

INSTABILITÁSI PROBLÉMÁK AMA MODELLEKBEN¹

GÁLL JÓZSEF – NAGY GÁBOR – SZINI RÓBERT
Debreceni Egyetem – Magyar Nemzeti Bank – OTP Bank

A Bázeli III szabályozásnak megfelelő, a hitelintézetek működési kockázati tőkekövetelmény számítására alkalmazott AMA modelleket az utóbbi időben több kritika is illette a szakirodalomban. A feltárt problémák leginkább a modell által számszerűsített tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatosak, ugyanakkor kritika illette a modellek validálhatóságát és az eredmények összevethetőségét is, melyek alapvetően a modellek módszertani diverzitásából fakadnak. Cikkünk fő célja, hogy AMA megközelítést használó LDA modellekben saját számításokon keresztül mutassunk be olyan főbb hiányosságokat, melyek a tőkekövetelmény instabilitását eredményezik. Egyben célunk az instabilitás fogalmának, okainak tisztázása is. Ehhez a HUNOR adatbázison végzett számításokat és szimulációkat hívunk segítségül. Számításaink során bemutatjuk a tőkekövetelmény-számítás extrém eseményekre vonatkozó érzékenységet, a mintaelemszám nagyságából eredő problémákat, az adatgyűjtési küszöb okozta információvesztés hatását, valamint kitérünk a gyakorisági és az egyedi veszteségek eloszlása esetén a választás nehézségeire. A cikkünkben közölt eredmények összességében rávilágítanak arra, hogy egyes instabilitási problémák az LDA alapú AMA keretrendszer inherens részét képezik, azaz a kiküszöbölésük helyett csak azok minimalizálása lehet reális cél.

Kulcsszavak: működési kockázat, tőkekövetelmény számítás, instabilitás.
JEL kódok: G18, G28, C52, C63

1 Bevezetés

A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság 2010 óta tervezi a működési kockázatok nem modell alapú tőkekövetelmény számítási módszertanainak felülvizsgálatát², illetve 2014-től a fejlett mérési módszertan (AMA³) jövőjének újragondolása, újratervezése is elkezdődött. A Bizottság 2014 októberében megjelent anyagában (BCBS [2014]) az AMA tőkekövetelmény számításra alkalmazott belső modellek jelentős egyszerűsítésének szükségességére hívta fel a figyelmet, mivel véleménye szerint a szabályozói tőkekövetelmény számításhoz jellemzően kisebb hozzáadott értéke van, mint amennyivel komplexebb a többi kockázattípus tőkekövetelmény számítási módszertanához képest, és arány-

¹E-mail: gall.jozsef@inf.unideb.hu, nagyga@mmb.hu, robert.szini@otpbank.hu.
Beérkezett: 2018. április 9.

²Alapmutató módszere (BIA), sztenderd módszer (TSA), alternatív sztenderd módszer (ASA)

³Advanced Measurement Approach

talánul több erőforrást igényel az üzemeltetése a többi kockázattípushoz viszonyítva.

A Bizottság 2015 szeptemberében fogalmazta meg először határozottan az AMA jövője kapcsán alkotott véleményét, mely szerint az AMA módszertant ki kell vezetni a bázeli keretrendszerből és a nem modell alapú módszertanokat egy új módszertan (SMA⁴) váltaná fel, mely azt jelenti, hogy a tervek szerint 1. pillérben csak és kizárólag egyetlen módszertannal lehessen működési kockázati tőkekövetelményt számszerűsíteni. A Bázeli Bizottság 2016 márciusában publikálta (BCBS [2016]) konzultációs célból az új SMA módszertant, mely kisebb módosítások mellett a 2017 decemberében megjelent új Bazel IV javaslatcsomag (BCBS [2017]) részét képezi, mint a jövőben egyetlen módszertan, melynek segítségével számszerűsíthető a szabályozói⁵ működési kockázati tőkekövetelmény. Az új szabályrendszer várható jogszabályi implementációja 2022. január 1., mely azt jelenti, hogy 2022-ig az AMA modellek továbbra is alkalmazhatóak szabályozói tőkekövetelmény számításra, 2022 után pedig a hitelintézetek dönthetnek úgy, hogy a kérdéses modellt továbbra is alkalmazzák, de már csak gazdasági⁶ tőkekövetelmény meghatározására, és vállalatirányítási, belső riporting folyamatokban.

