetleges kizárására használhatók. Így a fenti eredmények alkalmazása csak bonyolultabb modellek esetén jöhet szóba. Megemlítjük, hogy az üzleti ciklusok modellezésében a Lotka-Volterra-féle speciális eset a Goodwin-féle modellnek felel meg [2].

26. Példa. A 2008-as [1] dolgozatban Faria, Cuestas és Gil-Alana az

$$e'' + g'(e) \cdot e' + f(e) = 0$$

Liénard-egyenletet vizsgálták, ahol e a vállalkozások időtől függő mennyisége. Erre Liénard 1928-as eredményét direktben alkalmazva jutottak a határciklus létezéséhez. Ezen kívül az $e'' + e' + e = a$ lineáris esetet vizsgálták, amelynek megoldásai természetesen kilengésekkel, de exponenciális gyorsasággal tartanak az egyensúlyhoz. Mindehhez még a következő speciális illetve elfajult esetet tudjuk megemlíteni:

1. ha $g'''(0) \neq 0$ és $f(e) = e$, akkor az egyensúly alkalmas környezetén belül a 21. Következmény alapján nem alakulhat ki határciklus.
2. ha $g(e) = \frac{1}{2}e^2$ és $f(e) = e$, akkor a 23. Példa miatt az egyensúly egy alkalmas környezetén belül a munkanélküliség és a vállalkozások alakulása eleve ciklikus.

4 Összefoglalás

Jelen dolgozat megírását az motiválta, hogy viszonylag sok olyan dinamikai probléma létezik, amelyek stabilitását ugyan nem lehet a linearizálás széles körben ismert módszerével jellemezni, de a nemlineáris rendszerekre vonatkozó teljes apparátusra sincs hozzájuk szükség, hanem az egyváltozós analízis hagyományosan oktatott tételein alapuló feltételekkel kezelhetők. Ezek közé tartoznak az elektromos rezgőkörök és üzleti ciklusok modellezésében is hatékonyan szerepeltetett Liénard-féle másodrendű differenciálegyenletek. Mi elsősorban nem határciklusokra, hanem az egyensúly klasszikus értelemben vett stabilitására és vonzására vonatkozó eredményeket igazoltunk, abból kiindulva, hogy ehhez a széles területet felölelő egyenlettípushoz képest túl szűk vizsgálati terület az, amely csak határciklusokat vizsgál, az egyensúlyhoz való tartást pedig nem (különös tekintettel arra, hogy még a gerjesztett ingák is ugyanezzel az egyenlettípussal modellezhetők). Az üzleti ciklusokkal fogalkozó dolgozatok (pl. [3,4,2,1] rendszerint nagyon mechanikusan hivatkozzák Liénard —valóban fajsúlyos— [5] dolgozatát, az egyenlettípus elemibb tulajdonságainak vizsgálata nélkül, márpedig az egyszerűbb vizsgálatok elmulasztása mindig magában hordozza annak veszélyét, hogy a modell spekulatív válik. A 8. és a 11. Állítás, valamint a 20. Tétel bizonyításával ezt a hiányt szerettük volna valamennyire betölteni, reményeink szerint közelebb hozva az alkalmazókat a differenciálegyenletek belső, mégis elemi tulajdonságainak vizsgálatához. A klasszikus vizsgálatokkal együtt ugyanakkor a határciklusok kizárására is adtunk feltételeket (12. és 21. Következmény).

Irodalom

1. Faria, J. R., Cuestas, J. C., And Gil-alana, L. A.: *Unemployment and entrepreneurship: a cyclical relation?* Discussion papers, Nottingham Trent University, Nottingham Business School, Economics Division No. 2008/2.
2. Goodwin, R. M.: A Growth Cycle, Feinstein, C. H. (editor): *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 54–58.

3. Káldor Miklós: A model of trade cycle, *Econ. J.* 50, 1940, pp. 78–92.
4. Kalecki, M.: A theory of business cycle, *Rev. Stud.* 4, 1937, pp. 77–97.
5. Liénard, A.: Etude des oscillations entretenues, *Revue Générale de l'Électricité* 23, 1928, pp. 901–912 and 946–954.

LOCAL ENERGY METHOD FOR LITTLE ORDER FORCED LIÉNARD EQUATIONS

The Liénard type differential equation of the form $x'' + f(x) \cdot x' + g(x) = 0$ has a central role in business cycle models by Káldor [3], Kalecki [4] and Goodwin [2], moreover in a new model describing the cyclical behavior of unemployment and entrepreneurship [1]. The same type of nonlinear equation explains the features of forced pendulums and electric circuits [5]. The related literature discusses mainly the existence of limit cycles, although the fundamental stability questions of this topic can be managed much more easily. The achieved results also outline the conditions for the existence of limit cycles. In this work, by the effective language of real valued analysis, we obtain easy-formulated results which may broaden the frames of economic and business cycle models, moreover we may gain new illustrative particular cases for e.g., [1].

BIZTOSÍTÁSI ÉS PÉNZÜGYI KOCKÁZAT EGYÜTTES HATÁSA A BIZTOSÍTÓK SZOLVENCIA-SZÁMÍTÁSÁNÁL¹

SZÜLE BORBÁLA
Budapesti Corvinus Egyetem

A Szolvencia II néven említett új irányelv elfogadása az Európai Unióban új helyzetet teremt a biztosítók tőkeszükséglet-számításánál. A tanulmány a biztosítók működését modellezve azt elemzi, hogyan hatnak a biztosítók állományának egyes jellemzői a tőkeszükséglet értékére egy olyan elméleti modellben, amelyben a tőkeszükséglet-értékek a Szolvencia II szabályok alapján számolhatók. A modellben biztosítási illetve pénzügyi kockázati „modul” figyelembevételére kerül sor külön-külön számolással, illetve a két kockázatfajta közös modellben való együttes figyelembevételével (a Szolvencia II eredményekkel való összehasonlításhoz). Az elméleti eredmények alapján megállapítható, hogy a tőkeszükségletre vonatkozóan számolható értékek eltérhetnek e két esetben. Az eredmények alapján lehetőség van az eltérések hátterében álló tényezők tanulmányozására is.

1 Bevezetés

Európában a biztosítók tevékenységére vonatkozóan 2009-ben fogadták el a röviden Szolvencia II (Solvency II) elnevezésű irányelvet², amely több más témán kívül a biztosítók szolvenciájával kapcsolatos számításokkal is foglalkozik. A Szolvencia II szabályok szerint a biztosítóknak legalább annyi saját tőkét kell tartaniuk, hogy az (a vállalkozás folytatásának elvét figyelembevéve) egy éves időtartamot tekintve fedezze a nem várt veszteségeket (ez az érték a biztosító alap saját tőkéje esetében 99,5%-os megbízhatósági szinten számított kockázatotott értéknek (Value-at-Risk, VaR) felel meg³:

„It shall correspond to the Value-at-Risk of the basic own funds of an insurance or reinsurance undertaking subject to a confidence level of 99,5% over a one-year period.”

A szolvencia tőkekövetelmény (Solvency Capital Requirement) számítása során a nem-életbiztosítási (non-life underwriting risk), életbiztosítási (life underwriting risk), egészségbiztosítási (health underwriting risk), piaci (market risk), működési (operational risk) és a hitelkockázatot (credit risk)⁴ kell

¹Beérkezett: 2010. augusztus 9. E-mail: borbala.szule@uni-corvinus.hu.

²Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)

³Directive 2009/138/EC, Article 101

⁴Directive 2009/138/EC, Article 101

figyelembe venni úgy, hogy a működési kockázaton kívül a többi kockázat esetében számolt tőkeszükségleteket egy megfelelő képlet alapján összegzik (Basic Solvency Capital Requirement) majd ehhez hozzáadják a működési kockázatra vonatkozóan számított tőkeszükséglet-értéket illetve még további korrekciók elvégzésére kerül sor. A működési kockázaton kívüli kockázatok alapján számított tőkeszükséglet (Basic Solvency Capital Requirement) képlete az irányelv alapján⁵:

$$\sqrt{\sum_{i,j} \text{Corr}_{i,j} \times \text{SCR}_i \times \text{SCR}_j}, \quad (1)$$

ahol az SCR értékek a különböző kockázati modulok esetében számított tőkeszükségleteket jelölik⁶, a Corr értékek pedig egy meghatározott korrelációs mátrix elemeit jelentik, ha például a kockázati modulok közül az életbiztosítási kockázatos és a piaci kockázatos kockázati modult tekintjük, a megfelelő korrelációs érték a Szolvencia II alapján 0,25 (e korrelációs mátrixot a *Függelék* mutatja). Az irányelv szövegében szereplő korrelációs értékek kalibrálása a biztosítók tőkeszükségletének meghatározása szempontjából fontos kérdés és e témával kapcsolatban is számos elemzés készült.⁷ A biztosítók egyébként az irányelv alapján a tőkeszükséglet kiszámítására részben vagy teljesen belső modellt is használhatnak majd.⁸

A képletből is látható tehát, hogy a Szolvencia II szabályok alkalmazásakor a különböző kockázatoknál külön-külön számított tőkekövetelményeknek a kockázatok közötti korrelációkon alapuló összesítéséről van szó. E számolási megközelítés eredménye eltérhet attól, mint ha az összesített tőkeszükségletet a kockázat-fajták közös modelljében lehetne számolni. A gyakorlatban természetesen a különböző kockázat-fajták összetettsége következtében nagyon bonyolult feladatot jelentene egy ilyesfajta közös modell felépítése (és az alkalmazandó paraméterek számítása), de elméleti modell keretében összevethetők a tőkeszükségletre vonatkozó kétféle számolási módszer eredményei. Jelen tanulmány fő célja ezen eredmények összehasonlítása. A következőkben egy olyan elméleti modell keretein belül tanulmányozzuk a külön számított tőkeszükségleteket korrelációk alapján aggregáló Szolvencia II megközelítés és a kockázatok közös modellben elemző megközelítés eredményeinek különbségeit, ami a biztosítók leginkább lényegesnek tekinthető jellemzőivel rendelkezik. A bemutatott elméleti modellben alkalmazott feltevések lehetővé teszik a kétféle megközelítésnél a tőkeszükségletek és a paraméterek között függvénykapcsolat felírását is, így jelen modellben értékelhető a biztosítók állományát jellemző néhány fontos tulajdonság (például az állomány nagyság) tőkeszükséglet-értékre gyakorolt hatása is.

⁵Directive 2009/138/EC, Annex IV

⁶A kockázati modulok: nem-életbiztosítási (non-life underwriting), életbiztosítási (life underwriting), egészségbiztosítási (health underwriting), piaci (market), csőd (counterparty default), a Directive 2009/138/EC, Annex IV szerint.

⁷CRO Forum[2009]

⁸Directive 2009/138/EC, Article 112

2 A biztosító kockázati modellje

A Szolvencia II szabályok szerint a tőkeszükséglet-számításban fontos szerepe van a különböző kockázatok közötti korrelációknak. A matematika egyik ismert eredménye, hogy a lineáris korrelációs együttható értéke (többdimenziós) normális eloszlás esetében alkalmas a függetlenség megállapítására is: amennyiben például két (együttesen kétdimenziós normális eloszlással rendelkező) valószínűségi változó esetében a korrelációs együttható értéke nulla, akkor a két valószínűségi változó függetlenségére lehet következtetni. A gyakorlatban a biztosítók tőkeszükséglet-számításainál nem tekinthetők általánosnak az olyan helyzetek, amelyeknél a tőkeszükségletet befolyásoló valószínűségi változók együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlás lenne, ehelyett a tőkeszükséglet-számításokban inkább egyes, a normális eloszlástól különböző (például nem szimmetrikus) eloszlások figyelembevétele indokolt. Ezzel együtt érdemes lehet jól áttekinthető (többdimenziós) normális eloszlás feltételezésével felépített keretben is elemezni a Szolvencia II szabályok alapján meghatározható tőkeszükséglet mértékét, mivel ez kiindulópontként (illetve összehasonlítási alapként) szolgálhat további, másfajta eloszlásokat alkalmazó elemzésekhez. A többdimenziós normalitás feltevését alkalmazó megközelítés előnye lehet továbbá, hogy ilyen esetben több eredményt képletek alkalmazásával is le lehet vezetni és az elemzés nem szorul összetettebb, szimulációs számítások elvégzésére.

A biztosítók (különösen az életbiztosítók) működését nagymértékben befolyásoló két kockázati fajta a biztosítási kockázat és a pénzügyi (piaci, illetve befektetési) kockázat. A modellben a Szolvencia II szabályozásban említett VaR számítás gondolatmenetéhez igazodóan meghatározható az e két kockázat-fajtahoz rendelhető tőkeszükséglet külön-külön és abban az esetben is, amikor a két kockázat-fajta közös modellben egyidejűleg vesszük figyelembe a számítások során (a többdimenziós normális eloszlás feltevésének alkalmazásával). Ez utóbbi tőkeszükséglet-érték összevethető azzal az értékkel, amely a Szolvencia II képlet alapján a külön-külön számított tőkeszükséglet értékek alapján számolható az alap tőkeszükséglet-értékként (Basic Solvency Capital Requirement).

A tőkeszükséglet számításánál a Szolvencia II szabályoknál a VaR fogalma jelenik meg. CEA[2006] a szolvencia-szabályozással kapcsolatban a VaR fogalmát úgy definiálja, hogy ha a VaR-nak megfelelő tőke tartására kerül sor, akkor a VaR számításánál alkalmazott megbízhatósági szintnek megfelelő a szolvencia valószínűsége olyan értelemben, hogy az eszközök értéke legalább annyi, mint a kötelezettségek (regulatory liabilities) értéke, illetve az inszolvencia valószínűsége egy mínusz az adott megbízhatósági szint. A VaR definíciója *McNeil et al.* [2005] (37-38. o.) alapján pontosabban is megfogalmazható. Tekintsük kockázatos eszközök valamely portfólióját adott Δ rögzített időtartam alatt, valamilyen $\alpha \in (0, 1)$ megbízhatósági szintet és jelölje a megfelelő veszteségeloszlás eloszlásfüggvényét:

$$F_L(l) = P(L \leq l), \quad (2)$$

A portfólió VaR értéke α megbízhatósági szinten az a legkisebb l érték, amely-nél az a valószínűség, hogy az L veszteség meghaladja l -t nem nagyobb, mint $(1 - \alpha)$:

$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{l \in R : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in R : F_L(l) \geq \alpha\}. \quad (3)$$

A VaR értékeket már több évvel ezelőtt is gyakran alkalmazták például bankoknál bizonyos kockázatok mérésénél. A Szolvencia II szabályozáshoz hasonló szabályok esetében a Bázeli Bizottság bankok esetében a piaci kockázattal kapcsolatban a VaR alkalmazásánál 99%-os szintet, az időhorizont (Δ) értékére pedig 10 napot javasolt (*McNeil et al.* [2005], 43. o.), ez különbség a biztosítókra vonatkozóan a Szolvencia II szabályozásban említett 99,5%-os megbízhatósági szinttel, illetve 1 éves tartammal szemben.

A következőkben a tanulmányban egy olyan elméleti modell bemutatására kerül sor, amelynél a kockázat (illetve tőkeszükséglet) mérése a VaR gondolatmenetére épül: *CEA* [2006] definíciója alapján a tőkeszükséglet értéke a modellben a különböző kockázatok figyelembevétele esetén annyi, hogy a tőkeszükséglet esetén a szolvencia valószínűsége az egy éves időtartam végén egy adott megbízhatósági szintnek felel meg olyan értelemben, hogy az eszközök értéke legalább annyi, mint a kötelezettségek értéke (illetve az inszolvencia valószínűsége egy mínusz az adott megbízhatósági szint). A modellszámítások és a VaR számítás hasonlóságát a *Függelék* szemlélteti.

Tekintsük a következőkben a biztosító működésének következő modelljét: a biztosító biztosítási szerződések alapján biztosítási kockázatot vállal, a megállapított díjak alapján számított díjtartalékot, illetve a rendelkezésre álló saját forrásait (tőkét) pénzügyi eszközökbe fekteti (a befektetéshez pénzügyi kockázat kapcsolódhat), az egy éves időtáv végén pedig az eszközök értéke alapján lehetséges a biztosítási kötelezettségek kifizetése. A biztosító mérlegének egyszerűsített sémájában tehát egy időszak múlva:

$$E = ST + K, \quad (4)$$

ahol:

E : eszközök összesen

ST : saját tőke értéke

K : kötelezettségek értéke

A modell nem foglalkozik egyéb mérlegtételekkel, például ingatlanokkal, időbeli elhatárolásokkal⁹.

A feltevések szerint 1 év múlva a biztosító eszközeinek értéke:

$$n \frac{B \cdot p}{1+i} (1+s)(1+r), \quad (5)$$

ahol:

n : a biztosítási szerződések száma, vagyis a biztosító állományának nagysága

⁹A magyarországi biztosítók mérlegén belül az eszközök, a kötelezettségek és a tőkehelyzet egyes aktuális jellemzőivel például PSZÁF[2010] foglalkozik.

B : a biztosítási összeg, amely a biztosítási szerződés alapján a szerződésben meghatározott személynek a biztosítási esemény bekövetkezése esetén fizetendő

p : a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége

i : technikai kamat

s : a „szolvencia-szorzó”, amely megmutatja, hogy a kezdeti díjtartalék mekkora része a saját tőke értéke

r : befektetési hozam (illetve a befektetési hozam várható értéke).

A feltevések szerint a biztosító állománya homogén, vagyis a biztosítási szerződések fontosabb tulajdonságai megegyeznek: ugyanolyan valószínűséggel következik be a biztosítási esemény, és a biztosítási esemény bekövetkezésekor a biztosító által fizetendő összeg (a biztosítási összeg) is megegyezik (valamint azonos a számítások során alkalmazott technikai kamat is). A feltevések alapján a biztosító ügyfelei egyszeri díjat fizetnek, a költségek azonnal esedékesek (ezeket a befolyó díjból kifizetik) és a biztosító díjtartaléka az egyszeri nettó díjak összegével egyezik meg. Az egyszeri nettó díjak számítása egy biztosítási szerződés esetén a következő képlet alapján történik:

$$\frac{Bp}{1+i}, \quad (6)$$

vagyis az egyszeri nettó díj a kötelezettségek várható jelenértéke (a diszkontálásnál a technikai kamatot alkalmazva). A biztosítási díj ezen definíciója inkább az életbiztosításoknál jellemző, azzal együtt, hogy a nem-életbiztosításoknál is hasonlóak a biztosítási díjszámítás kezdő lépései, illetve, hogy természetesen a gyakorlatban az életbiztosításoknál is jóval bonyolultabban történik a díjak számítása.

A biztosítási szerződések esetében a feltevések szerint p valószínűség rendelhető a biztosítási esemény bekövetkezéséhez, így az i -edik biztosítási szerződés esetében definiálható ξ_i (karakterisztikus) valószínűségi változó ($i = 1, \dots, n$) a következőképpen:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{a biztosítási esemény bekövetkezésekor} \\ 0, & \text{ha a biztosítási esemény nem következik be.} \end{cases}$$

A biztosító állományában bekövetkező összes biztosítási események számát jelentő ξ valószínűségi változó a ξ_i (karakterisztikus, független) valószínűségi változók összegeként írható fel, tehát binomiális eloszlású:

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n. \quad (7)$$

A binomiális eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlása esetében a várható érték $E(\xi) = np$, a variancia pedig $\text{Var}(\xi) = np(1-p)$. Megfelelően nagy n esetén (ez már $n = 1000$ esetében is teljesülhet) a binomiális eloszlás a normális eloszlással közelíthető. A modellben a biztosítási szerződések száma jóval több mint 1000 (mivel a gyakorlatban is általában ennél nagyobb egy biztosító állománya), így a biztosítási események számát mutató ξ valószínűségi változót a továbbiakban normális eloszlással közelíthetőnek

tekintjük. Ebből adódik, hogy a modellben a biztosító tényleges kötelezettségének egy év múlva az értéke ($B\xi$) szintén normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető.

Definiáljuk a modellben az inszolvenca esetét úgy, hogy az eszközök értéke nem éri el a kötelezettségek értékét egy év múlva. Az „inszolvenca” esetét a jelenlegi modellfeltevések alapján nevezhetnénk „fizetési képtelenségnek” is, mivel azonban a szakirodalomban a „fizetési képtelenség” és a „likviditás” fogalmat is szokás hasonlóan tekinteni, ezért a továbbiakban a modellben a „szolvenca” kifejezést alkalmazzuk, mivel a modell következtetései a „szolvenca” fogalmához kapcsolódnak elsősorban (és nem a „likviditás” fogalmához). Tekintsük a következőkben azt az esetet, amikor a szolvenca valószínűsége valamilyen adott α érték:

$$P(E \geq K) = \alpha . \quad (8)$$

A modellben a következőkben ezt a valószínűséget tanulmányozzuk abban az esetben, amikor külön-külön csak biztosítási, illetve pénzügyi kockázat van (a Szolvenca II szabályban szereplő képlet alkalmazásához), illetve olyan esetben is, amikor közös modellben egyidejűleg mindkét kockázat-fajtaval foglalkozunk (a Szolvenca II szabályban szereplő képlet alkalmazásával számolt eredménnyel való összehasonlításához). A szolvenca valószínűségére adott képlet alapján a modellben a különböző esetekben meghatározhatók a (kezdő időpontra vonatkozó) tőkeszükséglet-értékek, illetve a tőkeszükséglet értékének a kezdő időpontban számítható díjtartalékhoz viszonyított értéke (az s szolvenca-szorzó). A tőkeszükséglet-értékek különböző jellemzőkkel rendelkező biztosítási állományoknál különbözhetnek, azonban az s szorzó értékek különböző esetekben is összehasonlíthatók. A tanulmányban is az s szorzó értékei alapján kerül sor a különböző megközelítés alkalmazásával számítható összes tőkeszükséglet-értékek összehasonlítására.

