

OLIGOPÓLIUMOK KOOPERÁLÓ CÉGEKKEL¹

FEUER GÁBOR – SZIDAROVSKY FERENC

G. Feuer Ges.m.b.H. – Arizonai Egyetem

Részlegesen kooperáló csoporttal rendelkező oligopol modellt vizsgálunk, amikor a versenyhivatal a piaci ár növekedése alapján következtet a kooperáció meglétére. A vállalatok optimális kooperációs szintjét határozzuk meg, amely maximális kooperációt biztosít anélkül, hogy a versenyhivatal gyanút fogna és vizsgálatot indítana.

1 Bevezetés

Az oligopol modellek számos változata ismert az irodalomból. Cournot (1838) munkája nyomán számos kutató vizsgálta ezeket a modelleket. Egy- és többtermékes, alkalmazott tulajdonú oligopol modellek mellett piacmegosztás problémákkal is foglalkoztak. Az egyensúlypont létezésének és egyértelműségének a kimutatása mellett annak dinamikus vizsgálata lett a kutatások fő témaköre. A korábbi eredmények jó összefoglalása található meg Okuguchi (1976) könyvében. Ezeknek az eredményeknek többtermékes általánosítását tárgyalja Okuguchi és Szidarovszky (1999) könyve, amely lineáris dinamikus kiterjesztéseket is elemez. A legújabb kutatások nemlineáris modelleket vizsgálnak, Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky (2010) könyve ad összefoglalást az eddigi eredményekről.

A legtöbb eddigi vizsgálat egymással versengő vállalatokat feltételez. Ennek az a legfőbb oka, hogy a legtöbb országban törvény tiltja a vállalatok titkos együtt-működését. A versenyhivatal bizonyos mutatókat ellenőriz rendszeresen, és ezek értékeiből von le következtetéseket. Amennyiben a vállalatok úgy gondolják, hogy a hatóságok gyanút fognának és vizsgálatot kezdeményeznének, akkor azonnal abbahagyják az együttműködést, és egymással versengő viselkedést folytatnak.

Ebben a dolgozatunkban vállalatok viselkedését vizsgáljuk meg olyan feltételek mellett, hogy szeretnének együttműködni a nagyobb profit érdekében, de ugyanakkor szeretnék elkerülni a hatósági vizsgálatokat és az esetleges ezzel járó büntetéseket. A matematikai egyszerűség érdekében szimmetrikus és lineáris oligopol rendszereket vizsgálunk.

2 A matematikai modell kooperáció nélkül

Tegyük fel, hogy N vállalat azonos terméket termel vagy azonos szolgáltatást kínál egy homogén piacnak. Jelölje x_k a k -adik vállalat termékkibocsátását,

¹Beérkezett: 2009. április 26. E-mail: szidar@sie.arizona.edu.

így $X = \sum_{k=1}^N x_k$ a teljes piaci kínálat. Tegyük fel, hogy az árfüggvény (inverz keresleti függvény) lineáris, $p(X) = A - BX$, és a cégek közös költségfüggvénye is lineáris, $C_k(x_k) = c + dx_k$, ahol $A > d$. A k -adik vállalat profitja a következő:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = x_k(A - BX) - (c + dx_k). \quad (1)$$

Ha bevezetjük az $X_k = \sum_{l \neq k} x_l$ jelölést a többi vállalat együttes kibocsátására, akkor φ_k átírható oly módon, hogy az csak x_k és X_k függvénye:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = x_k(A - Bx_k - BX_k) - (c + dx_k). \quad (2)$$

Minden vállalat célja profitjának maximalizálása, így adott X_k mellett az optimális kibocsátás mennyiségét az

$$A - 2Bx_k - BX_k - d = 0$$

egyenlet megoldása adja, amiből

$$x_k = -\frac{1}{2}X_k + \frac{A-d}{2B}, \quad \text{vagy} \quad x_k = -X + \frac{A-d}{B}. \quad (3)$$

Ezt a függvényt a k -adik vállalat *válaszfüggvényének* is szoktuk nevezni. Az oligopol modell, mint N -személyes játék egyensúlypontja olyan kibocsátási vektor (x_1^*, \dots, x_N^*) , hogy minden játékos a választfüggvényének megfelelő mennyiséget termeli, azaz $k = 1, 2, \dots, N$ esetén

$$x_k^* = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq k} x_l^* + \frac{A-d}{2B}. \quad (4)$$

Itt feltételeztük, hogy az optimumhelyek mind pozitívak. Ennek szükséges feltétele, hogy $A > d$ legyen. Könnyen látható, hogy az együtthatómátrix invertálható, így pontosan egy megoldás létezik, amely szimmetrikus kell legyen. Tehát $x_1^* = \dots = x_N^* = x^*$, ahol x^* az

$$x^* = -\frac{1}{2}(N-1)x^* + \frac{A-d}{2B} \quad (5)$$

egyenlet megoldása, így

$$x^* = \frac{A-d}{(N+1)B}. \quad (6)$$

Az egyensúlypontban a piaci ár az árfüggvény alapján

$$\begin{aligned} P_N^* &= A - BX = A - BNx^* = A - \frac{N(A-d)}{N+1} = \\ &= \frac{1}{N+1}(A + Nd). \end{aligned} \quad (7)$$