A Bázeli Bizottság a nem modell alapú tőkekövetelmény számítási módszertanok megfelelőségének felülvizsgálatát már a Bazel II szabályrendszer megjelenésekor célul tűzte ki tekintettel arra, hogy megfelelő adatok hiányában nem lehetett egyértelműen igazolni, hogy a kérdéses módszerek alapját jelentő bruttó bevétel⁷ mutató egy hitelintézet működési kockázati profilját kellőképp ragadja-e meg. Továbbá a felülvizsgálat szükségességét a sztenderd módszertan esetén az egyes üzletágakhoz rendelt súlyok⁸ szakértői úton történő meghatározása is indokolta, melyek megfelelőségének igazolása a kezdetekkor adatok hiányában szintén nem volt lehetséges. A nem modell alapú tőkekövetelmény-számítások várható kivezetését és az új SMA módszertan bevezetését a kérdéses felülvizsgálat eredményei mellett a Bizottság 2008–2009-es gazdasági válság alatti tapasztalatai is indokolták. A válság időszaka alatt a hitelintézetek bruttó bevétele csökkent, ezáltal csökkent a nem modell segítségével számított működési kockázati tőkekövetelményük is, ugyanakkor válság időszak alatt a hitelintézetek működési kockázatnak való kitettsége egyértelműen növekedett, amely azt jelenti, hogy ellentétes irányú kapcsolatot tapasztalt a szabályozó a működési kockázatnak való kitettség és a tőkekövetelmény mértéke között.

A Bázeli Bizottság a modell alapú AMA módszertan kapcsán számos alkalommal fogalmazta meg kritikus észrevételeit, melyek leginkább a módszertan komplexitására, valamint az AMA modellek által számszerűsített tőkekövetelmények összevethetőségének hiányára vonatkoztak. Az Európai Bankhatóság (EBA) több olyan, az AMA modellek módszertani diverzitását csökkenteni

⁴Standardized Measurement Approach

⁵A Bazel II szabályrendszer alapján 1. pilléres tőkekövetelmény.

⁶A Bazel II szabályrendszer alapján 2. pilléres tőkekövetelmény.

⁷Gross Income

⁸CRR 317. cikk (4)

hivatott dokumentumot (pl. EBA [2015]) publikált, melyek az AMA modellek felé eredetileg megfogalmazott általános elvárásokat specifikálták, ugyanakkor a Bázeli Bizottság véleménye szerint ezen egységesítő, módszertani közelítést célzó tevékenységek csak közvetetten érték el céljukat. Ennek megfelelően a Bázeli Bizottság az AMA modellek komplexitásának csökkentését és az eredmények összevethetőségét célzó újabb módszertanok és szabályozás kidolgozása helyett inkább a módszer kivezetése mellett foglalt állást.

Cikkünkben bemutatjuk azon AMA keretrendszert érintő problémák körét, melyek már a Bazel II szabályrendszer megjelenésekor is nyilvánvalóak voltak. Összefoglaljuk, hogy milyen jelenségek és problémák gyűjtőfogalomként hivatkozunk a tőkekövetelmény instabilitásának fogalmára. Ezt követően saját számítások és elemzések alapján több, az AMA modell által számszerűsített, a tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatos jelenséget tárgyalunk, illetve mutatunk be. Az instabilitási hiányosságok kapcsán továbbá rávilágítunk arra, hogy egy részük az LDA⁹ alapú AMA keretrendszer inherens részét képezik, azaz a teljes eliminálásuk lehetetlen feladatot jelent, így alapvetően célt csak az egyes elemekkel kapcsolatos instabilitás minimalizálása jelenthet.

2 Nyilvánvaló és már a keretrendszer bevezetésekor is ismert problémák

Egy intézmény működési kockázati tőkekövetelményének meghatározása céljából igen fontos szerepet játszanak a belső (intézményben felmerült) veszteségadatok, melyek a szervezetben szétszórtan jelennek meg. Ennek megfelelően a működési kockázatkezelés fontos feladata ezen veszteségadatok gyűjtésének megszervezése, valamint az intézmény különböző területeiről származó veszteség információk minőségbiztosítása. Tekintettel arra, hogy az adatok gyűjtése, rendszerezése az egész szervezetet igénybe veszi, értelemszerűen adódik, hogy nem éri meg minden apró veszteséget feltárni, és az adatbázisban rögzíteni az erőforrásokkal való optimális gazdálkodás jegyében. Ennek következménye, hogy maga a szabályozó a tőkekövetelmény mind sztenderd, mind fejlett mérési módszer szerinti meghatározása esetén elvárja¹⁰ a hitelintézetektől, hogy a szervezet határozzon meg egy alsó küszöbértéket, ami fölött gyűjti a veszteségeit. A kérdéses alsó küszöbérték meghatározása a hitelintézet feladata, ugyanakkor annak megfeleltetését bizonyítani, alátámasztani szükséges a hitelintézet felügyeletét ellátó szerv felé. A cikk későbbi fejezeteiben bemutatjuk az alsó küszöb megválasztásával kapcsolatos nehézségeket és problémákat, valamint megmutatjuk, hogy a kérdéses küszöb milyen mértékű hatást képezt gyakorolni a működési kockázati tőkekövetelményre.