3 A szolvenca modellezése

A szolvenca elemezhető a biztosítási és a pénzügyi kockázatra külön-külön (ami a Szolvenca II képletnél alkalmazható eredményekhez vezet), valamint a modellben szereplő két kockázat-fajta közös modellben szerepeltetésével is. A következőkben ezeket a szolvenciával kapcsolatos eredményeket tekintjük át.

3.1 Szolvenca biztosítási kockázatnál

Az előzőekben bemutatott jelölések alkalmazásával felírható a szolvenca valószínűségét jelentő (8) képlet abban az esetben, amikor a biztosító működésében mindössze biztosítási kockázat van jelen, pénzügyi kockázat nincs (ez azt jelenti, hogy a befektetési hozamot adottnak tekintjük). A szolvenca valószínűsége ebben az esetben tehát:

$$P\left(B\xi \leq n \frac{Bp}{1+i} (1+s)(1+r)\right) = \alpha . \quad (9)$$

Felhasználva hogy ξ valószínűségi változó normális eloszlásúnak tekinthető és alkalmazva a ξ valószínűségi változó esetében felírt várható érték és variancia értékeket, a (9) képlet felírható más formában is:

$$\Phi \left(\frac{\sqrt{np} \left(\frac{(1+s)(1+r)}{1+i} - 1 \right)}{\sqrt{1-p}} \right) = \alpha, \quad (10)$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

A következőkben azt elemezzük, hogy különböző paraméterek hogyan befolyásolják az adott α valószínűséghez szükséges szolvencia-tőke értékét. Ezzel a kérdéssel a modellbeli szolvencia-szorzó (s) alapján foglalkozunk. A modellben a szolvencia-szorzó (s) értéke azt mutatja meg, hogy az egyszeri nettó díjak összegeként számított díjtartalékhoz képest mekkora összeget szükséges szolvencia-tőkeként tartani a biztosítónak adott fajta kockázatok ellensúlyozásául.

A modellben egyelőre a biztosítási kockázattal foglalkozunk, ami azzal függ össze, hogy nem lehet egy évre előre biztosan megállapítani, hogy mennyi lesz a bekövetkező biztosítási események száma (ez az érték valószínűségi változó, értékét ξ jelöli). Az előző képletet átalakítva felírható a biztosítási kockázat figyelembevétele esetén egy „szolvencia-függvény” ($f_B(s)$), amelynek nulla értéke esetén meghatározható az α valószínűséghez szükséges szolvencia-szorzó:

$$f_B(s) = s + 1 - \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} + 1 \right) \frac{1+i}{1+r} = 0. \quad (11)$$

Adott paraméterek esetén az α valószínűséghez tartozó szolvencia-szorzó tehát a fenti egyenlet megoldásaként számolható ki:

$$s^* = \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} + 1 \right) \frac{1+i}{1+r} - 1. \quad (12)$$

Megállapítható, hogy a szolvencia-szorzó értéke a következőképpen függ a képletben szereplő paraméterektől (minden egyéb tényező hatását változatlanul feltételezve):

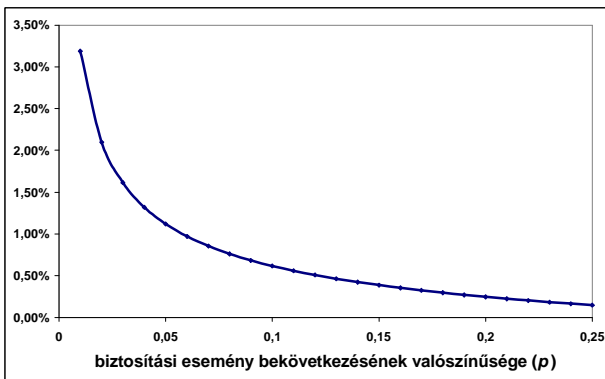
- A szolvencia-szorzó értéke nagyobb magasabb technikai kamat esetében (ez természetesnek is tekinthető, hiszen az életbiztosításoknál például a technikai kamatot garantált hozamként is szokás értelmezni).
- A szolvencia-szorzó értéke a befektetési hozam emelkedésével csökken (figyelembe véve, hogy kizárólag a biztosítási kockázatot elemezve fixnek tekintjük a befektetési hozamot).
- Nagyobb α valószínűséghez magasabb szolvencia-szorzó tartozik (a szolvencia magasabb valószínűségéhez nyilvánvalóan több szolvencia-tőke szükséges minden egyéb tényező változatlanóságát feltételezve).

- A szolvencia-szorzó értéke alacsonyabb, ha magasabb a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége (ezt a megállapítást a következőkben bizonyítjuk).
- Nagyobb biztosítási állomány esetében kisebb a szolvencia-szorzó értéke (ez a biztosítások valószínűségi számításai alapjaival van összefüggésben: nagyobb állománynál például jobb becslést adhat a ténylegesen bekövetkező biztosítási események számára vonatkozóan a várható érték a nagy számok törvénye alapján).

Tekintsük a következőkben azt a megállapítást, amely alapján a szolvencia-szorzó magasabb értéke tartozik a biztosítási esemény bekövetkezésének kisebb valószínűségéhez. Tekintsük $\frac{\partial s^*(p)}{\partial p}$ értéket:

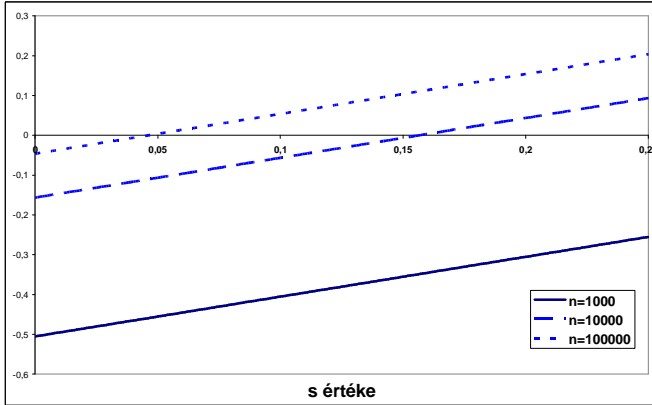
$$\frac{\partial s^*(p)}{\partial p} = \frac{1+i}{1+r} \Phi^{-1}(\alpha) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{np}{1-p}} \left(\frac{-1}{np^2} \right) < 0, \quad (13)$$

mivel a gyakorlati alkalmazásokban reálisan $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$. Ez az eredmény tehát azt jelenti, hogy minden egyéb tényező változatlansága esetén a díjtartalékhoz viszonyítva magasabb lesz az α megbízhatósági szint eléréséhez szükséges tőke értéke, ha a biztosító állományában a biztosítási esemény bekövetkezésének valószínűsége kisebb. Ezt az összefüggést szemlélteti az 1. ábra.



1. ábra. Szolvencia-szorzó és p összefüggése. Forrás: saját számítások.

Az eredmények alapján az is megállapítható, hogy nagyobb biztosítási állomány esetén a kezdő díjtartalékhoz viszonyítva kisebb tőke szükséges adott megbízhatósági szint eléréséhez. A különböző nagyságú biztosítási állományok esetében felírható, (11) képletnek megfelelő „szolvencia-függvények” alapján az állomány nagyságának szolvencia-szorzóra gyakorolt hatását a 2. ábra szemlélteti (a 2. ábra különböző állomány nagyságnál szolvencia-függvényeket mutat):



2. ábra. Állománynagyság és szolvencia-szorzó. Forrás: saját számítások.

A 2. ábrán a tengelymetszet jelöli azt a helyzetet, amikor a szolvencia valószínűsége éppen α értékkel egyezik meg, a tengelymetszettől jobbra elhelyezkedő s értékek ennél magasabb szolvencia-valószínűséghez, a tengelymetszetenél kisebb s értékek pedig α értéknél kisebb szolvencia-valószínűséghez tartoznak (adott, a (11) képletnek megfelelő szolvencia-függvényénél). Adott optimális szolvencia szorzót jelentő s^* érték alapján a különállóan csak a biztosítási kockázat esetén számított tőkeszükséglet értéke tehát:

$$\frac{nBp}{1+i} \cdot s^* . \quad (14)$$

3.2 Szolvencia pénzügyi kockázatnál

A következőkben a pénzügyi kockázat szolvencia-igényre gyakorolt hatásával foglalkozunk (a szolvencia-valószínűség adott szintjét feltételezve). Az elemzés kizárólag a pénzügyi kockázatra koncentrál, így a biztosítási kockázattal ebben a részben nem foglalkozunk (a bekövetkező biztosítási események száma megegyezik a várható értékkel). Ebben a részben a szolvencia-valószínűséget befolyásoló valószínűségi változó a pénzügyi kockázatot reprezentáló befektetési hozam. A feltevések szerint a befektetési hozam normális eloszlású valószínűségi változó, melyet η jelöl (a várható értéket μ , a szórásat pedig σ jelöli). A gyakorlatban a befektetési hozamok esetében gyakran érdemes a normális eloszlás helyett más eloszlás (például t -eloszlás) feltevését alkalmazni, a normális eloszlás feltevésének oka itt elsősorban az, hogy a tanulmányban az előzőekben leírtaknak megfelelően a kockázat-fajták esetében a többdimenziós normalitást feltételezzük. A befektetési hozam esetében a magasabb befektetési kockázatot a szórás nagyobb értéke jelzi.

A befektetési hozamoknál tehát normális eloszlást feltételezve felírható a szolvencia valószínűsége a (8) képlet szerint:

$$P\left(Bnp \leq \frac{nBp}{1+i}(1+s)(1+\eta)\right) = \alpha . \quad (15)$$

Alkalmazva az η eloszlására vonatkozó feltevéseket, a (15) képlet átalakítható:

$$1 - \Phi\left(\frac{\frac{1+i}{1+s} - 1 - \mu}{\sigma}\right) = \alpha. \quad (16)$$

A pénzügyi kockázat elemzésénél is felírható a (16) egyenlet átrendezésével az a „szolvencia-függvény” ($f_P(s)$), amelynek értékét nullára állítva kiszámolható az a szolvencia-szorzó (s), amely esetén a szolvencia valószínűsége éppen α értékkel egyezik meg:

$$f_P(s) = s + 1 - \frac{1 + i}{(1 + \mu) + \sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha)} = 0. \quad (17)$$

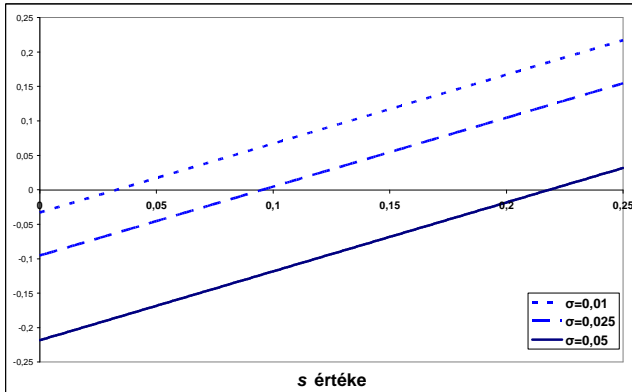
A (17) egyenletet megoldva az a szolvencia-szorzó tehát, amelynek értéke esetében a szolvencia valószínűsége α :

$$s^{**} = \frac{1 + i}{1 + \mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha)} - 1. \quad (18)$$

A szolvencia-szorzó értékét (kizárólag a pénzügyi kockázatot elemezve) tehát az egyes paraméterek a következőképpen befolyásolják (minden egyéb tényező hatását változatlanak feltételezve):

- A magasabb technikai kamatnál nagyobb a szolvencia-szorzó értéke (a biztosítási kockázatnál kapott eredményhez hasonlóan).
- Nagyobb α valószínűségnél magasabb a szolvencia-szorzó értéke (mivel nagyobb szolvencia-tőke szükséges magasabb szolvencia-valószínűség eléréséhez).
- Ha a befektetési hozam várható értéke magasabb, kisebb szolvencia-szorzó is elegendő ugyanakkora szolvencia-valószínűség eléréséhez.
- Minden egyéb tényezőt változatlanak feltételezve nagyobb befektetési kockázat (nagyobb szórás a befektetési hozamnál) nagyobb szolvencia-szorzót tesz szükségessé adott nagyságú szolvencia-valószínűség eléréséhez.

Különböző befektetési kockázatoknál (azonos várható hozam esetén különböző szórású befektetési hozamot tekintve) a (17) alapján definiált „szolvencia-függvényeket” a 3. ábra szemlélteti (a nagyobb befektetési kockázatnál magasabb az adott megbízhatósági szinthez tartozó szolvencia-szorzó értéke is, a 3. ábra különböző befektetési kockázatokhoz tartozó szolvencia-függvényeket mutat):



3. ábra. Befektetési kockázat és a szolvencia-szorító. Forrás: saját számítások.

Adott optimális szolvencia szorzót jelentő s^{**} érték alapján a különállóan csak a pénzügyi kockázat esetén számított tőkeszükséglet értéke tehát:

$$\frac{nBp}{1+i} \cdot s^{**}. \quad (19)$$

3.3 Szolvencia a biztosítási és a pénzügyi kockázat közös modelljében

Amennyiben a biztosítási és a pénzügyi kockázat együttes hatásának szolvencia-tőkére gyakorolt hatása kerül szóba, szükséges a biztosítási és pénzügyi kockázatot reprezentáló valószínűségi változók kapcsolatával is foglalkozni. Két valószínűségi változó kapcsolatát igen sokféleképpen lehet meghatározni, ezek közül a következőkben egy viszonylag egyszerű esettel foglalkozunk, mivel a fontosabb eredmények már egyszerűbb modellfeltevéseknél is megmutatkoznak. A két (az előzőekben normális eloszlásúnak feltételezett) valószínűségi változó kapcsolatáról azt feltételezzük a továbbiakban, hogy együttes eloszlásuk kétdimenziós normális eloszlás és a kovariancia a két valószínűségi változó esetében nulla. Ez utóbbi feltevés egyébként ezen egyszerű feltevéseket alkalmazó modellben realisztikusnak is tekinthető: ha például a biztosítást életbiztosításnak tekintjük, akkor a biztosítási események számát befolyásoló halandóság és a befektetési hozam között nem feltétlenül szükséges kapcsolatot feltételezni. A nulla kovariancia, azaz nulla korrelációs együttműködés¹⁰ feltevése esetén a lehetőségekhez képest viszonylag egyszerűek maradnak a képletek, amelyek azonban —ahogyan azt a további eredmények mutatják— még így is érdekes következtetésekhez vezetnek.

Tekintsük tehát a szolvencia valószínűségét abban az esetben, amikor a biztosítási események számát és a befektetési hozamot is az előzőekben

¹⁰A Szolvencia II szabályok szerint (az elméleti keretnél jóval összetettebb gyakorlati helyzetekben, amikor például az életbiztosítási kockázati modulnál is több almodul van) a piaci kockázati modul és az életbiztosítási vagy a nem-életbiztosítási kockázati modul között 0,25 a számítások során alkalmazandó korreláció értéke.

definiált feltevéseknek megfelelő valószínűségi változónak tekintjük:

$$P\left(B\xi \leq \frac{nBp}{1+i}(1+s)(1+\eta)\right) = \alpha. \quad (20)$$

A (20) képletet átalakítva:

$$P\left(B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta \leq \frac{nBp}{1+i}(1+s)\right) = \alpha. \quad (21)$$

Alkalmazva a biztosítási és pénzügyi kockázatot reprezentáló valószínűségi változók közötti kapcsolatra vonatkozó feltevést, meghatározható

$$B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta$$

(normális eloszlású) valószínűségi változó várható értéke és varianciája. A várható érték az előzőek alapján:

$$E\left(B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta\right) = Bnp - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\mu. \quad (22)$$

A variancia értéke ebben az esetben:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(B\xi - \frac{nBp}{1+i}(1+s)\eta\right) = \\ B^2np(1-p) + \left(\frac{nBp}{1+i}\right)^2(1+s)^2\sigma^2. \end{aligned} \quad (23)$$

A (22) és (23) képletek alkalmazásával tehát a szolvencia valószínűsége a biztosítási és a pénzügyi kockázat közös modelljében:

$$\Phi\left(\frac{\frac{nBp}{1+i}(1+s) - Bnp + \frac{nBp}{1+i}(1+s)\mu}{\sqrt{B^2np(1-p) + \left(\frac{nBp}{1+i}\right)^2(1+s)^2\sigma^2}}\right) = \alpha. \quad (24)$$

A különállóan csak a biztosítási illetve pénzügyi kockázattal foglalkozó elemzésekhez hasonlóan ebben az esetben is meghatározható egy olyan „szolvencia-függvény” ($f_{BP}(s)$), amelynek értékét nullára állítva kiszámolható az a szolvencia-szorzó (s), amely esetén a szolvencia valószínűsége éppen α értékkel egyezik meg. Ez a „szolvencia-függvény” azonban a szolvencia-szorzó függvényében nem lineáris:

$$(1+s)^2\left[\left(\frac{1+\mu}{1+i}\right)^2 - \frac{(\Phi^{-1}(\alpha))^2\sigma^2}{(1+i)^2}\right] - 2(1+s)\frac{1+\mu}{1+i} + 1 - (\Phi^{-1}(\alpha))^2\frac{1-p}{np} = 0. \quad (25)$$

Ennek az egyenletnek „realisztikusnak” tekinthető paraméterek, vagyis például a gyakorlatban tapasztalhatóan magas n (állomány nagyság) esetén van

megoldása. A megoldással kapcsolatban a másodfokú egyenlet megoldóképletét tanulmányozva érdekes eredményre lehet jutni. A szolvencia-szorzó értékének meghatározásához megoldandó (25) egyenletnek van megoldása, ha (26) összefüggés teljesül:

$$\left(\frac{1+\mu}{\sigma}\right)^2 + n\frac{p}{1-p} \geq (\Phi^{-1}(\alpha))^2. \quad (26)$$

Az eredmények érdekessége azzal függ össze, hogy a modellben a biztosítási, illetve pénzügyi kockázatot reprezentáló valószínűségi változók várható értéke és varianciája szerepel a (26) feltétel képletében a megbízhatósági szintet jelentő α értékkel összekapcsolva:

$$n\frac{p}{1-p} = \frac{(E(\xi))^2}{\text{Var}(\eta)}, \quad (27)$$

$$\left(\frac{1+\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{(1+E(\eta))^2}{\text{Var}(\eta)}, \quad (28)$$

A (26) képletben alkalmazva a (27) és a (28) összefüggést a megoldhatóság feltétele a biztosítási és a pénzügyi kockázat közös modelljében (a szolvencia-szorzó számításával kapcsolatban):

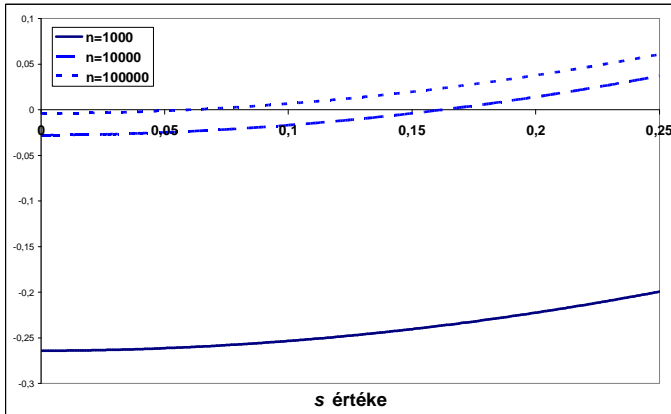
$$\frac{(1+E(\eta))^2}{\text{Var}(\eta)} + \frac{(E(\xi))^2}{\text{Var}(\xi)} \geq (\Phi^{-1}(\alpha))^2. \quad (29)$$

A kétféle kockázat közös modelljében a tőkeszükséglet-számításnál alkalmazható szolvencia-szorzó (s^{***}) értéke (25) összefüggés megoldásaként:¹¹

$$\frac{\frac{1+\mu}{1+i} \pm \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{1+i}\right)^2 \frac{1-p}{np} + \left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2 \frac{1-p}{np} (\Phi^{-1}(\alpha))^2}}{\left(\frac{1+\mu}{1+i}\right)^2 - (\Phi^{-1}(\alpha))^2 \left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2} - 1. \quad (30)$$

A szolvencia-szorzó értékét ebben az esetben is befolyásolják az előző két esetben bemutatott paraméterek. Az állomány nagyságának az adott megbízhatósági szinthez tartozó szolvencia-szorzó értékére gyakorolt hatását például a 4. ábra szemlélteti (a 4. ábrán különböző állomány-nagyságok esetén a (25) képlettel leírható $f_{BP}(s)$ szolvencia-függvények értékei találhatók):

¹¹A gyakorlat szempontjából „realisztikusnak” tekinthető paraméter-beállításoknál a két megoldás közül általában csak az egyik nemnegatív (a negatív szolvencia-szorzónak nem lenne közgazdasági értelme). A továbbiakban az elemzésben a két elméletileg lehetséges megoldás közül a nem negatív értékkel foglalkozunk (a Szolvencia II szabályok szerinti eredménnyel való összehasonlításokor).