3 Kooperáló vállalatok esete

Tegyük most fel, hogy az első M vállalat részlegesen kooperál, azaz mindegyike nemcsak a saját profitját kívánja maximalizálni, hanem a csoport többi tagjának profitját is figyelembe veszi. Jelölje δ a kooperáció szintjét, ekkor a kooperáló k -adik ($1 \leq k \leq M$) vállalat kifizetőfüggvénye

$$\psi_k(x_1, \dots, x_N) = x_k(A - Bx_k - BX_k) - (c + dx_k) + \delta \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \{x_l(A - Bx_k - BX_k) - (c + dx_l)\}. \quad (8)$$

Kimutatható, hogy amennyiben a vállalatok közös érdekeltséggel rendelkeznek (például más vállalatok bizonyos hányadának tulajdonosai), akkor ez a helyzet matematikailag a (8) egyenlettel írható le. Matsumoto, Merlone és Szidarovszky (2010) több modellváltozatot tárgyal, és mindegyiket a (8) kifizetőfüggvényre vezeti vissza. A $\delta > 0$ konstans a közös érdekeltségek mértékétől függ.

A kifizetőfüggvényt maximalizáló kibocsátás ismét egyszerű deriválással adódik:

$$A - 2Bx_k - BX_k - d - \delta B \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M x_l = 0, \quad (9)$$

amelyből

$$x_k = -\frac{1}{2}X_k + \frac{A-d}{2B} - \frac{\delta}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M x_l = -X + \frac{A-d}{B} - \delta \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M x_l \quad (10)$$

$$(1 \leq k \leq M).$$

A kooperáló csoportba nem tartozó vállalatok esetén tovább is a (3) válaszfüggvény érvényes. Az így adódó (3) és (10) egyenletek adják az egyensúlypontot. Könnyen látható, hogy a megoldás egyértelmű, így szimmetrikus kell legyen olyan szempontból, hogy a kooperáló és a nemkooperáló vállalatok szimmetrikusak, így azonos x^* és y^* termékmennyiséget termelnek. Ez alapján a (3) és (10) egyenletek nagymértékben leegyszerűsödnek:

$$y^* = -Mx^* - (N-M)y^* + \frac{A-d}{B} \quad (11)$$

$$x^* = -Mx^* - (N-M)y^* + \frac{A-d}{B} - \delta(M-1)x^*, \quad (12)$$

azaz

$$y^*(1+N-M) + x^*M = \frac{A-d}{B} \quad (13)$$

és

$$y^*(N-M) + x^*(1+M+\delta(M-1)) = \frac{A-d}{B}. \quad (14)$$

Könnyen látható, hogy a megoldás

$$x^* = \frac{A - d}{B(N + 1 + \delta(M - 1)(N + 1 - M))}, \quad (15)$$

$$y^* = \frac{(A - d)(1 + \delta(M - 1))}{B(N + 1 + \delta(M - 1)(N + 1 - M))}. \quad (16)$$

Az együttes ipari kibocsátás pedig

$$Mx^* + (N - M)y^* = \frac{(A - d)(N + \delta(M - 1)(N - M))}{B(N + 1 + \delta(M - 1)(N + 1 - M))}. \quad (17)$$

Az árfüggvény alapján a piaci ár a következő:

$$\begin{aligned} P_R^* &= A - B(Mx^* + (N - M)y^*) = \\ &= \frac{A(1 + \delta(M - 1)) + d(N + \delta(M - 1)(N - M))}{N + 1 + \delta(M - 1)(N + 1 - M)}. \end{aligned} \quad (18)$$

A $\delta = 0$ választással adódik a kooperáció mentes piaci egyensúlyi ár (7), és a $\delta = 1$ választással a piaci ár, ha a csoport tagjai teljes mértékben kooperálnak:

$$P_K^* = \frac{A + d(N + 1 - M)}{N + 2 - M}. \quad (19)$$

Egyszerű differenciálással kimutatható, hogy a (18) piaci ár δ -nak növekvő függvénye.

A kooperáló vállalatok profitja is egyszerűen adódik, hiszen

$$\begin{aligned} \varphi_k &= x^*(P_R^* - d) - c = \\ &= \frac{A - d}{B(N + 1 + \delta(M - 1)(N + 1 - M))} \times \\ &\quad \times \left[\frac{A(1 + \delta(M - 1)) + d(N + \delta(M - 1)(N - M))}{N + 1 + \delta(M - 1)(N + 1 - M)} - d \right] - c = \\ &= \frac{(A - d)^2(1 + \delta(M - 1))}{B(N + 1 + \delta(M - 1)(N + 1 - M))^2} - c, \end{aligned}$$

amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- a) $\varphi_k > 0$, ha az állandó költség c elég kicsi;
- b) A kooperáló vállalatok profitja akkor és csak akkor nagyobb a kooperáció nélkül adódó profitnál, ha

$$M > \frac{N + 1}{2} \quad \text{és} \quad \delta < \delta_1 = \frac{(N + 1)(2M - N - 1)}{(M - 1)(N + 1 - M)^2}.$$