Az adatok gyűjtéséhez kapcsolódóan, a modellezési keretrendszert illetően további problémát jelent a modellezési dátum kiválasztása. A szervezet számos időpontot feljegyezhet egy működési kockázati eseménnyel kapcsolatban,

⁹Loss Distribution Approach

¹⁰A TSA módszer esetén a CRR 320. cikk a) pontja, míg az AMA esetén a CRR 322. cikk (3) c) pontja a mérvadó.

melyek adott időintervallumra történő használata akár jelentős mértékben különböző tőkekövetelmény számokat is eredményezhet:

- az esemény bekövetkezésének dátuma,
- az esemény észlelésének dátuma,
- az eseményhez tartozó veszteség könyvelésének a dátuma,
- az esemény adatbázisban történő rögzítésének a dátuma.

Egy működési kockázati esemény bekövetkezése sokszor nem ismert, így adott esetben az sem eldönthető, hogy az eseményhez tartozó veszteségnek bele kell-e tartoznia abba az idősorba, amiből a tőke meghatározása történik. Az észlelés dátuma egy újabb lehetőség a működési kockázati esemény hatásának modellezésére, hiszen akkor vesszük figyelembe az eseményt, amikor már tudjuk, hogy viselnünk kell annak következményeit, hiszen az események melyek a (rég) múltban következtek be, bekövetkezésük után sokkal később is okozhatnak gazdasági hatást. Ez utóbbi esetén olyan események kerülhetnek be az idősorba és a tőkekövetelmény-számításba, melyek adott esetben már nem is relevánsak az intézmény szempontjából¹¹. A könyvelés és rögzítés dátuma mindössze technikai dátumok, így egy kockázatérzékeny tőkekövetelmény megállapítására nem javasoltak.

Újabb, már a keretrendszer bevezetésekor is látható problémát jelent a modellezés kapcsán a múltbeli megfigyelési időszak hosszának megválasztása. A szabályozó habár egy legalább 5 éves időintervallum¹² alkalmazását várja el a működési kockázati tőkekövetelmény meghatározásához, ugyanakkor az időintervallum hosszának meghatározása során azt szükséges mérlegelni, hogy az intézménynek legyen „elégleges” adata a kockázatok becsléséhez, tehát egyfelől legyen minél hosszabb az idősor, másrészt nem szabad arról sem megfeledkeznie, hogy az intézmény egy állandóan változó környezetben működik, tehát a valós kockázati profilját az időben legfrissebb események jellemzik leginkább. Ezt a képet árnyalja, hogy lehetnek olyan típusú események (pl. bírósági ügyek), ahol a veszteségek és a kapcsolódó megtérülések időben távol vannak egymástól, így egy akár 5 éves időtáv választása is értelmét veszti.

A működési kockázati tőkekövetelmény modell alapú meghatározásának sajátossága, hogy a tőkekövetelmény szintjét gyakorlatilag az extrém, azaz a ritkán előforduló, de potenciálisan súlyos veszteségesemények határozzák meg leginkább (lásd Aue et al. [2006], Böcker et al. [2005], Embrechts et al. [2003]). Az előzőekben tárgyalt, a múltbeli megfigyelési időszak hosszának megválasztása kapcsán újabb előre látható problémával állunk szemben: a hitelintézetek belső adatai között extrém veszteségek alig, vagy legalábbis modellépítés szempontjából tipikusan elégtelen mennyiségben fordulnak elő. A szabályozó a potenciálisan súlyos, de ritka események számosságához köthető probléma ellensúlyozása kapcsán elvárja¹³ az intézményektől, hogy az extrém-

¹¹Pl. az üzletág már megszűnt, vagy azt a folyamatot már számos kontroll funkció erősíti, ahol az esemény bekövetkezett.