4. ábra. Az állomány nagysága és a szolvencia-szorzó. Forrás: saját számítások.

Nagyobb állományméret tehát ebben az esetben is alacsonyabb szolvencia-szorzó értéket eredményez minden egyéb tényező változatlansága esetében. Az s szolvencia-szorzó változásának hatása a szolvencia-függvényre ebben az esetben nem lineáris (ez a (25) összefüggésnél is megfigyelhető nemlinearitással függ össze). A 4. ábrán az is látható, hogy bizonyos esetekben alacsony állomány nagyságnál a díjtartalékhoz viszonyítva jelentős mértékű (a gyakorlatban tapasztaltnál jóval magasabb) lehet az adott megbízhatósági szint eléréséhez szükséges tőke értéke.

Adott optimális szolvencia szorzót jelentő (nem negatív) s^{***} érték alapján az adott megbízhatósági szint eléréséhez szükséges tőke értéke abban az esetben tehát, amikor a számításokban a biztosítási és a pénzügyi kockázatot egyidejűleg figyelembe vesszük:

$$\frac{nBp}{1+i} s^{***} . \quad (31)$$

4 Szolvencia-számítási megközelítések összehasonlítása

A biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében a (31) alapján számított tőkeszükséglet összevethető azzal az értékkel, amelyet a Szolvencia II szabályok alapján lehet számolni a nulla értékű kovariancia feltételezésével:

$$\sqrt{\left(\frac{nBp}{1+i} s^*\right)^2 + \left(\frac{nBp}{1+i} s^{**}\right)^2} . \quad (32)$$

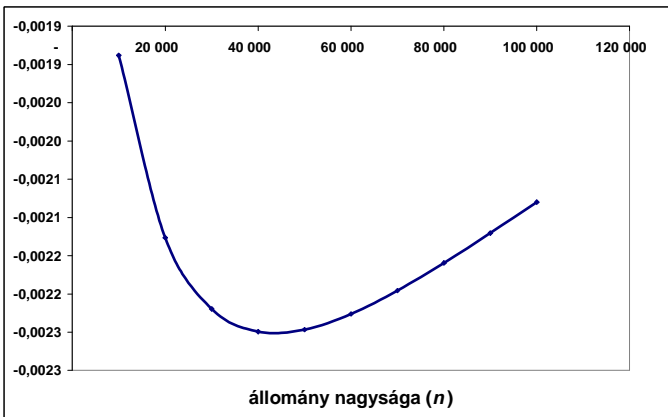
E két tőkeszükséglet érték azonban különböző jellemzőkkel rendelkező biztosítási állományoknál nem feltétlenül lenne közvetlenül összevethető. Az összehasonlításhoz érdemesebb a szolvencia-szorzókat alkalmazni, a Szolvencia II szabályok alapján számítható tőkeszükséglet alapján az ezt a helyzetet

jellemző szolvencia-szorzó:

$$s' = \frac{\sqrt{\left(\frac{nBp}{1+i}s^*\right)^2 + \left(\frac{nBp}{1+i}s^{**}\right)^2}}{\frac{nBp}{1+i}} = \sqrt{(s^*)^2 + (s^{**})^2}. \quad (33)$$

A következőkben tehát az összes (biztosítási és pénzügyi kockázatot is figyelembe vevő) tőkeszükséglet összehasonlításánál ($s' - s^{**}$) értéket alkalmazzuk. Amennyiben ez a különbség negatív, akkor az adott paramétereknél a Szolvencia II szabályok alapján számított tőkeszükséglet kisebb a biztosító számára, mint a kétféle kockázat közös modelljével számítható tőkeszükséglet (pozitív különbségnél a fordított összefüggés teljesül).

Az ($s' - s^{**}$) különbségre vonatkozó számításon alapján levonható egyik legfontosabb következtetés, hogy ez általában nem nulla, tehát a kétféle számolás eredménye általában nem egyezik meg. Az összesített tőkeszükséglet kétféle módon kiszámított értéke közötti különbséget számos tényező befolyásolhatja, és a különbséget befolyásoló tényezők hatása meglehetősen változatos lehet. Egy adott paraméterbeállításához tartozóan ezt például az állomány nagyság (n) változásának hatása alapján az 5. ábra szemlélteti ($\alpha = 0,995$, $p = 0,15$, $i = 0,01$, $\mu = 0,015$, $\sigma = 0,01$)¹²:



5. ábra. Az állomány nagysága és a szolvencia-szorzók különbsége. Forrás: saját számítások.

Az 5. ábrán szereplő adatok esetében egyébként a tőkeszükségletet jelző szolvencia-szorzó mindkét számolási megközelítésnél csökken, ha az állomány nagysága (n) emelkedik. Az 5. ábra a kétféle módon számolt (az állomány-nagyság növekedésekor csökkenő) szolvencia-szorzók különbségét mutatja. A szolvencia-szorzók különbsége ebben az esetben mindegyik elemzésben szereplő esetben negatív, ami azt jelenti, hogy az adott paraméterek alapján a Szolvencia II szabályok alapján a nulla korrelációs együttható alkalmazásával összesített tőkeszükséglet értéke alacsonyabb, mint az a tőkeszükséglet-érték,

¹²A Szolvencia II szabályokhoz hasonlóan a megbízhatósági szint a számítások során 0,995.

amely a modellben a biztosítási és a pénzügyi kockázat egyidejű figyelembe vétele esetén számolható. Az 5. ábrán szereplő értékek olyan szempontból is érdekesek, hogy a különbség a kétféle szolvencia-szorzó között egy bizonyos állománymagysáig emelkedik, majd csökkenni kezd. Ez azt jelenti, hogy e példa esetében ha a biztosítási állomány nagyobb, ez egy bizonyos határig azzal jár, hogy a Szolvencia II szabályok alapján egyre alacsonyabb a tőkeszükséglet ahhoz képest, mint amit a kétféle kockázat közös modellje alapján lehet meghatározni, majd egy bizonyos állománymagyság felett, ha az állomány tovább emelkedik, a Szolvencia II szabályok alapján meghatározott tőkeszükséglet kezd közelíteni a kétféle kockázat közös modellje alapján megállapított tőkeszükséglet-szinthez. Az 5. ábra arra utal tehát, hogy még viszonylag egyszerű modellfeltevéseknel sem lehet minden esetben egyértelműen meghatározni, hogy valamely paraméter változásakor emelkedik vagy csökken a tőkeszükségletek közötti különbség.

Az azonos paraméter-beállításokkal, de eltérő módszerrel (a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modellje alapján vagy a Szolvencia II szabályok alapján) számolt tőkeszükségletek értékénél az esetleges különbözőség oka a számolási módszerek különbsége: a kétféle kockázat közös modelljénél a számítások nem a külön-külön számolt tőkeszükségletek értékeiből indulnak ki.

A számítások során a paraméterbeállítások módosításával egyébként a szolvencia-szorzók különbsége esetében pozitív érték is elérhető (például ha $\alpha = 0,995$, $p = 0,01$, $i = 0,018$, $\mu = 0,015$, $\sigma = 0,01$, $n = 100\,000$)¹³.

A viszonylag egyszerű feltevések alapján létrehozott modell következtetései közül a leginkább érdekes, hogy a kétféle megközelítés közül melyik eredményez magasabb tőkeszükségletet. További érdekes kérdés, hogy adott relációk (melyik tőkeszükséglet a nagyobb) milyen paraméter-beállítások között fordulhatnak elő. Ahogyan azt a (12), (18), (30) és (33) összefüggések mutatják, még a viszonylag egyszerű modellfeltevések esetében is meglehetősen bonyolult feladat a szolvencia-szorzók összehasonlítása. A továbbiakban az összehasonlítást egyszerűbb esetekben végezzük el.

Tegyük fel először, hogy nincs sem pénzügyi kockázat ($\sigma = 0$), sem pedig biztosítási kockázat ($p = 1$). Ez utóbbi feltevés azzal egyenértékű, hogy a biztosító a befizetett díjra a technikai kamatnak megfelelő kamatot fizet.¹⁴ A kockázatok teljes hiánya esetében a modellben reális elvárás lenne, hogy mindkét megközelítés alkalmazásakor nulla legyen a szolvencia-szorzó (illetve a tőkeszükséglet), de az eredmények nem feltétlenül ezt mutatják (és ezzel egyébként az egyes számítási megközelítések korlátaira is utalnak). E feltevések esetén csak akkor van közgazdaságilag jól értelmezhető megoldás, ha $i \geq \mu$ (különben a biztosítási kockázatra és a pénzügyi kockázatra külön-külön számolt tőkeszükségletek értéke negatív). Az $i > \mu$ feltétel esetén a Szolvencia II szabályok alapján számított szolvencia-szorzó a magasabb,

¹³Ez a paraméterbeállítás egyébként —aktuáriusi szempontból is— problematikus helyzetre utal, mivel a technikai kamat értéke a várható befektetési hozam felett van.

¹⁴Ez azt jelenti, hogy ekkor az elemzésben egy éves tartamú, egyszeri díjas term fix biztosítás szerepel.

ennek értéke

$$\sqrt{2\left(\frac{i-\mu}{1+\mu}\right)^2} > 0,$$

szemben a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében számolt szolvencia-szorzó

$$\left(\frac{i-\mu}{1+\mu}\right)$$

értékével. Érdeemes még azt megemlíteni, hogy a kockázatok teljes hiányában akkor nulla a tőkeszükséglet mindkét számítási megközelítés alapján, ha a technikai kamat és a (biztos) befektetési hozam megegyezik ($i = \mu$).

Ha csak az egyik kockázat hiányzik a modellből, akkor a szolvencia-szorzókra kapott megoldások akkor értelmezhetőek jól közgazdaságilag, ha $i \geq \mu$, különben a hiányzó kockázat-fajtára számolt tőkeszükséglet negatív. Ha tehát az egyik kockázat hiányzik a modellből és a technikai kamat megegyezik a befektetési hozam várható értékével ($\mu = i$), akkor a kétféle megközelítés azonos szolvencia-szorzót (illetve tőkeszükségletet) eredményez: e feltétel esetén, ha a modellben a biztosítási kockázat hiányzik ($p = 1$), akkor a (közgazdaságilag releváns, nemnegatív) szolvencia-szorzó értéke mindkét esetben

$$\frac{\Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma}{1+i}}{1 - \Phi^{-1}(\alpha)\frac{\sigma}{1+i}},$$

míg ha a pénzügyi kockázat hiányzik ($\sigma = 0$), valamint $\mu = i$ feltétel szintén teljesül, akkor a szolvencia-szorzó értéke mindkét megközelítés alkalmazásakor

$$\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{1-p}{np}}.$$

Egy további érdekes eredmény abban az esetben adódik a modellben, amikor a kockázatok ugyan nem hiányoznak a modellből, de az egyes kockázatokra külön-külön számítható szolvencia-szorzó (illetve tőkeszükséglet) nulla. Ez a biztosítási kockázatnál akkor fordulhat elő, ha $\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{(1-p)/(np)} = (\mu - i)/(1 + i)$, a pénzügyi kockázatnál pedig akkor jöhet létre ilyen helyzet, ha $\Phi^{-1}(\alpha)\sigma = \mu - i$. Ha e két feltétel egyszerre teljesül, akkor a Szolvencia II szabályok szerint számolt tőkeszükséglet értéke nyilvánvalóan nulla (egyébként bármilyen korrelációs együttható alkalmazása esetén is nulla), míg a két kockázat közös modellje esetében nem nulla a számolható tőkeszükséglet értéke, ebben az esetben a szolvencia-szorzók értékére a megoldás:

$$\frac{\frac{1+\mu}{1+i} \pm \sqrt{2\frac{1+\mu}{1+i}\left(\frac{\mu-i}{1+i}\right)^2}}{2\frac{1+\mu}{1+i} - 1} - 1. \tag{34}$$

A két elméletileg lehetséges megoldás közül csak az egyik értelmezhető jól közgazdaságilag, mivel ha a technikai kamat és a befektetési hozam várható

értéke különbözik¹⁵, akkor a gyakorlati szempontból realiztikusnak tekinthető helyzetekben az egyik megoldás pozitív, míg a másik negatív (ennek bizonyítása a *Függelék*ben található). Ez az eredmény azt mutatja, hogy a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében a tőkeszükséglet (illetve szolvencia-szorzó) pozitív lehet olyan esetben is, amikor a Szolvencia II szabályok alapján számolt tőkeszükséglet nulla (amiatt mert a külön számított tőkeszükségletek értéke nulla).

A kétféle megközelítés alkalmazásával számolt tőkeszükségletek értéke tehát nem feltétlenül egyezik meg még abban az esetben sem, amikor a kétféle kockázat közötti korreláció értékét nullának tekintettük (a lehető legegyszerűbb elemzési keret kialakítása érdekében). A kétféle megközelítés esetében a tőkeszükségletek között természetesen akkor is lehetnek különbségek, ha a korreláció értéke nullától különböző a számításokban.

Összességében az eredmények arra utalnak, hogy az összesített tőkeszükséglet számítása során a tanulmányban alkalmazott két módszer közötti különbségeket (illetve a szolvencia-szorzók konkrét értékét) az állomány nagyság, az állományon belül a biztosítási esemény bekövetkezési valószínűsége, valamint számos további egyéb, a biztosítók állományát jellemző tényező befolyásolhatja.

5 Az eredmények értékelése

Jelen tanulmány a biztosítók szolvenciájával kapcsolatos tőkeszükséglet számításával foglalkozott. E témával kapcsolatban újdonságnak tekinthetők a Szolvencia II Európai Unió irányelv szabályai. A tanulmány azt a kérdést elemezte, hogy miként befolyásolják a biztosítók állományának egyes jellemzői a Szolvencia II szabályokhoz hasonló modell-keretben számítható tőkeszükséglet-értékeket. Az elemzés során biztosítási és pénzügyi kockázati modul figyelembe vételére került sor, és a biztosító egészére összesítetten vonatkozó tőkeszükséglet számszerűsítésére kétféle módszert is bemutatott a tanulmány: egyfelől a kétféle kockázat esetében külön-külön számított tőkeszükségleteknek adott korrelációs érték alkalmazásával történő összesítésével, másfelől pedig a kétféle kockázat egyszerre történő modellezésével. Az egyik legérdekesebb eredménynek az tekinthető, hogy a két módszerrel kapott eredmények általában nem egyenlők, vagyis a két módszerrel általában különböző eredmények adódnak a tőkeszükséglet értékekre (az eredmények összehasonlítására a modellben levezetett szolvencia-szorzókat alkalmazva). Az eredmények alapján megállapítható, hogy a kétféle tőkeszükséglet-számítási módszerrel adódó eredmények különbségét számos, a biztosító tevékenységét, illetve az általa vállalt biztosítási illetve pénzügyi kockázatokat jellemző tényező befolyásolja. A tanulmányban bemutatott eredmények arra is utalnak, hogy a biztosítók tőkeszükséglet-számításai, illetve a tőkeszükséglet-számítási mód-

¹⁵Ha a technikai kamat értéke és a befektetési hozam várható értéke megegyezik és mindkét kockázatforma esetében külön számolt tőkeszükséglet értéke nulla, ez azt is jelenti, hogy a modellben nincs sem biztosítási, sem pedig pénzügyi kockázat.

szer kiválasztása során érdemes figyelmet fordítani a biztosítási állományra jellemző egyes paraméterek (például az állomány nagysága) szerepének elemzésére.

Függelék

Korrelációs mátrix a Szolvencia II. szabályozásban

	Piaci	Csőd (default)	Életbirt.	Egészségbirt.	Nem-életbirt.
Piaci	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Csőd (default)	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Életbirt.	0,25	0,25	1	0,25	0
Egészségbirt.	0,25	0,25	0,25	1	0
Nem-életbirt.	0,25	0,5	0	0	1

Forrás: Directive 2009/138/EC [1]

A VaR számítás alkalmazása a modellben

Az eredmények levezetése során figyelembe vesszük a binomiális eloszlás normális eloszlással közelíthetőségét, így a következőkben a normális eloszlás esetével foglalkozunk. A VaR értékek normális eloszlású valószínűségi változó esetén a következő képlet alapján is számíthatók (*McNeil et al.* [2005], 39. o.):

$$\text{VaR}(\alpha) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha),$$

ahol μ a normális eloszlás várható értékét, σ a normális eloszlás szórását, $\Phi^{-1}(z)$ pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverz függvényét jelentik.

Tekintsük a továbbiakban az elméleti modellben szereplő jelöléseket, illetve $B\xi$ valószínűségi változót, amely biztosítási kockázat figyelembevétele esetén a biztosító egy időszak múlva esedékes kötelezettségeinek értékét mutatja. A $B\xi$ valószínűségi változó esetében a várható érték a modellfeltevések alapján $E(B\xi) = np$, a variancia pedig $\text{Var}(B\xi) = np(1-p)$. Amennyiben a biztosítónál nem számolunk pénzügyi kockázattal (az egy időszak alatt elért befektetési hozam értéke r), akkor α megbízhatósági szint eléréséhez szükséges, a (12) képlet szerint számolható s^* alkalmazása esetén egy év múlva a biztosító kötelezettségeinek és tőkéjének együttes értéke:

$$(1 + s^*) \frac{nBp}{1+i} (1+r) = Bnp + B\sqrt{np(1-p)}\Phi^{-1}(\alpha).$$

A biztosító kötelezettségeinek és saját tőkéjének értéke összesen tehát $B \cdot \xi$ valószínűségi változó esetében az α megbízhatósági szinthez tartozó VaR értékének felel meg:

$$Bnp + B\sqrt{np(1-p)}\Phi^{-1}(\alpha) = E(B\xi) + \sqrt{\text{Var}(B\xi)}\Phi^{-1}(\alpha).$$

A szolvencia-szorzók számítása

A következőkben a számítások áttekinthetősége érdekében a következő jelöléseket alkalmazzuk:

$$A = \Phi^{-1}(\alpha), \quad M = \frac{1 + \mu}{1 + i}, \quad K = \frac{\sigma}{1 + i}, \quad Y = \sqrt{\frac{1 - p}{np}}.$$

A külön-külön a biztosítási illetve pénzügyi kockázat esetén, valamint a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében számolható szolvencia-szorzók e jelölések alkalmazásával:

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{AY + 1 - M}{M} \\ s^{**} &= \frac{1 - M + AK}{M - AK} \\ s^{***} &= \frac{M \pm A\sqrt{M^2Y^2 + K^2 - K^2Y^2A^2}}{M^2 - A^2K^2} - 1. \end{aligned}$$

A biztosítási kockázat esetében a szolvencia-szorzó értéke akkor nem negatív, ha $AY \geq M - 1$, míg a pénzügyi kockázat esetében a szolvencia-szorzó akkor nem negatív, ha $AK \geq M - 1$. A kétfajta kockázatnál külön-külön számított tőkeszükséglet (illetve szolvencia-szorzó) akkor nulla, ha $AY = M - 1$ illetve $AK = M - 1$. Feltéve tehát, hogy a kockázatoknál külön-külön számított tőkeszükséglet értéke nulla (tehát a Szolvencia II szabályok alapján számolt tőkeszükséglet is nulla), a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében számolt szolvencia-szorzók értéke:

$$\frac{M \pm A\sqrt{M^2\left(\frac{M-1}{A}\right)^2 + \left(\frac{M-1}{A}\right)^2 - A^2\left(\frac{M-1}{A}\right)^4}}{M^2 - (M-1)^2} - 1.$$

Átalakítással a szolvencia-szorzók értéke:

$$\begin{aligned} &\frac{M \pm A\frac{1}{A}\sqrt{(M^2 + 1)(M - 1)^2 - (M - 1)^4}}{M^2 - (M^2 - 2M + 1)} - 1 = \\ &= \frac{M \pm \sqrt{2M^3 - 4M^2 + 2M}}{2M - 1} - 1 = \\ &= \frac{M \pm \sqrt{2M(M - 1)^2}}{2M - 1} - 1. \end{aligned}$$

A kapott eredménybe M értékét visszahelyettesítve a szolvencia-szorzók lehetséges értéke a biztosítási és pénzügyi kockázat közös modelljében:

$$\frac{\frac{1+\mu}{1+i} \pm \sqrt{2\frac{1+\mu}{1+i}\left(\frac{\mu-i}{1+i}\right)^2}}{2\frac{1+\mu}{1+i} - 1} - 1.$$

Tekintsük egyenként a két lehetséges megoldást. A gyakorlati szempontból realisztikus helyzetekben $(1 + \mu)/(1 + i) > 1/2$, ugyanakkor μ és i értéke

különbözhet. A magasabb érték a két elméletileg lehetséges megoldás közül pozitív, ha $\mu > i$ és negatív, ha $\mu < i$ (a képletekben az átláthatóság megkönnyítése érdekében az M jelölést alkalmazva):

$$\frac{M + \sqrt{2M(M-1)^2}}{2M-1} - 1 = \frac{(M-1)(\sqrt{2M}-1)}{2M-1}.$$

A két elméletileg lehetséges megoldás közül az alacsonyabb értékű negatív, ha $\mu > i$, és pozitív, ha $\mu < i$, mivel:

$$\frac{M - \sqrt{2M(M-1)^2}}{2M-1} - 1 = \frac{-(M-1)(\sqrt{2M}+1)}{2M-1}$$

Irodalom

1. Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)
2. CRO Forum [2009]: *Calibration recommendation for the correlations in the Solvency II standard formula*, 2009. december 10.
3. CEA [2006]: *CEA Working Paper on the risk measures VaR and TailVaR*.
4. McNeil, A. J. – Frey, R. – Embrechts, P. [2005]: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.
5. PSZÁF[2010]: *A Felügyelet 2010. évi első kockázati jelentése*, 2010. április, www.pszaf.hu

COMMON EFFECT OF INSURANCE AND FINANCIAL RISK IN THE SOLVENCY CALCULATION OF INSURERS

The new Solvency II directive results in a new environment for calculating the solvency capital requirement of insurance companies in the European Union. By modelling insurance companies the study analyses the impact of certain characteristics of insurance population on the solvency capital based on Solvency II rules. The model includes insurance and financial risk module by calculating solvency capital for the given risk types separately and together, respectively. Based on the theoretical results the difference between these two approaches can be observed. Based on the results the analysis of factors influencing the differences is also possible.