- c) Ha $M \leq \frac{N + 1}{2}$, akkor a φ_k profit δ -nak csökkenő függvénye, így profitáló kooperáció csak elég nagyszámú kooperáló vállalat esetén lehetséges.

d) Tegyük fel ezután, hogy $M > \frac{N+1}{2}$. Ha

$$\delta < \delta_2 = \frac{2M - N - 1}{(M-1)(N+1-M)},$$

akkor a φ_k profit δ -nak növekvő függvénye, $\delta = \delta_2$ esetén maximumot vesz fel, és $\delta > \delta_2$ esetén csökkenő. Vegyük észre, hogy

$$\delta_1 = \delta_2 \frac{N+1}{N+1-M} > \delta_2.$$

4 Optimális kooperáció mértéke

Tegyük fel, hogy a versenyhivatal sejt, hogy a csoport tagjai esetleg törvénytelen koalícióba lépnek. Ha semmilyen együttműködés sincs közöttük, akkor a piaci ár P_N^* kell legyen, teljes kooperáció esetén pedig P_K^* . Minthogy $P_K^* > P_N^*$, a hatóság választ egy \bar{p} küszöbértéket P_N^* és P_K^* között, és amennyiben a piaci ár a \bar{p} érték fölé megy, azonnal vizsgálatot kezd a csoport tagjai ellen. Azt is feltesszük, hogy figyelmeztetésként a \bar{p} küszöbértéket a vállalatokkal tudatja is.

A vizsgálat akkor kerülhető el, ha $P_R^* \leq \bar{p}$, azaz

$$\frac{A(1 + \delta(M-1)) + d(N + \delta(M-1)(N-M))}{N+1 + \delta(M-1)(N+1-M)} \leq \bar{p}, \quad (20)$$

amely δ -ra megoldva a következő feltételt adja:

$$\delta \leq \delta_3 = \frac{\bar{p}(N+1) - (A + dN)}{(M-1)(A + d(N-M) - \bar{p}(N+1-M))}. \quad (21)$$

Mint láttuk az előzőekben, több mint $(N+1)/2$ vállalat kooperációja szükséges ahhoz, hogy a kooperáció profitáló lehessen, és ekkor a

$$\delta^* = \min\{\delta_2, \delta_3\}$$

érték adja az optimális kooperációs szintet. Ez az észrevétel azonnal adódik abból a tényből, hogy a φ_k függvény $\delta < \delta_2$ esetén növekszik, $\delta > \delta_2$ esetén pedig csökken, valamint δ nem lehet δ_3 -nál nagyobb a vizsgálat és esetleges büntetés elkerülése céljából.

5 Következtetések és a további kutatási lehetőségek

N -vállalatos oligopol modellt vizsgáltunk. Meghatároztuk az egyensúlypontot kooperáció feltételezése nélkül, és úgy is, ha a vállalatok egy csoportja részlegesen kooperál. Kimutattuk, hogy a piaci ár az együttműködési szint növekvő függvénye. Így a hatóságok tudomást szerezhetnek a együttműködés

meglétérő, ha a piaci ár egy adott küszöbszámot meghalad. Ennek megfelelően a vállalatoknak lehetőségük van arra, hogy a lehető legmagasabb együttműködési szintet meghatározzák, amely még nem mutat együttműködést a hatóságok felé.

Vizsgálatunkban szimmetrikus esetet választottunk a matematikai egyszerűség kedvéért. A nemszimmetrikus, nemlineáris ár és költségfüggvények esetét érdemes lenne megvizsgálni, hogy lássuk, hogy hasonló megoldáshoz jutunk-e az általános esetben is. A modell dinamikus kiterjesztése is igen érdekes lenne, mert két egyensúlyi kibocsátás van, és a vállalatok az ár függvényében választanak kooperációt vagy versenyt jellemző stratégiákat.

Irodalom

1. Bischi, G-I., C. Chiarella, M. Kopel és F. Szidarovszky (2010): *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations*. Springer-Verlag, Berlin, New York.
2. Cournot, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie de Richesses*. Hachette, Paris (Angol fordítás (1960): *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Kelley, New York.)
3. Matsumoto, A., U. Merlone és F. Szidarovszky (2010): Dynamic Oligopoly with Partial Cooperation and Antitrust Threshold. *J. of Economic Behavior and Organization*, 73, 259–272.
4. Okuguchi, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models*. Springer-Verlag, Berlin, New York.
5. Okuguchi, K. és F. Szidarovszky (1999): *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms*. Springer-Verlag, Berlin, New York.

OLIGOPOLY MODELS WITH COOPERATING FIRMS

Oligopoly models are examined with partially cooperating firms, when the authorities may notice this illegal cooperation by monitoring the increasing market price. The maximal level of cooperation among the firms is determined under which their cooperation remains unobserved.