CVAR SZÁMÍTÁS SRA ALGORITMUSSAL¹

ÁGOSTON KOLOS CSABA
Budapesti Corvinus Egyetem

A *CVaR* kockázati mérték egyre nagyobb jelentőségre tesz szert portfóliók kockázatának megítélésekor. A portfólió egészére a *CVaR* kockázati mérték minimalizálását meg lehet fogalmazni kétlépcsős sztochasztikus feladatként. Az SRA algoritmus egy mostanában kifejlesztett megoldó algoritmus sztochasztikus programozási feladatok optimalizálására. Ebben a cikkben az SRA algoritmussal oldottam meg *CVaR* kockázati mérték minimalizálást².

1 Bevezetés

Egy értékpapír vagy portfólió kockázatának mérése régóta foglalkoztatja az elméleti és gyakorlati pénzügyi szakembereket. A kockázat mérésére több megoldás is létezett. Ezek közül az ún. *VaR* (Value-at-Risk, magyarul kockázatotott érték) kockázati mérték terjedt el leginkább. A VaR_β kockázati mérték megadja azt az értéket, amelynél a döntéshozó β valószínűséggel nem veszít többet. A *VaR* népszerűségének oka a könnyű értelmezhetőség, bár számos elméleti és numerikus probléma merült fel. Elméleti oldalról probléma, hogy a *VaR* ugyan megadja azt az értéket, amelynél a döntéshozó β valószínűséggel nem veszít többet, de arról nem mond semmit, hogy a veszteség mennyivel haladja meg ezt az értéket, ha a veszteség mégis nagyobb ennél az értéknél. Szintén elméleti probléma, hogy diverzifikációval akár nőhet is a *VaR*, tehát nem teljesül a kockázati mértéktől elvárt szubadditivitás követelménye (lásd: [2]). Numerikus oldalról probléma, hogy optimalizálás esetén a *VaR* modellek nemkonvex optimalizálási feladatokra vezethetnek, amelyek köztudottan nem jól kezelhetők.

Érdemes megemlíteni, hogy egy *VaR*-korlát ($P\{Y \geq K\} \geq p$) tulajdonképpen valószínűségi korlát, ami gyakran használt megoldás a sztochasztikus programozásban. Ezekkel kapcsolatban Prékopa András végzett kiterjedt kutatásokat, nevezetesen megmutatta, hogy egy sor valószínűségi eloszlás esetén az eloszlás sűrűségfüggvénye logkonkáv és ezért az eloszlásfüggvénye is logkonkáv. Ezért a valószínűségi korlát által megadott megengedett megoldások halmaza ($\{\mathbf{x} | P\{Y \geq \mathbf{x}\} \geq p\}$) konvex, ha a korlát megfogalmazásában konvex függvények szerepelnek (lásd pl.: [11]). Logkonkáv eloszlás például a nem degenerált normális eloszlás, a Dirichlet eloszlás és a Wishart eloszlás is. Sajnos az általam vizsgált portfólió választási feladatok nem tartoznak az

¹Beérkezett: 2010. január 18. E-mail: kolos.agoston@uni-corvinus.hu.

²Ezúton szeretnék köszönetet mondani Deák Istvánnak segítségéért. Szeretném továbbá megköszönni két ismeretlen lektorom hasznos tanácsait is.

említett feladat-osztályba, mert a döntési változók és a véletlen paraméterek szorzatát kell számolni.

A *CVaR* (Conditional VaR, magyarul feltételes kockázatotott érték) kezeli ezeket a problémákat. A *CVaR* matematikailag egy feltételes várható érték, tehát figyelembe veszi a veszteség nagyságát is, és a *CVaR* koherens kockázatmérték (lásd: [10,2]).

A *CVaR* modelleknek egyik fontos iránya az ún. portfólióoptimalizálási modellek. Ezen modellek esetében a döntéshozó a portfólió kockázatát (*CVaR*) szeretné minimalizálni bizonyos feltételek mellett. Rockafellar és Uryasev ([12]) hozzájárulása jelentős a területhez, akik a *CVaR* kockázati mérték minimalizálást lineáris programozási feladatként fogalmazták meg. Künzi-Bay és Mayer ([8]) a *CVaR* kockázati mérték minimalizálását kétlépcsős sztochasztikus feladatként írta fel. Az ő felírásukkal a kétlépcsős sztochasztikus modellek megoldására alkalmas algoritmusokkal is meg lehet oldani a modellt. Az eljárást továbbfejlesztette Fábrián, aki többperiódusú portfólió modelleket oldott meg ([7]).

Sztochasztikus programozási feladatok megoldására (nemcsak kétlépcsős, hanem egyéb típusúakra is) egy új heurisztikus algoritmus a Deák által kifejlesztett SRA algoritmus ([3,6,4,5]), amely alkalmas akár nagyméretű sztochasztikus feladatok megoldására is. Ebben a cikkben az SRA algoritmust használtam *CVaR* kockázati mérték minimalizálására.

A cikk felépítése a következő: a 2. fejezetben a *CVaR* kockázati mérték minimalizálására felírt portfólió modellt mutatom be, a 3. fejezetben az SRA algoritmust ismertetem röviden. A 4. fejezetben az SRA algoritmus implementálását mutatom be *CVaR* kockázati mérték minimalizálására. A számítási eredményeket az 5. fejezet mutatja be.

A cikkben a következő jelöléseket alkalmazom: \mathbf{x} vektor i -edik koordinátáját x_i jelöli. Y valószínűségi változót, \mathbf{Y} pedig valószínűségi vektorváltozót jelöl. \mathbf{Y}^j az \mathbf{Y} valószínűségi vektorváltozó egy realizációját jelöli, ennek i -edik koordinátája pedig \tilde{Y}_i^j .

2 A CVaR modell

Legyen Y egy valószínűségi változó, amely egy döntéshozó lehetséges (pénzben mért) veszteségét (a nyereség negatív veszteségként értelmezendő) fejezi ki. Az egyszerűség kedvéért legyen Y folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(y)$, eloszlásfüggvénye pedig $F(y)$. Ehhez az Y valószínűségi változóhoz tartozó VaR_β kockázati mérték megadja azt az értéket, amelynél a döntéshozó β valószínűséggel nem veszít többet:

$$VaR_\beta = F^{-1}(1 - \beta),$$

ahol $F^{-1}(\cdot)$ az $F(y)$ eloszlásfüggvény általánosított inverze:

$$F^{-1}(w) = \inf_y \{F(y) \geq w\}$$

A döntéshozó vagyónát jellemzően nem egy értékpapírba helyezi, ezért Y több valószínűségi változó összegeként áll elő. Portfólió optimalizálási feladatok esetén a döntéshozó n értékpapírba fektetheti tőkéjét, ezek jövőbeni értékét jelölje Y_i valószínűségi változó. A döntéshozó x_1, x_2, \dots, x_n összegeket fektet az értékpapírokba. A jövőbeni vagyont ekkor az $\sum_{i=1}^n x_i Y_i$ összeg adja meg, tehát $Y = -\sum_{i=1}^n x_i Y_i$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a döntéshozó egységnyi tőkével rendelkezik, ekkor x_i változók az optimális választás esetén az eszközök arányát mutatják, Y_i valószínűségi változók pedig az eszköz hozamát.

Ugyanehhez az Y valószínűségi változóhoz tartozó $CVaR_\beta$ feltételes kockázati mérték megadja, hogy várhatóan mennyit veszít a döntéshozó, ha a veszteség meghaladja VaR_β értéket:

$$CVaR_\beta = E(Y|Y \geq VaR_\beta) = E(Y|Y \geq F^{-1}(\beta)) \quad (1)$$

Rockafellar és Uryasev ([12]) megmutatta, hogy folytonos valószínűségi változók esetén a $CVaR_\beta$ a

$$\min_z z + (1 - \beta)^{-1} E([Y - z]^+) \quad (2)$$

feladat megoldásaként is megkapható, ahol $[x]^+$ x pozitív részét jelöli. Megmutatható, hogy a (2) kifejezés optimumhelye³ (z változó optimális értéke) VaR_β .

Amennyiben Y nem folytonos valószínűségi változó az (1) képlettel megadott definíció további pontosításra szorul⁴, és ráadásul a (2) minimuma nem feltétlenül egyezik meg az (1) képlettel megadott értékkel, ezért Pflug [10] azt javasolja, hogy a (2) képletet tekintsük definíciónak. Pflug olyan eloszlásokkal foglalkozik, ahol az eloszlásfüggvényben ugrások lehetnek. Általános eloszlásokra Rockafellar és Uryasev [13] dolgozta ki az elméletet.

Portfólió optimalizálás esetén szeretnénk minimalizálni $CVaR_\beta$ kockázati mértéket, feltéve hogy a döntéshozónak van valamekkora hozamelvárása (r^*). Most ezt a feladatot kétlépcsős modell segítségével írjuk fel⁵. Ekkor a döntési probléma:

$$\min_{\mathbf{x}, z} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + z + E(Q_C(\mathbf{x}, z, \mathbf{Y})),$$

feltéve, hogy:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i E(Y_i) \geq r^*.$$

A második lépcső:

$$Q_C(\mathbf{x}, z, \mathbf{Y}) = (1 - \beta)^{-1} \min_y y,$$

³Elképzelhető, hogy az optimumhely nem egyértelmű, a részletekről lásd.: [13]

⁴A részletekről lásd.: [13]

⁵A felírást Künzi-Bay és Mayer ([8]) adta meg.

feltéve, hogy:

$$y \geq - \sum_{i=1}^n x_i Y_i - z,$$

$$y \geq 0,$$

ahol Y_i valószínűségi változó az i -edik eszköz hozamát mutatja, x_i döntési változó az i -edik eszközbe fektetett tőke arányát jelenti, z az optimalizáláshoz használt segédváltozó, β pedig a *CVaR* kockázati mértékhez tartozó külső paraméter (megbízhatósági szint). Az x_i döntési változókra feltehetünk nem-negativitási korlátot, de ez technikailag nem szükséges (meg lehet engedni fedezetlen eladásokat is).

Amennyiben Y_1, Y_2, \dots, Y_n valószínűségi változók diszkrét eloszlásúak (és korlátosak), akkor a kétlépcsős feladatot meg lehet oldani lineáris programozási feladatként (lásd: [12]). Elterjedt módszer, hogy folytonos valószínűségi változókat is diszkrétizálnak (vagy mintát vesznek), és így lineáris programozási feladatként oldják meg. Kihhasználva a specialitásokat Künzi-Bay és Mayer ([8]) megadott egy hatékony eljárást a *CVaR* optimalizálások esetére. Ugyanakkor a diszkrétizálás magas dimenziók (sok eszköz) esetén problematikus lehet (lásd: [4]).

Másik lehetséges módszer kétlépcsős sztochasztikus problémák megoldására a Monte Carlo integrálásos technikák, amelynek egyik képviselője az SRA algoritmus.

3 Az SRA algoritmus

Az SRA (Successive Regression Approximations) egy mostanában kifejlesztett heurisztikus algoritmus sztochasztikus programozási feladatok megoldására⁶. Ezek közül most csak a kétlépcsős programozási feladatok megoldását mutatom be.

Tekintsünk egy kétlépcsős sztochasztikus programozási feladatot az alábbi formában:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + E(Q_C(\mathbf{x}, \mathbf{Z})),$$

feltéve, hogy:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

A második lépcső:

$$Q_C(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) = \min_{\mathbf{y}} \mathbf{q}^T \mathbf{y},$$

feltéve, hogy:

$$A\mathbf{x} + W\mathbf{y} = \mathbf{Z},$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

⁶Az algoritmust Deák István fejlesztette ki.

A feladatban a nehézséget a $E(Q_C(\mathbf{x}, \mathbf{Z}))$ várható érték kiszámítása jelenti. A várható érték kiszámítása problematikus, de egy konkrét pontban a függvényre nem nehéz torzítatlan becslést adni: legyen $\tilde{\mathbf{Z}}^1, \tilde{\mathbf{Z}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{Z}}^k$ a \mathbf{Z} valószínűségi vektorváltozó k független realizációja, ekkor

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Q_C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{Z}}^i). \quad (3)$$

az $E(Q_C(\mathbf{x}, \mathbf{Z}))$ értéknek egy torzítatlan becslése⁷.

Az SRA algoritmus alap gondolata az, hogy az $E(Q_C(\mathbf{x}, \mathbf{Z}))$ nehezen kiszámítható függvényt egy kvadratikus függvénnyel közelíti, és az optimum közelében elkezd 'pontosítani' ezt a függvényt. Az algoritmus indulásához szükségünk van kezdőpontokra. Véletlenszerűen felvesszünk \mathbf{x}^i kezdőpontokat (mondjuk l darabot), és ezekre a kezdőpontokra kiszámítjuk a $p_i(\mathbf{x}^i)$ becsléseket. Rendelkezzünk $S_l = \{\mathbf{x}^i, p_i(\mathbf{x}^i)\}_{i=0}^{l-1}$ pontok halmazával, ezekre a pontokra egy

$$q_l(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T D_l \mathbf{x} + \mathbf{b}_l^T \mathbf{x} + c_l.$$

alakú kvadratikus függvényt illesztünk.

Az eredeti első lépcső feladatot helyettesítjük a

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} + q_l(\mathbf{x}),$$

feltéve, hogy:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

feladattal, ami kvadratikus programozási feladat. Kiszámítjuk a feladat optimális megoldását. Ha a kapott pont 'elég jó', megállunk, ha nem, kiszámítjuk az optimumhoz a $p(\mathbf{x})$ becslést, hozzávesszük az eddigi pontokhoz, és visszatérünk a kvadratikus közelítéshez (az algoritmus részletesebb leírása megtalálható: [6,4,5]).

Az 'elég jó' megállási kritérium lehet valamilyen pontosság (statisztikai hibahatár) megkövetelése (lásd például: [9]).

Az SRA algoritmus jól teljesít sztochasztikus problémák megoldásában, de hiányzik az elméleti bizonyítása. A cikk következő részében azt szándékozom demonstrálni, hogy CVaR kockázati mérték minimalizálására is használható az algoritmus.

4 Az SRA algoritmus implementálása

4.1 Alapfeladat

A CVaR kockázati mérték minimalizálási feladatot a következő formában szokás felírni:

$$\min_{\mathbf{x}, z} z + E(Q_C(\mathbf{x}, z, \mathbf{Y})),$$

⁷A gyakorlatban nem ezt a becslés célszerű alkalmazni. A részletekről lásd: [6]

feltéve, hogy:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i E(Y_i) \geq r^*.$$

A második lépcső:

$$Q_C(\mathbf{x}, z, \mathbf{Y}) = (1 - \beta)^{-1} \min_y y,$$

feltéve, hogy:

$$y \geq - \sum_{i=1}^n x_i Y_i - z,$$

$$y \geq 0,$$

ahol Y_i valószínűségi változó az i -edik eszköz hozamát mutatja, x_i döntési változó az i -edik eszközbe fektetett tőke arányát jelenti, z az optimalizáláshoz használt segédváltozó, β pedig a *CVaR* kockázati mértékhez tartozó külső paraméter (megbízhatósági szint).

Természetesen a konkrét optimalizáláshoz szükségünk van $\tilde{\mathbf{Y}}^1, \tilde{\mathbf{Y}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}^q$ realizációkra. A $Q_C(\mathbf{x}, z, \mathbf{Y})$ függvényt a mintaátlaggal helyettesítjük, ekkor a második lépcső a következő alakot ölti:

$$Q_C(\mathbf{x}, z, \tilde{\mathbf{Y}}^1, \tilde{\mathbf{Y}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}^q) = \frac{1}{(1 - \beta)q} \min_{\mathbf{y}} \sum_{j=1}^q y_j,$$

feltéve, hogy:

$$y_j + z \geq - \sum_{i=1}^n x_i \tilde{Y}_i^j, \quad j = 1 \dots q,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1 \dots q$$

Ezen a felírásom csak annyiban változtattam, hogy a z változóban végzett optimalizálást nem az első, hanem a második lépcsőben végeztem. Az általam megoldott feladat⁸⁹:

$$\min_{\mathbf{x}} E(Q_C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{Y}}^1, \tilde{\mathbf{Y}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}^q)),$$

feltéve, hogy:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

⁸A célfüggvényhez hozzá lehet adni egy lineáris költségtagot, továbbá az első lépcsőhöz tetszőleges lineáris korlát is hozzáírható, az algoritmus változatlan formában működik.

⁹A célfüggvény helyett az SRA algoritmus implementálásakor itt is k minta átlaga áll. A részletek a 4.5. alfejezetben vannak kifejtve, a célfüggvény pontos meghatározása a (4) képletben található.

$$\sum_{i=1}^n x_i E(Y_i) \geq r^*.$$

A második lépcső:

$$Q_C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{Y}}^1, \tilde{\mathbf{Y}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}^q) = \min_{z, \mathbf{y}} z + \frac{1}{(1-\beta)q} \sum_{j=1}^q y_j,$$

feltéve, hogy:

$$y_j + z \geq - \sum_{i=1}^n x_i \tilde{Y}_i^j, \quad j = 1 \dots q,$$

$$z, y_j \geq 0, \quad j = 1 \dots q.$$

A változtatásnak az az értelme, hogy a második lépcső így egy *CVaR* számítás, a portfólió optimalizálás pedig az első lépcsőben történik. A második lépcső kiszámítását nem kell lineáris programozási feladatként megoldani. A második lépcsőhöz tartozó lineáris programozási feladat optimális megoldása megadja a portfólió veszteségének realizációi közül azok arányát, amelyek esetén a veszteségek a felső β kvantilisbe esnek, ami viszont lineáris programozási feladat nélkül is kiszámítható, jelentős futási időt spórolva.

Ennek a kétlépcsős sztochasztikus feladatnak a megoldására a 3. fejezetben leírt SRA algoritmust használtam, kisebb változtatásokkal.

4.2 Kezdő pontok meghatározása

Az első változtatás a kezdő pontok megválasztásánál történt: olyan induló pontokat választottam, amelyek rajta vannak az első lépcső korlátai által kifizetett hipersíkon. További változtatás, hogy kijelöltem egy középpontot, és a véletlenül felvett pontok e középpont körül helyezkednek el. A középpont az első lépcső korlátai által kifizetett hipersík origóhoz legközelebbi pontja¹⁰. Az volt mögötte a heurisztikus megfontolás, hogy a diverzifikálás előnyei miatt – nem szélsőséges esetben – az optimum is valahol az egységssimplex 'közepén' lesz, így a megfelelő középpont környékén felvett pontok jól leírják a pótlás feladat közelítését.

4.3 Kvadratikus közelítés

Az eredeti SRA algoritmus fontos jellemzője, hogy a regressziós közelítés előállításánál minden korábbi pontot felhasznál, így a közelítés egyre pontosabbá válik. Mégis fontos, hogy az optimum közelében lévő pontokat jobban figyelembe vegyük, mint az optimumtól távolabb lévő pontokat. Az eredeti SRA algoritmus ezt a követelményt úgy oldja meg, hogy minden ponthoz egy súlyt rendel, annak függvényében, hogy (véltetően) mennyire van távol

¹⁰A korlátok között mindig szerepel a $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ feltétel, tehát ez a pont rajta van az egységssimplexben.

az optimumtól. Az implementálásnál más utat követtem: amennyiben elegendő pont áll rendelkezésre, az induló pontokat (de csak azokat) kihagytam a kvadratikus közelítés előállításánál. A heurisztikus gondolat az volt ezen eljárás mögött, hogy induláskor szükség van a generált pontok szóródására, hogy a négyzetes közelítés felvegye a konvex kvadratikus alakot. Amikor viszont az algoritmus már 'kitapogatta' az optimum körülbeli helyét, az optimumtól távol lévő pontok már csak hátráltatnak.

4.4 A CVaR becslés torzítottsága

Felmerült az a probléma, hogy a pótlás feladat optimális célfüggvénye torzítottan becsüli $CVaR_\beta$ értéket. Az 1. táblázat számszerűen szemlélteti a torzítás mértékét sztenderd normális eloszlás esetén. A táblázatban az elemszám azt mutatja, hogy hány generált véletlen szám alapján számoltam a $CVaR_{0,9}$ becslését. A becslési eljárást megismételtem 10000-szer minden elemszám esetén. A táblázat második oszlopa mutatja $CVaR_{0,9}$ becslések átlagát, a harmadik a 95%-os konfidencia intervallumot, a negyedik pedig egy becsléshez szükséges idő átlagát (másodpercben). A táblázatból jól látszik, hogy az elemszám növekedésével csökken a torzítás mértéke, de lineárisnál gyorsabban nő a szükséges idő.

Elemszám	Elméleti érték	95%-os konfidencia intervallum			Idő
		Átlag	Alsó határa	Felső határa	
100	1,755	1,734	1,730	1,738	0,00004
500	1,755	1,750	1,749	1,752	0,00022
2500	1,755	1,754	1,753	1,755	0,00206
12500	1,755	1,755	1,754	1,755	0,03370
62500	1,755	1,755	1,754	1,755	0,70220

1. táblázat. A CVaR becslés torzítása. Az első oszlop megadja a becsléshez generált véletlenszámok számát, a második oszlopban szerepel az elméleti érték, a harmadikban a CVaR becslések átlaga, a negyedik és ötödikben a 95%-os konfidencia intervallum alsó és felső határa, a hatodik oszlopban pedig a becsléshez szükséges idő átlaga szerepel másodpercben.

Fontos hangsúlyozni, hogy a torzítás nem az SRA algoritmus következménye, az akkor is jelen van, ha a CVaR kockázati mérték optimalizálási feladatot lineáris programozási feladatként oldjuk meg¹¹.

4.5 Az $Q_C(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$ érték becslése

A 3. fejezetben a (3) képlettel adtunk egy becslést a második lépcső célfüggvényének értékére. Jelen CVaR kockázati mérték optimalizálás esetén a második lépcső becslése úgy történik, hogy generálunk véletlen számokat és vesszük a felső β kvantilis átlagát. Kérdés, hogy hány számot generáljunk, megismételjük-e az eljárást, és ha igen, hányszor. Egy CVaR becsléshez

¹¹Megjegyezzük, hogy az 1. táblázat eredményei összhangban vannak Mak Morton és Wood [9] elméleti eredményeivel.

generált változók számát elemszámmak hívom a továbbiakban. Az elemszámot úgy kell megválasztani, hogy kellően nagy legyen a torzítás megfelelő csökkentése céljából, ugyanakkor ne legyen a szükségesnél nagyobb, a futási idő miatt. Egy *CVaR* becslés ingadozása még akkor is jelentős, ha a torzítás már elenyésző (lásd 1. táblázat). Emiatt célszerű még viszonylag nagy elemszám esetén is több *CVaR* becslésnek venni az átlagát. Ismétlések számaként fogok arra utalni, hogy pontosan hány *CVaR* becslésnek veszem az átlagát. Képletben:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Q_C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{Y}}^{1,i}, \tilde{\mathbf{Y}}^{2,i}, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}^{q,i}), \quad (4)$$

ahol q az elemszám, k pedig az ismétlések száma.

Az elemszám és ismétlések száma kívülről adott paraméter, amelyet a döntéshozó által elvárt pontosság alapján lehet meghatározni.

5 Számítási eredmények

A kutatás jelen szakaszában a Rockafellar és Uryasev ([12]) cikkben közölt adatokkal számoltam, hogy az eredményeket lehessen más eredményekhez viszonyítani.

Rockafellar és Uryasev ([12]) a cikkükben 3 eszközt vizsgálnak: S&P 500 részvényindex (S&P 500), hosszú távú amerikai államkötvény portfólió (Gov Bond) és kis tőkésítettű amerikai vállalati portfólió (Small Cap). Az eszközök esetén a várható értéket és a szórást a 2. és 3. tábla mutatja.

Eszköz	Átlagos hozam
S&P 500	0,0101110
Gov Bond	0,0043532
Small Cap	0,0137058

2. táblázat. Az eszközök hozama

	S&P 500	Gov Bond	Small Cap
S&P 500	0,00324625	0,00022983	0,00420395
Gov Bond	0,00022983	0,00049937	0,00019247
Small Cap	0,00420395	0,00019247	0,00764097

3. táblázat. A portfólió kovarianciamátrixa

A 3 eszköz eloszlására együttes normális eloszlást tételeznek fel. Együttes normális eloszlás esetén a *CVaR* optimális portfólió és a Markowitz optimális portfólió egybeesik (lásd: [12]). A Markowitz-féle modell megoldása egy kvadratikus optimalizálás eredménye, aminek az értékét a 4. táblázat mutatja. Az optimális portfólió esetén a 90%-os, 95%-os és 99%-os *CVaR* értékeket az 5. táblázat adja meg.

S&P 500	Gov Bond	Small Cap
0,452013	0,115573	0,432414

4. táblázat. Optimális eszköz súlyok

$\beta = 0,9$	$\beta = 0,95$	$\beta = 0,99$
0,096975	0,115908	0,152977

5. táblázat. CVaR értékek az optimális portfólióra

Rockafellar es Uryasev ([12]) közöl futási eredményeket, de minden beállításról csak egyet. A 6. táblázatban olyan eredményeket közlök, amelyek minden elemszámhoz 100 futás eredményeit összegzik, így az optimum minőségéről jobb képet kapunk. Rockafellar es Uryasev CPLEX solvert használt, én viszont MINOS megoldót. Az eredményeket azért is közlöm, mert így a különbségek az algoritmusok különbségének tudhatók be és nem a solverek különbségének (és nem melleleg ugyanazon a gépen futtattam mindkét alternatívát). A 6. táblázat különböző elemszámok esetén mutatja az algoritmus futási eredményeit. Az első oszlop az elemszámot mutatja, a második a $CVaR_{0,9}$ becslések átlaga. Látható, hogy ha az elemszám kicsi, a $CVaR$ becslés lefelé torzít. Mivel a feladat 3 eszközt tartalmaz és két korlátot, ezért az eszközök közül csak egynek az értékét (arányát) lehet szabadon megválasztani (S&P 500), ennek átlagát mutatja a 6. táblázatban a harmadik oszlop. A negyedik oszlop a futáshoz szükséges idő átlaga másodpercben. Az átlagértékek alatt zárójelben a szórások szerepelnek.

Elemzszám	CVaR	S&P 500	Idő
100	0,09251 (0,01169)	0,38099 (0,26894)	0,0 (0,0)
500	0,09676 (0,00557)	0,43688 (0,15367)	0,0 (0,0)
2500	0,09725 (0,00234)	0,45195 (0,07267)	1,4 (0,1)
12500	0,09702 (0,00095)	0,45557 (0,03232)	58,9 (6,3)

6. táblázat. Futási eredmények – lineáris programozási feladat. Az első oszlop az optimalizáláshoz használt minta elemszámát mutatja, a második a $CVaR$ becslések átlagát, a harmadik az optimalizálás során az S&P 500 eszköz optimális értékeinek átlagát, a negyedik oszlop pedig az optimalizáláshoz szükséges idő átlagát másodpercben. Az átlagértékek alatt zárójelben a szórás szerepel.

Az SRA algoritmushoz a kódot Lahey Fortran nyelvben írtam meg. A algoritmushoz szükséges solver a MINOS. A futtatásokat egy 1,6 GHz AMD Sempron számítógépen végeztem.

A 7. táblázat különböző beállítások esetén mutatja meg az algoritmus futási eredményeit. Az első oszlop az elemszámot mutatja, a második pedig azt, hogy egy $p_i(\mathbf{x}^i)$ érték előállításához hány becslésnek vettem az átlagát (ismétlések száma). A harmadik oszlopban szerepelnek a $CVaR_{0,9}$ becslések

átlagai. Látható, hogy ha az elemszám kicsi, a *CVaR* becslés itt is lefelé torzít. Mivel a feladat 3 eszközt tartalmaz és két korlátot, ezért az eszközök közül csak egynek az értékét (arányát) lehet szabadon megválasztani, az algoritmus az első eszközt választja meg. Ennek átlagát mutatja a 7. táblázatban a negyedik oszlop. Az ötödik oszlop azt mutatja, hogy hány iteráció után áll le az algoritmus, a hatodik pedig a futáshoz szükséges idő másodpercben. Az átlagértékek alatt zárójelben a szórások szerepelnek.

Elemsszám	Ismétlés	<i>CVaR</i>	S&P 500	# Iteráció	Idő
100	100	0,09572 (0,00113)	0,45479 (0,01620)	4614 (1564)	16,6 (5,1)
100	1000	0,09536 (0,00036)	0,45234 (0,00828)	1924 (608)	60,4 (20,9)
100	10000	0,09542 (0,00012)	0,45230 (0,00398)	829 (251)	244,3 (73,9)
1000	100	0,09678 (0,00034)	0,45314 (0,00830)	1988 (610)	127,5 (39,1)
1000	1000	0,09683 (0,00012)	0,45178 (0,00389)	876 (211)	554,8 (134,1)
1000	10000	0,09682 (0,00004)	0,45216 (0,00200)	346 (140)	2189,1 (884,7)
10000	10	0,09691 (0,00039)	0,45388 (0,01036)	1914 (588)	858,1 (337,0)

7. táblázat. Futási eredmények – SRA algoritmus. Az első és második oszlop az optimalizáláshoz használt minta elemszámát és az ismétlések számát mutatja, a harmadik a *CVaR* becslések átlagát, a negyedik az optimalizálás során az S&P 500 eszköz optimális értékeinek átlagát, az ötödik a szükséges iterációk számának átlagát, a hatodik oszlop pedig az optimalizáláshoz szükséges idő átlagát másodpercben. Az átlagértékek alatt zárójelben a szórás szerepel.

A 7. táblázatból jól látszik, hogy az SRA algoritmus képes az optimalizálási feladat megoldására. A táblázatból jól látszik, hogy ha növeljük az ismétlések számát, vagy az elemszámot, akkor pontosabb eredményt kapunk. Jól látszik az a kettőség is, hogy ha az a célunk, hogy a *CVaR* értéket pontosan megkapjuk, akkor az elemszámot kell növelni, ha a viszont az optimális portfólió megtalálása a célunk, akkor kisebb elemszámot és több ismétlést kell választani.

Érdeemes a futási eredményeket a lineáris programozási algoritmus futási eredményeivel összehasonlítani. Az összehasonlításnál nem az azonos elemszámot kell összehasonlítani, hiszen más a tartalma az elemszámnak a két esetben. Sokkal szerencsésebb, ha úgy hasonlítjuk össze az eredményeket, hogy azonos futási idő alatt milyen pontosságot ér el az algoritmus. Például lineáris programozási feladat esetén 12500-as elemszám nagyjából ugyanannyi időt igényel, mint az SRA algoritmus 100 elemszámmal és 1000 ismétléssel. A vizsgált esetben a lineáris programozási feladat kisebb torzítással (0,09702 vs. 0,09536), de nagyobb szórással (0,00095 vs. 0,00036) becsüli a *CVaR* értéket. Az optimális portfólió megtalálásánál egyértelműen az SRA algoritmus a jobb. A lineáris programozási feladat esetében az optimális portfóliósúlyokat csak nagy szórással tudja meghatározni az algoritmus. Nagyobb elemszám választása viszont lényegesen meghosszabbítja a futási időt.

A közölt futási eredményekből messzemenő következtetéseket nem érdemes levonni, de annyit ki lehet jelenteni, hogy az SRA algoritmus versenyképes a Rockafellar és Uryasev ([12]) által felírt lineáris programozási feladattal.

6 Összefoglalás

Ebben a cikkben *CVaR* portfólió optimalizálási feladatot oldottam meg SRA algoritmussal. Numerikus futtatási adatok alapján kijelenthető, hogy az algoritmus képes elvégezni az optimalizálási feladatot és az is, hogy az algoritmus versenyképes a lineáris programozási feladatként való felírással.

Lehetséges továbblépési irány annak felhasználása, hogy az SRA algoritmus nem csak kétlépcsős sztochasztikus feladatok megoldására képes, hanem pl. valószínűséggel korlátozott feladatok megoldására is. Ez megnyitja az utat afelé, hogy az adatokban meglévő bizonytalanságot figyelembe vegyük az optimalizációnál.

Irodalom

1. F. Andersson, H. Mausser, D. Rosen, S. Uryasev (2001): Credit risk optimization with Conditional Value-at-Risk criterion. *Mathematical Programming, Series B*, 89, 273–291.
2. P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath (1998): Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* 9 no. 3, 203–228.
3. Deák I.(2001): Successive regression approximations for solving equations. *Pure Mathematics and Applications* 12, 25–50.
4. Deák I.(2002): Computing two-stage stochastic programming problems by successive regression approximations. In *Stochastic optimization techniques*, vol. 513 of Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Springer, Berlin, 91–102.
5. Deák I. (2004): Solving stochastic programming problems by successive regression approximations – numerical results. In *Dynamic stochastic optimization*, vol. 532 of Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Springer, Berlin, 209–224.
6. Deák I.(2006): Two-stage stochastic problems with correlated normal variables: computational experiences, *Annals of Operations Research*, 142, 79–97.
7. Fábíán Cs., Veszprémi A.(2007): Algorithms for handling CVaR-constraints in dynamic stochastic programming models with applications to finance. *The Journal of Risk* 10, 111–131.
8. A. Künzi-Bay, J. Mayer (2006): Computational aspect of minimizing conditional value-at-risk. *Computational Management Science* 3, 3–27.
9. W.-K. Mak, D. Morton, R. Wood (1999): Monte Carlo bounding techniques for determining solution quality in stochastic programs, *Operations Research Letters*, Volume 24, Number 1, 47–56.
10. G. Pflug (2000): Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk. In *Probabilistic constrained optimization* (ed. Uryasev), Kluwer, Dordrecht, 272–281.

11. Prékopa A.(1973): Contributions to the theory of stochastic programming. *Mathematical Programming*, Vol. 4, No. 1, 202-221.
12. T. Rockafellar, S. Uryasev (2000): Optimization of Conditional Value-At-Risk. *The Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, 21-41.
13. T. Rockafellar, S. Uryasev (2002): Conditional Value-at-Risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance* 26, 1443-71.

CVAR MINIMIZATION BY THE SRA ALGORITHM

The risk measure *CVaR* is becoming more and more popular in recent years. In this paper we use *CVaR* for portfolio optimization. We formulate the problem as a two-stage stochastic programming model. We apply the SRA algorithm, which is a recently developed heuristic algorithm, to minimizing *CVaR*.

TERMELÉSI ÉS SZOLGÁLTATÁSI FOLYAMATOK FELFUTÁSÁNAK MODELLEZÉSE¹

JÓNÁS TAMÁS – TÓTH ZSUZSANNA ESZTER
BME GTK

Vállalati folyamatokat vizsgálva arra kívánunk kísérletet tenni, hogy termelési és szolgáltatási folyamatok aggregált minőségi és megbízhatósági jellemzőinek változását a folyamatok felfutási időszakában modellezzük. A leszűkített, lineárisra visszavezetett logisztikus regressziós modell alkalmazása megteremti annak lehetőségét, hogy a technológia és a termelési kultúra termelési és szolgáltatási folyamatok felfutásában betöltött szerepét számszerűsítsük. Megközelítésünk lehetőséget nyújt a térben, illetve időben elkülönülő felfutási görbék kvantitatív összehasonlítására.

Kulcsszavak: aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók, logisztikus értékelés, szigmoid függvény, lineáris regresszió, tanulási görbe

1 Bevezetés

A tanulási görbét a szakirodalomban először Wright (1936) említi: a legyártott termékek számának a megduplázódásával az egyes darabok előállítására fordított idő egyenletesen csökken. A tanulási görbe tulajdonképpen matematikai kapcsolatot teremt valamely teljesítmény mérőszám (így pl. költség, minőség, ciklusidő) és a vállalat adott termék előállításához vagy adott szolgáltatás nyújtásához kapcsolódó tapasztalata között. A háború utáni időszakban a tanulási folyamattal kapcsolatos kutatások az egyes darabok előállítására fordított közvetlen munkaóra helyett az egy darabra jutó költségeket vagy árat vették alapul.

A legtöbb tanulási folyamattal kapcsolatos kutatás középpontjában az aggregált tanulási hatás meghatározása áll. Wright (1936) a kumulált outputot, Arrow (1962) és Sheshinski (1967) pedig a kumulált befektetéseket veszi alapul a tanulási hatás vizsgálatakor. Alchian (1959) és Hirschleifer (1962) különbséget tesz a kibocsátás sebessége, valamint a kibocsátás tervezett volumene között. Cooper és Charnes (1954), Rapping (1965), Sheshinski (1967), Fellner (1969), Stobaugh és Townsend (1975) a kumulált kibocsátás alternatívájaként vagy kiegészítőjeként az idővel foglalkoznak. A tanulási görbe gyakorlatban megvalósuló alakjával foglalkozó kutatások közül némelyek a lapos szakaszok létezését (Carr, 1946; Conway és Schultz, 1959; Baloff, 1966, 1971), mások az ún. Stanford-B hatást (Garg és Milliman, 1961), vagy a harmadfokú alakot (Carlson, 1973) vizsgálták. Az említett modellezési problémák azonban nem szorítják háttérbe azt az alapvető ténytet,

¹Beérkezett: 2010. február 9. E-mail: tothzs@mvt.bme.hu.

hogy az egyes üzemekben a tanulási ráták meglehetősen különbözőek lehetnek még akkor is, ha a termékek és a mérések hasonlóak (Alchian, 1959).

Számos tanulmány foglalkozik a berendezések cseréjének hatásával (pl. Arrow, 1962, Sheshinski, 1967), Hollander (1965) a nagyobb és kisebb jelentőségű technológiai változások szerepét kutatja, és néhány tanulmány az indirekt és direkt munkaerő tanulásra gyakorolt hatásait szemlélteti tőkeintenzív esetekben (pl. Andress, 1954, Hirshmann 1964). Conway és Schultz (1959) a tanulásra hatással lévő, a termelést megelőző műveleti fázisokban és a termelési folyamatokban szerepet játszó tényezőket veszi számba. Baloff (1970) olyan eseteket mutat be, ahol a technikai támogatás vagy a munkaerő motivációja hatással van a tanulási rátára. Hayes és Wheelwright (1984) a tényezők egy olyan csoportját gyűjtik össze, amellyel mind egyéni, mind pedig csoportos szinten ösztönözhető vagy éppen visszafogható a tanulás.

A minőségmenedzsment rendszerek és filozófiák folyamatos fejlesztésének elve a termelő és szolgáltató vállalatokat teljesítményük állandó javítására ösztönözi. E fejlődés vizsgálatára és nyomon követésére a tanulási görbe számos eszközt kínál. Zangwill és Kantor (1998) a folyamatos fejlesztés és a tanulási görbe közötti kapcsolatot ragadja meg, és egy olyan differenciálegyenletet mutatnak be, amelynek segítségével a menedzsment a különböző folyamatok eredményességét értékelni tudja és így az ipari folyamatok gyorsabb fejlesztése válik lehetővé. Megközelítésük szerint a tanulás ciklusokban megy végbe, az egyik ciklus végpontja a következő ciklus kiindulópontja, és minden egyes ciklus valamilyen „pazarlást” szüntet meg a termelési rendszerben, amely lehet hibás termék, a kihozatal csökkenése, elvesztegetett idő, a termelés lassulása vagy a készletek felhalmozása. Amikor egy vállalkozás egy új termékkel vagy szolgáltatással jelenik meg a piacon, szinte természetes a kísértés az eladási kapacitás mielőbbi felfuttatására, hiszen ez szükséges feltétele annak, hogy a vállalkozás gyorsan új vevőket hódítson meg (Leslie és Holloway, 2006; Zoltners et al., 2006). A tanulási görbe „bejárásának” sebessége stratégiai versenyelőnyt befolyásoló tényező, ráadásul a tanulás révén előálló versenyelőny belépési korlátot is jelenthet egy adott piacon (Lee, 1975; Spence, 1981).

A termékek életciklusának rövidülése és a magas fejlesztési költségek arra kényszerítik a vállalatokat, hogy ne csak a piacra jutás idejét, vagyis a fejlesztési időt, hanem az optimális kapacitásra való felfutás idejét is csökkentse. Az eladási kapacitás kívánt szintjének elérése a termelési, szolgáltatási folyamatok optimális kapacitásra történő felfuttatását igényli, így a vállalkozás versenyképességének egyik meghatározó tényezője a termelési, szolgáltatási folyamatok bevezetési, felfutási sebessége. A fejlesztés befejezése és az optimális kapacitáskihasználási szint elérése között a termelési folyamat alaposabb megértése folyik. Mindez kezdetben alacsony kihozattal és alacsony termelési rátával eredményez (mivel pl. a berendezések meghibásodnak, az átállások/beállítások még lassúak, speciális műveletek, beavatkozások szükségesek, az ellenőrzés módszerei fejlesztésre szorulnak stb.). Terwiesch és Bohn (2001) új termékek termelési folyamatának felfuttatása kapcsán vizsgálja a tanulás és a folyamatfejlesztés kapcsolatát, a tanulás felgyorsításával járó

költségeket, az optimális kapacitás eléréséig bekövetkező hibás termékek költségét és a hibák bekövetkezésének valószínűségét.

Az effektív termelési vagy szolgáltatási kapacitást a folyamatok jóságát meghatározó minőségi és megbízhatósági jellemzők nagymértékben befolyásolják (Koltai, 2006), így pl. a kihozatal, a termelés sebessége vagy a „jó”, vagyis minőségileg kifogástalan outputok száma e felfutási időszak fontos mérőszáma (Terwiesch és Bohn, 2001). Bohn és Terwiesch (1999) kutatása során arra az eredményre jut, hogy új termékek gyártásának felfuttatásakor a kihozatal alakulása nagyobb hatással van a vállalat nyereségére, mint az egy termékre jutó költségek.

Kutatásunk során vállalati folyamatokat vizsgálva arra kívántunk kísérletet tenni, hogy alkalmas regressziós függvények segítségével termelési és szolgáltatási folyamatok aggregált minőségi és megbízhatósági mutatóinak a folyamatok felfutási időszakában tapasztalható változását modellezzük. Bemutatjuk a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell alkalmazását olyan aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók változásának modellezésére, amelyek több mérés összesítése révén előálló mérési változóknak tekinthetők.

A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell alkalmazásával az esettanulmányokban példaként felhasznált aggregált minőségi és megbízhatósági mutatók változásának modellezését termékek és szolgáltatások bevezetése kapcsán kívánjuk elemezni azt feltételezve, hogy az aggregált mutató változása a folyamat javulásáról az adott technológiai és termelési kultúra által meghatározott változást, tanulási görbét szemléltet. Célunk olyan módszer kidolgozása volt, amely lehetővé teszi a technológia és a vállalati kultúra meghatározó szerepének szemléltetését és számszerűsítését, továbbá lehetőséget nyújt a tanulási görbék összehasonlítására is.

Kutatásunk a fentieknek megfelelően az alábbi hipotézisek vizsgálatára épül.

- 1. hipotézis: A leszűkített, lineárisra visszavezetett logisztikus regressziós modell alkalmazása lehetővé teszi, hogy termelési és szolgáltatási folyamatok aggregált minőségi és megbízhatósági jellemzőinek változását $R(t)$ a folyamatok felfutási időszakában modellezzük.*
- 2. hipotézis: E regressziós modell lehetővé teszi, hogy a technológia és a termelési kultúra termelési és szolgáltatási folyamatok felfutásában betöltött meghatározó szerepét számszerűsítsük.*
- 3. hipotézis: A megközelítés alkalmazásával a térben, illetve időben elkülönülő felfutási görbék kvantitatív összehasonlítása is megvalósítható.*

Cikkünk a következő tagolást követi: az analitikus háttérben (2. fejezet) bemutatjuk a logisztikus növekedés leírására alkalmazott logisztikus egyenletet és azt a függvényt, amelyet aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók növekedésének modellezésére alkalmazni kívánunk. A 3. fejezetben a korreláció- és regressziószámítás módszereire építve tárgyaljuk a kutatásunk során alkalmazott leszűkített, lineárisra visszavezetett regressziós modellt,

majd a 4. fejezetben e regressziós modell vállalati gyakorlati alkalmazásait mutatjuk be a *minőségi kihozatal*, a *Minutes per Unit* (MPU) és az *Overall Equipment Efficiency* (OEE) mutatókon keresztül. Végül összegezzük főbb eredményeinket és felvázoljuk a további kutatási lehetőségeket.

2 Analitikus háttér

Tekintsük valamely termelési vagy szolgáltatási folyamat egy jellemző aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutatóját, amelyet a továbbiakban jelöljünk R -rel. Azt kívánjuk vizsgálni, hogy ez a mutató a termelési vagy szolgáltatási folyamat bevezetése során hogyan változik a bevezetésre fordított t idő függvényében. Hangsúlyozzuk, hogy itt a bevezetésre fordított idő alatt azt a nettó időt értjük, amely kizárólag a folyamat bevezetése érdekében végzett tevékenységek végrehajtási idejével egyenlő. Tegyük fel, hogy a vizsgált mutató javulása annak növekedését jelenti. Látni fogjuk, hogy ez a megkötés nem megy az általánosság rovására, ugyanakkor segíti és egyszerűsíti a téma további tárgyalását. Tapasztalataink szerint a vizsgált mutató változási (növekedési) sebessége alapvetően attól függ, hogy a mutató a folyamat bevezetése során milyen szinten áll. Kezdetben, amikor a folyamattal kapcsolatos ismeretek és a műveletek végzéséhez szükséges készségek és tapasztalatok még csekélyek, a mutató változási sebessége is kismértékű és $R(t)$ értéke közel áll annak R_I kezdeti értékéhez. Amikor ezek az ismeretek, készségek és tapasztalatok elérnek egy bizonyos kritikusként mondható szintet, a vizsgált mutató változási sebessége felgyorsul. Egy idő után azonban, amikor a mutató értéke közelít ahhoz az értékhez, melyet a termelés vagy szolgáltatás technológiája, vagy valamilyen fizikai korlát meghatároz, a vizsgált mutató növekedési sebessége lelassul, majd egy adott R_T felső korláthoz közeli szinten stagnál.

2.1 Logisztikus növekedés

A fentiek alapján a mutató kicsiny $dR(t)$ változását a bevezetésre fordított idő függvényében úgy modellezhetjük, hogy $dR(t)$ arányos $R(t)$ kezdeti R_I -től és végső R_T -től mért eltéréssel. Ezt a

$$\frac{dR(t)}{dt} = \lambda_S [R(t) - R_I] [R_T - R(t)] \quad (1)$$

differenciálegyenlettel írhatjuk le, ahol $\lambda_S > 0$ az arányossági tényező. Mivel a vizsgált mutató növekedését feltételeztük, ezért $R_I \leq R(t) \leq R_T$. Az (1) differenciálegyenletet *logisztikus egyenletnek* nevezik. A logisztikus egyenletnek számos biológiai, kémiai, gazdasági és számítástudományi alkalmazása ismert. Alkalmazásának gyökerei egészen a 19. századig nyúlnak vissza, amikor Verhulst (1838) belga matematikus elsőként használta az egyenletet és segítségével populációk növekedését modellezte. Csaba (1978) az egyenlet egy biológiai alkalmazását mutatja be, Lewandowski (1974) pedig gazdasági területeken alkalmazza annak különböző változatait. Megjegyezzük, hogy a

logisztikus egyenlet segítségével konstruált, úgynevezett értékelő függvények szintén alkalmazhatók a megbízhatóság alapú menedzsmentben (Jónás és Kövesi, 2009).

Az általunk felvett (1) differenciálegyenlet a változók szétválasztása után az

$$\frac{1}{[R(t) - R_I][R(t) - R_T]} dR(t) = -\lambda_S dt \quad (2)$$

alakba írható, majd (2) bal oldalát parciális törtekre bontva az

$$\frac{1}{R_T - R_I} \left[\frac{1}{R(t) - R_T} - \frac{1}{R(t) - R_I} \right] dR(t) = -\lambda_S dt$$

egyenlethez jutunk. Az integrálás elvégzése után

$$\frac{1}{R_T - R_I} \left[\ln |R(t) - R_T| - \ln |R(t) - R_I| \right] = -\lambda_S t + C, \quad (3)$$

ahol C egy tetszés szerinti integrálási konstans. $R_I \leq R(t) \leq R_T$, így a (3) egyenletből

$$R(t) = \frac{R_T + R_I e^{(-\lambda_S t + C)(R_T - R_I)}}{1 + e^{(-\lambda_S t + C)(R_T - R_I)}}. \quad (4)$$

Ha az $R(t)$ függvénytől elvárjuk, hogy az a t_0 helyen az R_0 ($R_I < R_0 < R_T$) értéket vegye fel, akkor a (4) egyenlet és az $R(t_0) = R_0$ elvárás alapján

$$C = \lambda_S t_0 + \frac{1}{R_T - R_I} \ln \frac{R_T - R_0}{R_0 - R_I} \quad (5)$$

adódik, s a C -re kapott kifejezést $R(t)$ (4)-es alakjába írva

$$R(t) = S_{t_0, R_0, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + \frac{R_T - R_0}{R_0 - R_I} e^{-\lambda_S (t - t_0)(R_T - R_I)}}. \quad (6)$$

Az $R(t)$ függvény grafikonja egy olyan S-alakú görbe, mely aszimptotikusan simul az R_I kezdeti és R_T végső értékekhez. Az $S_{t_0, R_0, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t)$ jelöléssel a függvénygörbe alakjára, paramétereire, illetve arra utalunk, hogy ez a függvény az úgynevezett szigmoid függvény lineáris transzformáltja. Az $R(t)$ függvény az

$$R(t) = S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda_S (t - a)(R_T - R_I)}} \quad (7)$$

alakban is felírható, ha

$$a = t_0 + \frac{\ln \frac{R_T - R_0}{R_0 - R_I}}{\lambda_S (R_T - R_I)},$$

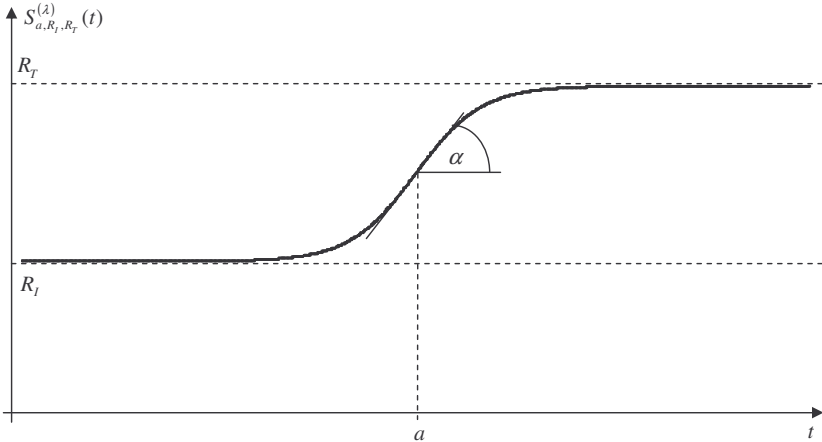
továbbá

$$R(t) = S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda_S)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda (t - a)}} \quad (8)$$

ha

$$\lambda = \lambda_S(R_T - R_I) .$$

A későbbiekben az $R(t)$ függvényt az $R(t) = S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ szerinti alakban fogjuk aggregált megbízhatósági és minőségi mutatók növekedésének modellezésére alkalmazni. Az 1. ábra egy $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény grafikonját mutatja.



1. ábra. Egy $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény grafikonja

Az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvényről könnyen beláthatók a következő tulajdonságai:

- $R_I < S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) < R_T$ és a függvény az R_I kezdeti, illetve R_T végső értékhez tart, ha t a negatív, illetve pozitív végtelenhez tart. (A függvény negatív t -kre vonatkozó vizsgálata természetesen csak egy elméleti lehetőség, hiszen t maga időt reprezentál.)
- A függvénygörbének inflexiósi pontja van a $t = a$ helyen, és a görbe meredeksége ezen a helyen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{4}(R_T - R_I)$ (1. ábra). Ez azt jelenti, hogy az a paraméter a görbe alakváltási helyét, míg λ az alakváltás meredekségét adja meg. ($\lambda \rightarrow \infty$ esetén a függvény az

$$S(t) = \begin{cases} R_I & , \text{ ha } t \leq a \\ R_T & , \text{ ha } t > a \end{cases}$$

karakterisztikus függvényhez tart.) A függvény λ paraméteréről eddig annak pozitív voltát feltételeztük. Ha $R_I > R_T$, akkor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{4}(R_T - R_I)$ alapján az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény grafikonja csökkenő S-görbét ír le, így segítségével csökkenési folyamatok is modellezhetők. Ezt az esettanulmányokról szóló részben fogjuk bemutatni.

Általánosan elmondható, hogy a fent vázolt logisztikus egyenlettel leírható növekedési folyamatok jelleggörbéi S-alakúak. Ilyen például egy technológia teljesítőképességének alakulása (Pataki, 1999), vagy a világegyetem komplexitásának változása (Modis, 2002).

$R_I = 0$ és $R_T = 1$ választása esetén az

$$S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}}$$

úgynevezett *szigmoid függvényt* kapjuk.

Megjegyezzük, hogy a logisztikus függvényen túl más S-alakú görbével rendelkező függvényformák is léteznek hasonló lefutású folyamatok modellezésére. Ilyen például a Gompertz görbe (Laird, 1964) vagy az általánosított Richards-féle logisztikus függvény (Lei és Zhang, 2004).

3 Regressziós modellek

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy termelési vagy szolgáltatási folyamat bevezetése során egy kiválasztott R aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutató n db R_1, R_2, \dots, R_n megfigyelt vagy mért értéke a t_1, t_2, \dots, t_n időpontokban. Ekkor általánosan elmondhatjuk, hogy a mért vagy megfigyelt $(t_i; R_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) összetartozó idő- és mutatóértékek alapján behatárolható egy olyan véges idő-, illetve mutatótartomány, mely az összes $(t_i; R_i)$ párt tartalmazza. Például, ha egy termék gyártásának bevezetése során a minőségi kihozatal heti értékeit az első tizenkét hétben vizsgáljuk, akkor az időtartomány lehet az $1, 2, \dots, 12$ sorszámú hetekből álló halmaz, míg a mutatótartomány lehet az első tizenkét hét során elért heti minimális és maximális minőségi kihozatal által meghatározott intervallum. Az eddigi jelölésekkel összhangban, az időtartomány kezdő-, illetve végpontját t_S -sel, illetve t_E -vel, míg a mutatótartomány minimum értékét R_I -vel, maximumát pedig R_T -vel jelöljük. Az R_I jelöléssel a mutató kezdeti (Initial), míg az R_T jelöléssel a mutató végső (Terminal) vagy cél (Target) értékére kívánunk utalni.

A következő fejezetekben bemutatjuk azt a korreláció- és regressziószámításra épülő modellt, amelynek segítségével a $(t_i; R_i)$ párokra az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ logisztikus függvény ráilleszthető, továbbá ismertetni kívánjuk a modell gyakorlati alkalmazásai során szerzett tapasztalatainkat, majd összegezzük következtetéseinket.

3.1 A logisztikus (szigmoid) modell

E modell alkalmazásának lényege abban áll, hogy a vizsgált R mutató logisztikus növekedését feltételezzük az idő függvényében, ezért a $(t_i; R_i)$ párokra az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvényt próbáljuk illeszteni, azaz azt feltételezzük, hogy

$$R(t) = S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}} \quad (9)$$

A rendelkezésre álló R_1, R_2, \dots, R_n értékekből $R_I = \min\{R_i\}$ és $R_T = \max\{R_i\}$ választása mellett az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény R_I és R_T paraméterei

adottak, a λ és a paramétereket pedig a legkisebb négyzetek elvének megfelelően úgy kell meghatározni, hogy a

$$\sum_{i=1}^n \left[R_i - \left(R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right) \right]^2 \quad (10)$$

négyzetösszeg minimális legyen.

A (9) egyenletet az

$$\frac{R(t) - R_I}{R_T - R_I} = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}} \quad (11)$$

alakba írva, és bevezetve az

$$y(t) = \frac{R(t) - R_I}{R_T - R_I}$$

változót az

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}} \quad (12)$$

szigmoid függvény adódik. Az $y(t)$ függvényt a $(t_i; y_i)$ pontokra kívánjuk illeszteni, ahol

$$y_i = \frac{R_i - R_I}{R_T - R_I}.$$

Az $y(t)$ függvény λ és a paramétereit a legkisebb négyzetek módszere szerint a

$$f(\lambda, a) = \sum_{i=1}^n \left[y_i - \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right]^2$$

négyzetösszeg minimalizálásával határozhatjuk meg. Belátható, hogy ez akkor minimális, ha az

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial a} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

egyenlőségek teljesülnek. A fenti egyenletrendszer megoldása adja λ , illetve a azon $\hat{\lambda}$, illetve \hat{a} becsléseit, melyek mellett az $y(t)$ függvény a legkisebb négyzetek elvének értelmében a legjobban illeszkedik a $(t_i; y_i)$ ponthalmazra. A parciális deriválásokat elvégezve a (13) normálegyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n e^{-\lambda(t_i - a)} (t_i - a) \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right]^2 \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} - y_i \right] = 0 \\ \frac{\partial f(\lambda, a)}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n -\lambda e^{-\lambda(t_i - a)} \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} \right]^2 \left[\frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - a)}} - y_i \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Sajnos a (14) egyenletrendszer az ismeretlenekben nem lineáris, ezért megoldása meglehetősen nehéz. McCullagh és Nelder (1989) egy iteratív, a súlyozott legkisebb négyzetek elvére épülő eljárást mutat be az egyenletrendszer megoldására.

3.2 A logisztikus regresszió visszavezetése lineáris regresszióra

A (12) függvény paraméterei úgy is meghatározhatók, hogy a függvényt először egy alkalmas transzformációval lineáris függvénné transzformáljuk, majd a transzformációval kapott új paraméterek becsléseit a lineáris regresszió jól ismert módszerével határozzuk meg. Ezt követően a λ és a paraméterek becslései már könnyen megadhatók. Látni fogjuk, hogy ez a módszer csak bizonyos korlátokkal alkalmazható, de mivel e korlátok a gyakorlati alkalmazás szempontjából nem jelentenek lényeges megkötéseket, illetve a lineáris regresszióra visszavezetett módszer jóval egyszerűbb, mint a (14) normálegyenletek megoldása, ezért a következőkben e módszer alkalmazását mutatjuk be. Mivel $R_I \leq R(t) \leq R_T$, így a (3) egyenletből

$$\frac{R_T - R_I}{R(t) - R_I} = 1 + e^{-\lambda(t-a)},$$

majd rendezés után

$$\frac{R_T - R(t)}{R(t) - R_I} = e^{-\lambda(t-a)},$$

adódik. $R(t) < R_T$, így ez utóbbi egyenlet mindkét oldalának természetes alapú logaritmusát véve az

$$\ln \frac{R_T - R(t)}{R(t) - R_I} = -\lambda t + \lambda a$$

egyenlet adódik, mely az

$$Y(t) = \ln \frac{R_T - R(t)}{R(t) - R_I}, \quad \beta_1 = -\lambda, \quad \beta_0 = \lambda a$$

helyettesítések alkalmazásával az

$$Y(t) = \beta_1 t + \beta_0 \tag{15}$$

lineáris függvényt eredményezi. Ez azt jelenti, hogy ha feltételezhető, hogy a $(t_i; R_i)$ pontokra egy $S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda)}(t)$ logisztikus függvény illeszkedik, akkor a $(t_i; Q_i)$ transzformált pontokra a (15) lineáris függvény illeszkedik, ahol Q_i a

$$Q_i = \ln \frac{R_T - R_i}{R_i - R_I} \tag{16}$$

transzformáció eredménye minden olyan $(t_i; R_i)$ pontra, melyre $R_i \neq R_I$ és $R_i \neq R_T$.

E módszer előnye abban áll, hogy a (15) lineáris függvény β_0 és β_1 paramétereinek becslései a lineáris regresszió jól ismert módszerével könnyen megadhatók. Ugyanakkor, mivel R_I -t, illetve R_T -t a szóban forgó mutató mért vagy megfigyelt minimum, illetve maximum értékeinek választottuk, —azaz $R_I = \min\{R_i\}$ és $R_T = \max\{R_i\}$ — ezért a (16) transzformáció

nem alkalmazható azokra a $(t_i; R_i)$ pontokra, amelyekre $R_i = \min\{R_i\}$ vagy $R_i = \max\{R_i\}$. Éppen ezért a lineáris regressziót az $m < n$ elemű

$$S^* = \{(t_i; R_i) \mid R_i \neq R_I, R_i \neq R_T\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

leszűkített halmazból transzformált

$$S^{(T)} = \{(t_i; Q_i) \mid Q_i = \ln \frac{R_T - R_i}{R_i - R_I}, R_i \neq R_I, R_i \neq R_T\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

halmazára fogjuk alkalmazni. Ezt a módszert *lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziónak* nevezzük, és az $Y(t)$ függvény β_0 , illetve β_1 együtthatóinak $\hat{\beta}_0$, illetve $\hat{\beta}_1$ becsléseit az $S^{(T)}$ halmaz, mint minta alapján határozzuk meg. A továbbiakban jelölje I_S az S halmaz, I_{S^*} az S^* , míg $I_{S^{(T)}}$ a transzformált $S^{(T)}$ halmaz elemeinek indexhalmazát (S^* és $S^{(T)}$ konstrukciója miatt $I_{S^*} = I_{S^{(T)}}$). Ekkor

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i \in I_{S^{(T)}}} d_{t_i} d_{Q_i}}{\sum_{i \in I_{S^{(T)}}} d_{t_i}^2} \quad (17)$$

és

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Q} - \hat{\beta}_1 \bar{t} \quad (18)$$

ahol d_{t_i} , d_{Q_i} , \bar{Q} és \bar{t} a

$$d_{t_i} = t_i - \bar{t}, \quad d_{Q_i} = Q_i - \bar{Q}, \quad \bar{t} = \frac{1}{m} \sum_{i \in I_{S^{(T)}}} t_i, \quad \bar{Q} = \frac{1}{m} \sum_{i \in I_{S^{(T)}}} Q_i$$

összefüggésekkel számíthatók (Hunyadi és Vita, 2004). $\hat{\beta}_0$ és $\hat{\beta}_1$ ismeretében pedig a λ és a paraméterek becslései

$$\hat{\lambda} = -\hat{\beta}_1 \quad (19)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\lambda}} = -\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1} \quad (20)$$

Vizsgáljuk meg részletesebben, hogy mit is jelent az, hogy a logisztikus regressziós modell paramétereit az S halmaz elemei helyett az $S^{(T)}$ halmaz elemei alapján kellett becsülnünk.

Ha az S halmazban lévő pontokra egy logisztikus függvény jól illeszkedik, akkor mivel a függvény a vizsgált időtartomány elején, illetve végén az R_I , illetve R_T értékekhez simul, így a leszűkített S^* halmazból csak kevés, jellemzően az eredeti $(t_1; R_1)$, $(t_2; R_2)$, \dots , $(t_n; R_n)$ adatsorozat első egy-két, és utolsó egy-két nem transzformálható eleme marad ki, ezért S^* számoossága lényegesen nem kisebb, mint S számoossága. Másrésről, a kimaradó első egy-két, illetve utolsó egy-két elem az, amelynek ordinátája R_I -vel, illetve R_T -vel egyenlő. Mivel a függvény pontosan ezekhez az értékekhez simul a vizsgált időtartomány elején, illetve végén, ezért az S^* halmazból transzformált $S^{(T)}$

halmaz alapján —a lineáris regresszió segítségével— meghatározott logisztikus regressziós függvény helyettesítési értékei a kimaradó t_i helyeken jó közelítéssel az R_I , illetve R_T értéket veszik fel aszerint, hogy i az adatsor elején, illetve végén helyezkedik el.

Annak ellenőrzésére, hogy a kapott regressziós függvény mind az S^* , mind az S halmaz elemeihez jól illeszkedik, azt ajánljuk, hogy az illeszkedés jóságát jellemző korrelációs indexet mind az S^* , mind pedig az S halmaz elemei alapján számítsuk ki. Ha \hat{R}_i jelöli a regressziós függvény helyettesítési értékét a t_i helyen, azaz

$$\hat{R}_i = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t_i - \hat{a})}},$$

akkor az S és az S^* ponthalmazok alapján számított r_S és r_{S^*} korrelációs indexek Balogh et al. (1980) alapján rendre a következők:

$$r_S = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i \in I_S} (R_i - \hat{R}_i)^2}{\sum_{i \in I_S} (R_i - \bar{R}_S)^2}} \quad (21)$$

$$r_{S^*} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i \in I_{S^*}} (R_i - \hat{R}_i)^2}{\sum_{i \in I_{S^*}} (R_i - \bar{R}_{S^*})^2}}, \quad (22)$$

ahol \bar{R}_S , illetve \bar{R}_{S^*} az S , illetve S^* halmazokban lévő R_i mutatóértékek számtani közepe.

A $\hat{\beta}_0$ és $\hat{\beta}_1$ valamint a $\hat{\lambda}$ és \hat{a} értékeket egy $S^{(T)}$ minta alapján számítottuk, ezért ezek a becslések mintáról mintára változnak, vagyis valószínűségi változóként viselkednek. A gyakorlatban szükségünk lehet arra, hogy két különböző folyamat azonos aggregált mutatójának növekedését összehasonlítsuk. Gondoljunk például arra, hogy ugyanazon termék gyártását egy vállalat több üzemében is bevezetik. Ez esetben hasznos lehet annak vizsgálata, hogy a különböző üzemekhez tartozó felfutási görbék mennyire hasonlítanak egymásra, mennyire tekinthetők azonosnak. Erre a célra érdemes a lineáris regresszió együtthatóira vonatkozó konfidencia intervallumok ismert összefüggései alapján a transzformált függvény β_0 és β_1 együtthatóinak konfidencia intervallumait meghatározni, majd ezek segítségével összehasonlítani a felfutási görbéket. A β_0 -ra és β_1 -re vonatkozó $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallumok a következő összefüggésekkel számíthatók (Kerékyártóné és Mundruczó, 1996):

$$P\left[\hat{\beta}_0 - t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_0} < \beta_0 < \hat{\beta}_0 + t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_0}\right] = 1 - \alpha \quad (23)$$

$$P\left[\hat{\beta}_1 - t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_1} < \beta_1 < \hat{\beta}_1 + t_{m-2}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\hat{\beta}_1}\right] = 1 - \alpha \quad (24)$$

ahol

$$\sigma_{\hat{\beta}_0} = \sigma_e \sqrt{\frac{\sum_{i \in I_{S(T)}} t_i^2}{m \sum_{i \in I_{S(T)}} d_{t_i}^2}}, \quad \sigma_{\hat{\beta}_1} = \sigma_e \frac{1}{\sqrt{\sum_{i \in I_{S(T)}} d_{t_i}^2}},$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i \in I_{S(T)}} (Q_i - \hat{Q}_i)^2}{m - 2}}$$

$\sigma_{\hat{\beta}_0}$ és $\sigma_{\hat{\beta}_1}$ a becslt paraméterek standard hibái, σ_e a vizsgált mutató lineáris transzformáltja szórásának becslése,

$$\hat{Q}_i = \beta_1 t_i + \beta_0$$

a linearizált regressziós függvény helyettesítési értéke a t_i helyen,

$$t_{m-2}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

pedig az $m - 2$ szabadságfokú t -eloszlás inverzének helyettesítési értéke az $1 - \alpha/2$ helyen.

$$\beta_1 = -\lambda \quad \text{és} \quad \beta_0 = \lambda a,$$

így a (24), illetve (23) konfidencia intervallumok $-\lambda$ -ra, illetve a λa szorzatra, mint valószínűségi változókra vonatkoznak. Megjegyezzük, hogy a λ -ra és az a -ra vonatkozó konfidencia intervallumok becslése szintén lehetséges, de nehezebb, mint a β -kra vonatkozó intervallumoké. A konfidencia intervallumokat alapvetően összehasonlítási célra szeretnénk használni, ehhez pedig elegendő a —könnyebben meghatározható— β -kra vonatkozó intervallumokat összevetni.

3.3 A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió módszere

Röviden összefoglaljuk a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió módszerét.

Alapfeltételezés

Az $R(t)$ aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutató értéke a termék vagy szolgáltatás bevezetése során a bevezetésre fordított t idő függvényében az

$$R(t) = S_{a, R_I, R_T}^{(\lambda)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}}$$

alakú logisztikus függvénnyel írható le. Megjegyezzük, hogy egyik célunk éppen e feltételezés empirikus igazolása.

Bemenet

Az R aggregált minőségi vagy megbízhatósági mutatóra végzett független megfigyelések vagy mérések eredményeként adódó $S = \{ (t_1; R_1), (t_2; R_2), \dots, (t_n; R_n) \}$ rendezett párokból álló minta, melyben minden $(t_i; R_i)$ párban R_i a mutató megfigyelt vagy mért értéke a t_i időpontban.

Kimenet

Az

$$S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\lambda(t-a)}}$$

függvény λ , a , R_I és R_T paramétereinek olyan becslése, amelyek mellett a függvény leginkább illeszkedik az $S = \{(t_1; R_1), (t_2; R_2), \dots, (t_n; R_n)\}$ pont-halmazra.

Módszer

1. Legyen $R_I = \min\{R_i\}$ és $R_T = \max\{R_i\}$, illetve $R_I = \max\{R_i\}$ és $R_T = \min\{R_i\}$ aszerint, hogy növekedő, illetve csökkenő trendet mutatnak az R_1, R_2, \dots, R_n értékek. Ezzel az $S_{a,R_I,R_T}^{(\lambda)}(t)$ függvény R_I és R_T paramétereit adtuk.
2. Képezzük az $R_i = R_I$ és $R_i = R_T$ mutató értékekkel rendelkező pontokat nem tartalmazó $S^* = \{(t_i; R_i) \mid R_i \neq R_I, R_i \neq R_T\}$ halmazt ($i = 1, 2, \dots, n$).
3. S^* minden $(t_i; R_i)$ elemére hajtsuk végre a $Q_i = \ln \frac{R_T - R_i}{R_i - R_I}$ transzformációt, és képezzük az $S^{(T)} = \{(t_i; Q_i)\}$ párokból álló halmazt.
4. Az $S^{(T)}$ minta alapján, lineáris regresszió segítségével határozzuk meg az $Y(t) = \beta_1 t + \beta_0$ függvény β_0 , illetve β_1 együtthatóinak $\hat{\beta}_0$, illetve $\hat{\beta}_1$ becsléseit, majd a

$$\hat{\lambda} = -\hat{\beta}_1 \quad \text{és} \quad \hat{a} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\lambda}} = -\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$$

összefüggésekkel számítsuk ki a λ , illetve a paraméterek $\hat{\lambda}$, illetve \hat{a} becsléseit.

5. A kapott

$$S_{\hat{a},R_I,R_T}^{(\hat{\lambda})}(t) = R_I + (R_T - R_I) \frac{1}{1 + e^{-\hat{\lambda}(t-\hat{a})}}$$

függvény S , illetve S^* halmazra történő illeszkedése jószágának meghatározásához számítsuk ki a (21), illetve (22) képletek szerinti r_S , illetve r_{S^*} korrelációs indexeket.

6. Logisztikus felfutási görbék összehasonlítása céljából a (23), illetve (24) összefüggések felhasználásával határozhatjuk meg a β_0 , illetve β_1 együtthatókra vonatkozó konfidencia intervallumokat.

4 Esettanulmányok

Ebben a fejezetben vállalati gyakorlatból gyűjtött adatsorokon mutatjuk be a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell alkalmazását.

4.1 Minőségi kihozatal változása egy elektronikai termék gyártásának bevezetése során

Egy felületszerelési technológiával összeszerelt nyomtatott áramkör (*Printed Circuit Board Assembly* (PCBA)) tesztelése egy úgynevezett belső áramköri teszt (*In-Circuit Test* (ICT)) segítségével történt. A szóban forgó nyomtatott áramkör egy Set Top Box² termék alapját képezi, a belső áramköri teszt feladata pedig annak eldöntése, hogy a PCBA gyártási folyamata során a nyomtatott áramköri lapra szerelt elektronikai alkatrészek megfelelnek-e az előírt specifikációknak. E teszt sikeressége esetén kerül sor a PCBA késztermékbe történő beépítésére. Kutatásunk során azt vizsgáltuk, hogy a belső áramköri teszt minőségi kihozatala hogyan változott a termék gyártásának bevezetése során. Ehhez a gyártás indításától számított első 15 hét során a heti minőségi kihozatalt, azaz az

$$R = \frac{\text{ICT teszten megfelelt termékek száma}}{\text{ICT teszten átesett termékek száma}} * 100$$

mutatót tekintettük aggregált minőségi mutatónak. A termelés egy műszakban indult el, ezen első műszak minőségi kihozatalát mutatja az 1. táblázat.

Hét (t_i)	Minőségi kihozatal (%) (R_i)
1	53,12
2	54,28
3	55,13
4	58,92
5	62,27
6	66,98
7	73,89
8	84,97
9	88,23
10	89,76
11	92,05
12	94,13
13	95,19
14	95,08
15	95,21

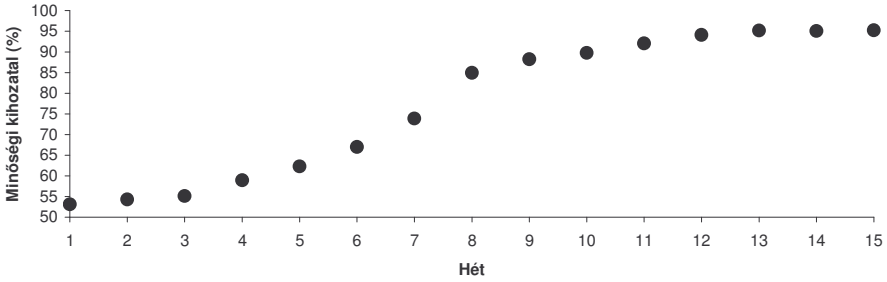
1. táblázat. A minőségi kihozatal időbeli változása

Az eddig alkalmazott jelöléseknek megfelelően az S minta az

(1; 53,12), (2; 54,28), (3; 55,13), (4; 58,92), (5; 62,27), (6; 66,98), (7; 73,89), (8; 84,97), (9; 88,23), (10; 89,76), (11; 92,05), (12; 94,13), (13; 95,19), (14; 95,08), (15; 95,21)

($t_i; R_i$) ($i = 1, 2, \dots, 15$) párokat tartalmazza (ahol azt külön nem jelezzük, ott az i index 1-től 15-ig fut). A minőségi kihozatal százalékos értékeit % jel nélkül, mint 0 és 100 közötti értékeket tekintjük. A 2. ábra a ($t_i; R_i$) pontokat mutatja egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva.

²Digitális, kábeles és műholdas TV szolgáltatások dekódolására és analóg jellé alakítására szolgáló eszköz, mely lehetővé teszi e szolgáltatások hagyományos, analóg TV készüléken történő elérését.



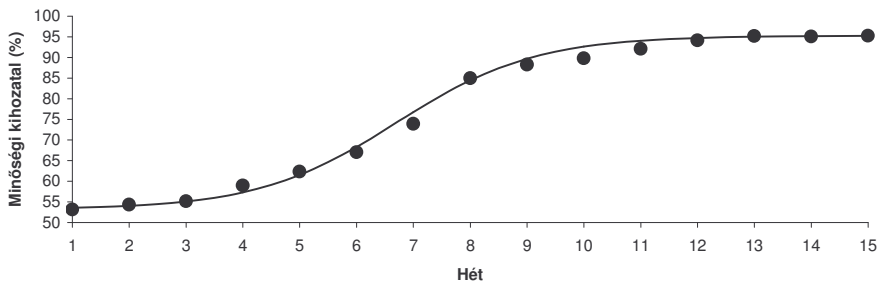
2. ábra. A minőségi kihozatal változása az idő (hetek) függvényében

A 2. ábrán látható pontfelhő S-alakú formája alapján feltételeztük, hogy a minőségi kihozatal és a termék bevezetésére fordított idő között logisztikus függvény szerinti sztochasztikus kapcsolat van. A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió alkalmazásának eredményeként előálló logisztikus regressziós függvény becsült paramétereit, a korrelációs indexek értékeit, valamint a β paraméterekre vonatkozó 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallum végpontjait a 2. táblázatban foglaltuk össze. A konfidencia intervallum bal, illetve jobb végpontjaira az L (Low), illetve H (High) indexekkel utaltunk. Alkalmazva tehát a 3.3-as fejezetben összefoglalt módszereket, az alábbi értékeket kapjuk.

Paraméter	Paraméter értéke
$\hat{\beta}_1$	-0,821
$\hat{\beta}_0$	5,505
$\hat{\lambda}$	0,821
\hat{a}	6,705
r_S	0,997
r_{S^*}	0,996
$\beta_{0,L}$	4,214
$\beta_{0,H}$	6,793
$\beta_{1,L}$	-0,966
$\beta_{1,H}$	-0,676

2. táblázat. A regressziós modell számított paramétereit

A 3. ábra a minőségi kihozatal értékek időbeli változását és az azt közelítő logisztikus regressziós függvény grafikonját mutatja.



3. ábra. Logisztikus regresszió

4.2 További két műszak indítása, műszakok összehasonlítása

A lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió biztató eredményei után azt vizsgáltuk, hogy az első műszak indítása után három, illetve újabb két héttel később indított műszakokban hogyan alakult a belső áramköri teszt minőségi kihozatala. Célunk az volt, hogy a logisztikus regresszió segítségével nyert közelítő függvények paramétereit összevevük. Mindhárom műszakban az első 15 hét eredményeit tekintettük, ezeket foglaltuk össze a 3. táblázatban.

Ha a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regresszió ismertetett módszerét alkalmaznánk külön-külön az egyes műszakok mintáira, akkor az R_I , illetve R_T értékeket a megfelelő minta minimális, illetve maximális R_i értékének választanánk. Mivel ezek a minimumok, illetve maximumok mintáról-mintára különbözőek lehetnek, így ez azt eredményezhetné, hogy a minőségi kihozatalok időbeli változását más-más tartományban vizsgálnánk és a regressziós függvények becslt paramétereinek összehasonlítása nem lenne konzisztens. Példánkban az első műszakhoz az $R_I = 53,12$ és $R_T = 95,21$ értékeket választanánk (ahogy tettük ezt korábban is), míg a második műszak esetén az $R_I = 59,46$ és $R_T = 95,31$ értékeket alkalmaznánk, a harmadik műszak esetén pedig az $R_I = 58,32$ és $R_T = 95,38$ értékeket használnánk.

Hét	Minőségi kihozatal (%)		
	1. műszak	2. műszak	3. műszak
1	53,12	59,46	58,32
2	54,28	62,13	62,65
3	55,13	63,26	63,81
4	58,92	65,97	64,87
5	62,27	70,08	71,29
6	66,98	77,88	76,83
7	73,89	86,31	87,44
8	84,97	91,71	92,11
9	88,23	93,32	93,84
10	89,76	93,78	93,75
11	92,05	95,31	94,88
12	94,13	95,27	95,29
13	95,19	95,19	94,78
14	95,08	94,89	95,13
15	95,21	95,07	95,38

3. táblázat. A minőségi kihozatal alakulása két további műszakban

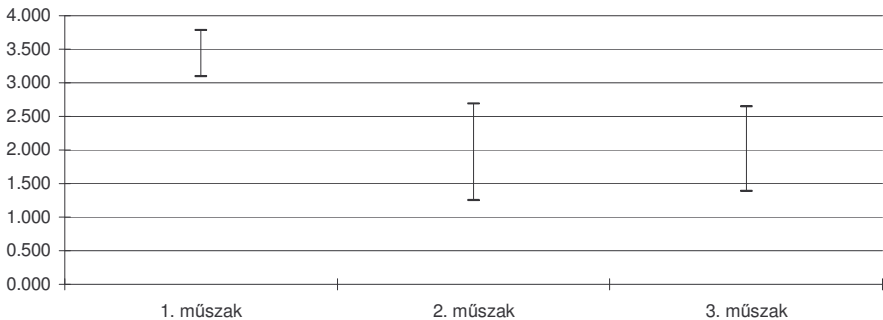
Ezért rögzítenünk kell a regressziós függvények közös R_I és R_T paramétereit és az egyes mintákra e közös értékek mellett kell alkalmaznunk az ismertetett módszereket. Az egyszerűség kedvéért, konkrét esetünkben, legyen $R_I = 50$ és $R_T = 96$. A választás lényege az, hogy az összes minta minden mutatóértéke a kiválasztott két érték közé essen. Érdeemes megjegyezni, hogy ha R_I az összes minta minden mutatóértékénél kisebb és R_T az összes minta minden mutatóértékénél nagyobb, akkor az egyes műszakok adataihoz tartozó S és S^* halmazok azonosak lesznek, és így az r_S és r_{S^*} korrelációs indexek is mintánként egyenlők.

Paraméter	1. műszak	2. műszak	3. műszak
$\hat{\beta}_1$	-0,532	-0,459	-0,465
$\hat{\beta}_0$	3,441	1,970	2,012
$\hat{\lambda}$	0,532	0,459	0,465
\hat{a}	6,469	4,291	4,325
Korrelációs index	0,996	0,980	0,980
$\hat{\beta}_{0,L}$	3,097	1,250	1,381
$\hat{\beta}_{0,H}$	3,785	2,690	2,644
$\hat{\beta}_{1,L}$	-0,570	-0,538	-0,535
$\hat{\beta}_{1,H}$	-0,494	-0,380	-0,396

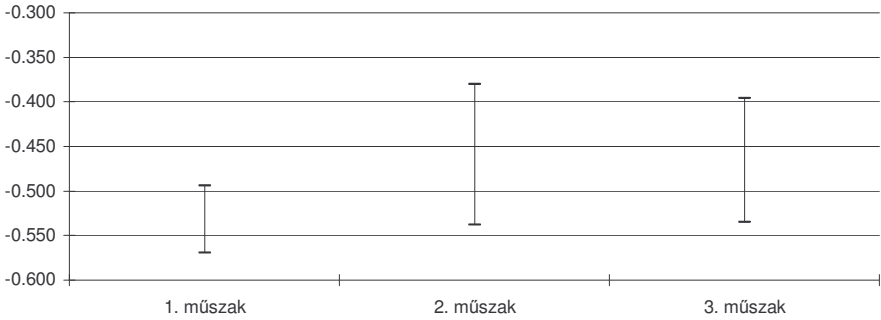
4. táblázat. A logisztikus regressziós modell paramétereit a vizsgált három műszakra

A 4. táblázatban összefoglaltuk az egyes műszakhoz tartozó minták alapján konstruált logisztikus regressziós függvények becsült paramétereit, valamint a β_0 -ra és β_1 -re kiszámított 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumokat, melyek bal, illetve jobb végpontjaira a korábban bevezetett jelölésnek megfelelően az L (*Low*), illetve H (*High*) indexekkel utaltunk.

A korrelációs indexek magas értékei alátámasztják a logisztikus regressziós modell alkalmazásának jogosultságát. A regressziós függvények becsült paramétereit, valamint a β_0 -ra és β_1 -re kiszámított konfidencia intervallumok alapján azt mondhatjuk, hogy az első műszak felfutása különbözik a második, illetve harmadik műszakétól, ugyanakkor ez utóbbi kettő felfutása nagyon hasonlónak mondható. Az a paraméterek becsült értékei alapján azt láthatjuk, hogy az első műszak felfutási görbéjének meredekebb szakasza később kezdődik, mint a második és harmadik műszaké. Ennek háttérében az a természetes jelenség áll, hogy a második műszak indításakor már lényegesen több technológiai ismeret állt rendelkezésre, mint az első műszak indításakor. A második és harmadik műszakhoz tartozó felfutási görbék hasonlósága arra enged következtetni, hogy közel azonos technológiai szint, azaz közel azonos műszaki infrastruktúra és hozzá kapcsolódó ismeretszint esetén a minőségi kihozatal növekedése a termelés bevezetése során nagyjából azonos görbét ír le. Ezt a következtetésünket támasztja alá az, hogy a második és harmadik műszak esetében a β_0 , illetve β_1 paraméterekre kapott konfidencia intervallumok jelentősen átlapolódnak, ahogy ez a 4. és 5. ábrán is látható.



4. ábra. A β_0 paraméterekre vonatkozó konfidencia intervallumok



5. ábra. A β_1 paraméterekre vonatkozó konfidencia intervallumok

4.3 MPU mutató változása egy elektronikai termék javítási folyamatának bevezetése során

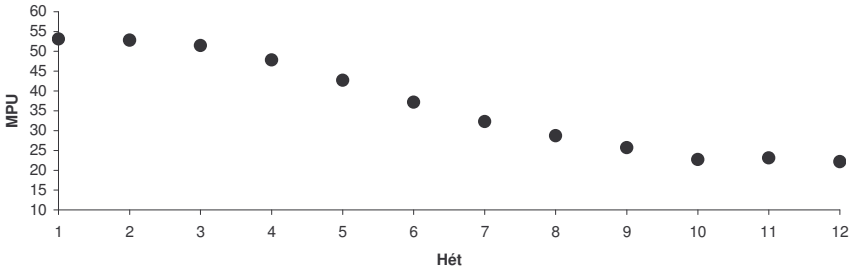
Általánosan elmondható, hogy elektronikai termékek javítási folyamatai jóval kevésbé automatizálhatók, mint azok gyártási folyamatai, így a javítási műveletek költségei — ezeken keresztül a szolgáltatások árai — nagyfokú érzékenységet mutatnak a felhasznált élömunkára. Széles körben alkalmazott a javítási műveletek elvégzéséhez szükséges élömunka mennyiségének az úgynevezett *Minutes Per Unit* (MPU) mutató segítségével történő mérése. Ez a mutató a szolgáltatásba épülő emberi munkaidő egy termékre vetített értékét méri percben kifejezve. Jelen példánkban azokat a tapasztalatainkat összegezzük, amelyeket egy fogyasztói elektronikai termék javításával foglalkozó termelési tevékenység aggregált MPU értékének változásával kapcsolatban a javítási folyamat bevezetése során az első három hónapban (12 hét) szereztünk. Az MPU értéket heti szinten aggregáltuk az

$$\text{MPU} = \frac{\text{heti összes humán munka}}{\text{heti összes javított egység száma}}$$

összefüggés szerint. A javítási folyamat első 12 hetében mért aggregált MPU értékeket az 5. táblázat tartalmazza.

Hét (t_i)	MPU (R_i)
1	53,1
2	52,8
3	51,5
4	47,8
5	42,7
6	37,2
7	32,3
8	28,7
9	25,7
10	22,7
11	23,1
12	22,2

5. táblázat. Az MPU mutató alakulása az idő (hetek) függvényében



6. ábra. Heti MPU értékek az első 12 hétben

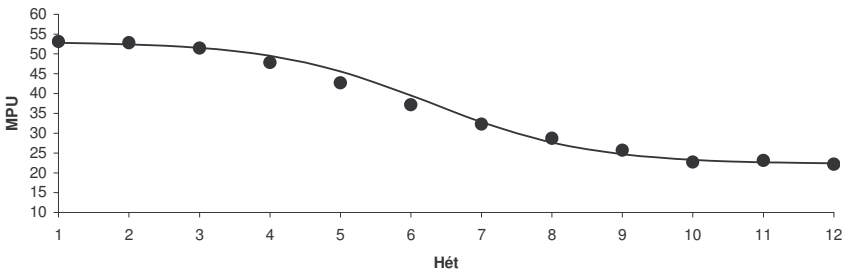
A 6. ábra grafikonja az aggregált MPU értékeket mutatja az idő függvényében.

Az ábrán látható pontfelhő azt sugallja, hogy érdemes az MPU mutató értékének időbeli változását a logisztikus regressziós modellel jellemezni. Az eddigiekhez képest a fő különbség az, hogy itt a mért mutató értékei csökkenő tendenciát mutatnak, $R_I = 53,1$ és $R_T = 22,2$. A számítások részletezése nélkül, a logisztikus regressziós függvény becsült paramétereit, a korrelációs indexek értékeit, valamint a β paraméterekre vonatkozó 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumokat a 6. táblázatban foglaltuk össze. (A táblázatban a korábban bevezetett jelöléseket alkalmaztuk.)

Paraméter	Paraméter értéke
$\hat{\beta}_1$	-0,892
$\hat{\beta}_0$	5,597
$\hat{\lambda}$	0,892
\hat{a}	6,277
r_S	0,994
r_{S^*}	0,992
$\beta_{0,L}$	4,593
$\beta_{0,H}$	6,601
$\beta_{1,L}$	-1,033
$\beta_{1,H}$	-0,750

6. táblázat. A regressziós modell számított paramétereit

A korrelációs együttthatók magas értékei, valamint a 7. ábrán látható grafikon azt igazolják, hogy regressziós modellünk nagy pontossággal illeszkedő görbét eredményez.



7. ábra. Logisztikus regresszió az aggregált MPU időbeli alakulására

4.4 OEE mutató változása egy gyártási folyamat bevezetése során

Egy elektronikai termék gyártási folyamatának bevezetése során, 15 héten keresztül végeztünk méréseket a teljes gyártósor *Overall Equipment Efficiency* (OEE) mutatójára vonatkozóan. Az OEE mutató a rendelkezésre állási (A)-, a teljesítmény (P)- és a minőségi mutató (Q) szorzataként áll elő (Hansen, 2001; Nakajima, 1988), ahol

$$A = \frac{\text{terhelési idő} - \text{állásidő}}{\text{terhelési idő}} \quad P = \frac{\text{kimenet} \times \text{ideális ciklusidő}}{\text{működési idő}}$$

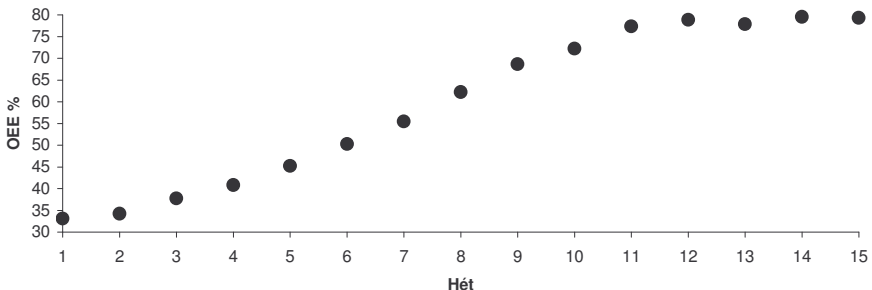
$$Q = \frac{\text{gyártott jó termékek száma}}{\text{gyártott termékek száma}}$$

Hét (t_i)	OEE (%) (R_i)
1	33,1
2	34,2
3	37,7
4	40,8
5	45,2
6	50,2
7	55,4
8	62,2
9	68,6
10	72,2
11	77,3
12	78,8
13	77,8
14	79,5
15	79,3

7. táblázat. Az OEE %-os értékei a gyártás első 15 hetében

A vizsgált időszakban számos olyan erőfeszítés történt, amelyek a rendelkezésre állási és a minőségi mutató jelentős javítása révén eredményezték az OEE mutató 10. táblázatban látható javulását. Mivel írásunk célja pusztán az aggregált mutatók változási jellegének modellezése, ezért nem részletezzük, hogy egy-egy mutató javulásához az elvégzett javító tevékenységek hogyan és milyen mértékben járultak hozzá.

A 7. táblázatban szereplő OEE % adatokat az idő függvényében grafikusán ábrázolva a 8. ábrán látható ponthalmazhoz jutunk.



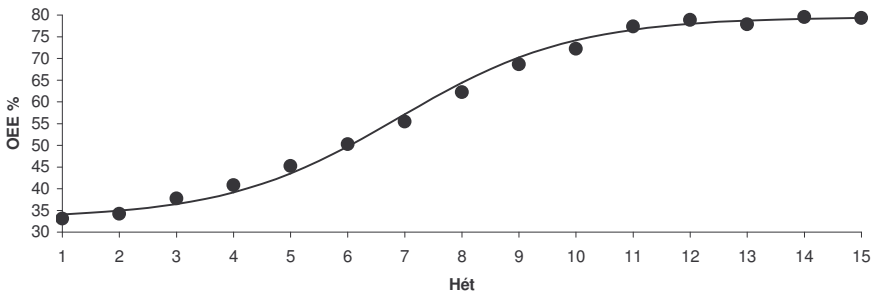
8. ábra. OEE % mutató időbeli alakulására

A ponthalmazra az $R_I = 33,1$ és $R_T = 79,5$ értékek mellett illesztettünk logisztikus függvényt. A regressziós függvény becsült paramétereit, a kiszámított korrelációs indexeket és a β paraméterekre vonatkozó 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumokat —a számítások részletezése nélkül, az eddigi jelöléseket alkalmazva— a 8. táblázat tartalmazza.

Paraméter	Paraméter értéke
$\hat{\beta}_1$	-0,657
$\hat{\beta}_0$	4,529
$\hat{\lambda}$	0,657
\hat{a}	6,897
r_S	0,997
r_{S^*}	0,997
$\beta_{0,L}$	3,916
$\beta_{0,H}$	5,142
$\beta_{1,L}$	-0,725
$\beta_{1,H}$	-0,588

8. táblázat. A regressziós modell számított paramétereit

A korrelációs indexek értékei alapján elmondhatjuk, hogy a lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus regressziós modell olyan függvényt eredményez, amely jól modellezi az OEE változását a termelési folyamat bevezetése során. A 9. ábra a kapott görbe mért OEE % értékekre való illeszkedését mutatja.



9. ábra. Logisztikus regresszió az OEE % mutató időbeli alakulására

5 Összegzés

Empirikus megfigyeléseink, a bemutatott példák és vállalati tapasztalataink alátámasztják azt a hipotézisünket, hogy az általunk tárgyalt, *lineárisra visszavezetett, leszűkített logisztikus (szigmoid) modell alkalmas aggregált minőségi és megbízhatósági mutatók változásának modellezésére termékek, illetve szolgáltatások előállításának bevezetése során*. Egy gyártási vagy szolgáltatási folyamat kiszemelt jellemzőjének javulása általában sok-sok, egymás után végrehajtott javító-fejlesztő tevékenység eredménye, az aggregált megközelítés azonban lehetővé teszi, hogy a folyamat javulását az aggregált mutató segítségével úgy tekintsük, mintha azt az adott technológiai és termelési kultúra határozná meg. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a mutató változása (javulása)

a vállalkozás szervezetének az adott folyamatra vonatkozó tanulási görbéjét reprezentálja, melyet a rendelkezésre álló technológia és a vállalkozás tágabb értelemben vett termelési kultúrája determinál. Az aggregált minőségi kihozatalra vonatkozó esettanulmányunkban láthattuk, hogy adott technológia és azonos vállalati kondíciók mellett a vizsgált két műszak aggregált kihozatala nagyon hasonló felfutást mutatott. A logisztikus modell β_0 , illetve β_1 paraméterein keresztül, az ezekre kiszámított konfidencia intervallumok segítségével pedig lehetőségünk volt a felfutási görbék kvantitatív összehasonlítására. Megközelítésünk előnye éppen az, hogy *lehetővé teszi a technológia és a vállalati kultúra jól ismert determináló szerepének számszerűsítését és felfutási (tanulási) görbék kvantitatív összehasonlítását. Egy felfutási görbe jellemző paramétereinek ismeretében a görbét, mint elvárást tekinthetjük akkor, amikor azonos technológiai és kulturális feltételek mellett egy folyamatot időben később, vagy térben másutt kívánunk elindítani.*

További kutatási célunk annak vizsgálata, hogy a technológia és a vállalati kultúra, hogyan befolyásolja a bemutatott modell paramétereit, a felfutási görbék alakját. Kérdés például, hogy adott műszaki háttér mellett a különböző földrajzi régiókhoz, országokhoz, és társadalmi kultúrákhoz milyen jellemző paramétertartományok társíthatók, illetve a függvény paraméterein keresztül hogyan hasonlíthatók össze különböző üzemek felfutási folyamatai. Egy másik vizsgálandó terület a folyamatok jóságának összehasonlítása felfutási görbék segítségével. Szintén vizsgálni kívánjuk azokat a gyakorlati eseteket, amikor a mutatók időbeli változása olyan görbékkel írható le, amelyek inflexiós pontjukra nem szimmetrikusak.

Irodalom

1. Andress, F. J. (1954): The Learning Curve as a Production Tool. *Harvard Business Review*, Vol. 32., No. 1. 16–19.
2. Alchian, A. (1959): Costs and Output. In M. Abramowitz (Ed.): *The Allocation of Economic Resources: Essays in Honor of B. F. Haley*. Stanford University Press, Stanford, CA
3. Arrow, K. (1962): The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies*, 29 (April), 166–170.
4. Baloff, N. (1966a): Start-ups in Machine-Intensive Production Systems. *Journal of Industrial Engineering*, 17 (January), 25–32.
5. Baloff, N. (1966b): Learning Curves-Some Controversial Issues. *Journal of Industrial Economics*, 14 (July), 275–282.
6. Baloff, N. (1970): Extensions of the Learning Curve – Some Empirical Results. *Operational Research Quarterly*, 22 (December), 329–340.
7. Balogh, A., Dukáti, F., Sallay, L. (1980): *Minőségellenőrzés és megbízhatóság*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980
8. Bohn, R. E., Terwiesch, C. (1999): The economics of yield-driven processes. *Journal of Operations Management*, Vol. 18., No. 1., 41–59.
9. Carlson, J. G. (1973): Cubic Learning Curves: Precision Tool for Labor Estimating. *Manufacturing Engineering and Management*, Vol. 71, No. 5., 22–25.

10. Carr, G. W. (1946): Peacetime Cost Estimating New Learning Curves. *Aviation* (April), 76–77.
11. Conway, R., Schultz, A. (1959): The Manufacturing Progress Function. *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 10., No. 1., 39–53.
12. Cooper, W. W., Charnes, A. (1954): Silhouette Functions of Short-Run Cost Behavior. *Quarterly Journal of Economics*, 68 (1954), 131–156.
13. Csaba, Gy. (Szerk.) (1978): *A biológiai szabályozás*. Medicina Könyvkiadó, Budapest, 360–362.
14. Dombi, J. (1990): Membership function as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 35. No. 1., 1–22.
15. Fellner, W. (1969): Specific Interpretations of Learning by Doing. *Journal of Economic Theory* (August), 119–140.
16. Garg, A., Milliman, P. (1961): The Aircraft Progress Curve Modified for Design Changes. *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 12., No. 1., 23–27.
17. Hansen, R. C. (2001): *Overall Equipment Effectiveness*, A Powerful Production/Maintenance Tool for Increased Profits. Industrial Press, Inc., New York, 25–27.
18. Hayes, R. H., Wheelwright, S. C. (1984): *Regaining our competitive edge: competing through manufacturing*. Wiley, New York
19. Hirschleifer, J. (1962): The Firm's Cost Functions-A Successful Reconstruction. *Journal of Business*, 35 (July), 235–255.
20. Hirschmann, W. B. (1964): Profit from the Learning Curve. *Harvard Business Review*, Vol. 42, No. 1., 125–139.
21. Hollander, S. (1965): *The Sources of Increased Efficiency: A Study of the Du-Pont Rayon Plants*. MIT Press, Cambridge, MA
22. Hunyadi, L., Vita, L. (2004): *Statisztika közgazdászoknak*. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 582–586.
23. Jónás, T., Kövesi, J. (2009): Értékelő függvények a megbízhatóság alapú menedzsmentben. *Minőség és Megbízhatóság*, Vol. XLIII. No.6., 311–320.
24. Jónás, T., Kövesi, J., Tóth, Zs. E. (2009): Az intellektuális tőke mérésének és értékelésének egyes kérdései. *Vezetéstudomány*, Vol. XL.(júniusi különszám) 24–29.
25. Kerékgyártó, Gy.-né, Mundruczó, Gy. (1996): *Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben*. Aula kiadó, Budapest, pp. 355–358.
26. Koltai, T. (2006): *Termelésmenedzsment*. Typotex Kiadó, Budapest, 76–115.
27. Laird, A. K. (1964): Dynamics of tumor growth. *British Journal of Cancer* 18. 490–502.
28. Lee, W. Y. (1975): Oligopoly and Entry. *Journal of Economic Theory*, 11., 35–45.
29. Lei, Y. C., Zhang, S. Y. (2004): Features and Partial Derivatives of Bertalanffy-Richards Growth Model in Forestry. *Nonlinear Analysis. Modelling and Control*, Vol. 9., No. 1. 65–73.
30. Leslie M., Holloway, C. A. (2006): Sales Learning Curve. *Harvard Business Review*, Vol. 84. No. 7/8, 115–123.
31. Lewandowski, R. (1974): *Prognose- und Informationssysteme und ihre Anwendungen* Band 1. Walter de Gruyter, Berlin, New York

32. McCullagh P., Nelder J. A. (1989): *Generalized Linear Models*, (Monographs on Statistics and Applied Probability). Chapman and Hall, London, 114–124 (2nd Edition)
33. Modis, T. (2002): Forecasting the Growth of Complexity and Change. *Technological Forecasting & Social Change*, Vol. 69., No. 4., 377–404.
34. Nakajima, S. (1988): *Introduction to TPM*. Productivity Press, Cambridge, MA
35. Pataki, B. (2005): *A technológia menedzselése*. Typotex Kiadó, Budapest, 61–81.
36. Rapping, L. (1965): Learning and the World War II Production Functions. *Review of Economics and Statistics*, 48 (February), 98–112.
37. Sheshinski, E. (1967): Tests of the Learning by Doing Hypothesis. *Review of Economics and Statistics*. 49 (November), 568–578.
38. Spence, M. A. (1981): The learning curve and competition. *Bell Journal of Economics*, 12., 49–70.
39. Stobaugh, R. B., Townsend, P. L. (1975): Price Forecasting and Strategic Planning: The Case of Petrochemicals. *Journal of Marketing Research*, 12 (February), 19–29.
40. Terwiesch, C., Bohn, R. E. (2001): Learning and process improvement during production ramp-up. *International Journal of Production Economics*, 70., 1–19.
41. Verhulst, P. F. (1838): Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, Vol. 10., 113–121.
42. Wright, T. P. (1936): Factors Affecting the Cost of Airplanes. *Journal of Aeronautical Science*, 3. (February), 122–128.
43. Zangwill, W. I., Kantor, P. B. (1998): Toward a theory of continuous improvement and the learning curve. *Management Decision*, Vol. 44., No. 7., 910–920.
44. Zoltners, A. A., Sinha, P., Lorimer, S. E. (2006): Match your sales force structure to your business life cycle. *Harvard Business Review*, Vol. 84. No. 7/8, 80–89.

MODELLING RAMP UP OF PRODUCTION AND SERVICE PROCESSES

By studying real company processes, we attempt to model changes of aggregate reliability and quality metrics of production and service processes during their introduction phase. Application of the so-called restricted linear logistics regression model provides with the possibility to quantify the determinant role of technology and production culture in the ramp up of production and service processes. Our approach lays the foundations of comparing ramp up curves that are different either in time or in space.

CONTENTS

ZALAI, ERNŐ: A scholar „above casts and society”: András Bródy (1924–2010) ...	1
VINCZE, JÁNOS: Paul Anthony Samuelson (1915-2009)	13
KÁNNAI, ZOLTÁN: Local energy method for little order forced Liénard equations	19
SZÜLE, BORBÁLA: Common effect of insurance and financial risk in the solvency calculation of insurers	39
ÁGOSTON, KOLOS CSABA: CVaR minimization by the SRA algorithm	61
JÓNÁS, TAMÁS – TÓTH, ZSUZSANNA ESZTER: Modelling ramp up of production and service processes	75

TARTALOM

ZALAI ERNŐ: Bródy András, a kaszton- és társadalmon kívüli tudós	1
VINCZE JÁNOS: Paul Anthony Samuelson (1915-2009)	13
KÁNNAI ZOLTÁN: Lokális energiamódszer kicsi rendben gerjesztett Liénard-egyenletekre	19
SZÜLE BORBÁLA: Biztosítási és pénzügyi kockázat együttes hatása a biztosítók szolvencia-számításánál	39
ÁGOSTON KOLOS CSABA: CVaR számítás SRA algoritmussal	61
JÓNÁS TAMÁS – TÓTH ZSUZSANNA ESZTER: Termelési és szolgáltatási folyamatok felfutásának modellezése	75

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

BESSENYEI ISTVÁN

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: essenyei@ktk.pte.hu

Társszerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

e-mail: fulop@oplab.sztaki.hu

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: laszlo.hunyadi@office.ksh.hu

KOMLÓSI SÁNDOR

e-mail: komlosi@ktk.pte.hu

KOVÁCS ERZSÉBET

e-mail: erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu

VÍZVÁRI BÉLA

e-mail: vizvari@cs.elte.hu

Szerkesztőbizottság:

FORGÓ FERENC, GETHER ISTVÁNNÉ, LIGETI CSÁK, MELLÁR TAMÁS,
MESZÉNA GYÖRGY, TAKÁCS TIBOR, TEMESI JÓZSEF, VÖRÖS JÓZSEF

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.sigma.ktk.pte.hu