¹²CRR 322. cikk (3) a) alapján

¹³CRR 322. cikk (4) alapján

nek tekinthető belső veszteségadatai mellett külső veszteségadatokat is vegyünk figyelembe a modellezés során annak érdekében, hogy a veszteségeloszlás széle – mely a tőkekövetelmény szintjét leginkább meghatározza – is kellő módon megragadható legyen a későbbi eloszlásillesztés és paraméterbecslés során. A kérdéses külső adatokat az intézmények jellemzően két forrásból nyerhetik: publikus és konzorcium adatok. Az előbbi felsorolt két adatforrás mindegyike rendelkezik előnyökkel és hátrányokkal, a kettő közötti választást ugyanakkor elsődlegesen a felhasználás célja dönti el. A publikus adatok jellemzően részletes leírással rendelkeznek az eseményt illetően, ugyanakkor közzétételük meglehetősen eseti, éppen ezért a felhasználásuk inkább a kockázati önértékelések és szcenárióelemzések során javasolt, mintsem a tőkekövetelmény számítása kapcsán, tekintettel arra, hogy nem lehet rá stabil modell inputként tekinteni. A konzorcium adatok rendszeres és folyamatos rendelkezésre állását a tagok azon vállalása biztosítja, miszerint azok meghatározott időközönként közzéteszik működési kockázati veszteségeiket a konzorcium többi tagjának számára. Ugyanakkor a kockázati eseményekről tipikusan csak az adatkonzorcium által előírt minimális információ áll rendelkezésre, mivel a tagok anonimnak szeretnének maradni az elszenvedett veszteségek tekintetében. Ennek fényében a konzorcium tagjai kénytelenek megbízni egymás adatgyűjtési, rögzítési és kategorizálási folyamatában, hiszen utólag a veszteségesemény leírásából jellemzően nem lehet teljesen rekonstruálni a teljes működési kockázati eseményt.

Az előzőekben említett, a külső veszteségadatok gyűjtésével és felhasználásával kapcsolatos nehézségek mellett a kérdéses adatok modellben való figyelembe vétele is kellő körültekintést igényel. A már említett adatkonzorcium tartalmazhat olyan adatokat, melyek egyáltalán nem relevánsak az azt felhasználó számára¹⁴, így azokat mellőzni szükséges a tőkekövetelmény számítása során. A relevánsnak tűnő adatok bevonása pedig azt eredményezheti, hogy a tőkekövetelmény az iparági tőkekövetelmény irányába fog torzítani tekintettel arra, hogy a megképzett tőkekövetelményt leginkább más intézmények által elszenvedett veszteségek indukálják. A tőkekövetelmény becslésének külső adatok miatti torzítását ugyanakkor ellensúlyozhatja a külső adatok figyelembe vételéhez kapcsolódó növekvő stabilitás az illesztett eloszlások paraméterbecslése során. Ennek megfelelően egy intézmény számára arra a kérdésre kell választ adni, hogy mennyire hasonlít vagy különbözik működési kockázati profil alapon az iparági átlaghoz képest, mivel ennek függvényében fogja használni (súlyozni) a külső adatokat. Számos szerző (pl. Dahlen et al. [2008]) javasolja a külső adatok skálázását¹⁵, ami az iparági tőkekövetelmény felé kevésbé torzító tőkeértékhez vezethet.

Itt jegyezzük meg, hogy Gáll és Nagy [2007] már korábban felhívta a figyelmet néhány, az LDA módszeren alapuló tőkekövetelmény-számítást érintő

¹⁴Pl. nagyon eltérő működési környezet okán elszenvedett veszteség vagy olyan üzletághoz kapcsolódó veszteségek, amellyel az adatot felhasználó intézmény nem is rendelkezik.

¹⁵Azon külső adatok arányos figyelembe vétele a tőkekövetelmény számítása során, melyet az adott intézményhez képest jóval nagyobb mérlegfőösszegű (vagy egyéb méret indikátorral rendelkező) hitelintézet szenvedett el.

problémára. Az említett cikkben részletesen ismertetésre kerül az LDA modell, mely a teljes veszteségelosztást egy összetett eloszlásként vezeti be, így annak kvantilisei adják az alkalmas tőkekövetelményeket. Jelen cikkben eltekintünk a modell részletes ismertetésétől.

Jegyezzük meg továbbá, hogy cikkünkben AMA alapján készült tőkekövetelmény-becsléseket vizsgálunk. Ennek során rendre az LDA modellből indulunk ki, azaz a teljes veszteség eloszlását egy ún. összetett eloszlás modellezi, amelyet egyrészt a (független és azonos eloszlásúnak feltételezett) egyedi veszteségek eloszlása, másrészt (az egyedi veszteségektől szintén független) veszteségek számának eloszlása (gyakorisági eloszlás) adja meg. A tőkekövetelményt pedig az összetett eloszlás VaR értéke adja. Utóbbit számos módszerrel lehet becsülni, pl. Monte Carlo szimuláció vagy Single Loss Approximation (SLA), amennyiben a modell paraméterei ismertek, vagy azok becslései adtak. Bár az AMA más megközelítéseket, módszereket is megengedne a gyakorlatban, s különösen a magyar gyakorlatban az említett LDA alapú tőkekövetelmény szinte kizárólagos. Az LDA modell és abban a tőkekövetelmény becslésének alapjait tárgyalja többek között Panjer [2006], továbbá Gáll és Nagy [2007] ad egy összefoglalást, így ennek részleteitől itt eltekintünk.

3 A tőkekövetelmény instabilitása és esetei

A következőkben az instabilitást gyűjtőfogalomként használjuk, azaz nem közlünk egységes, precíz matematikai definíciót, tekintettel arra, hogy az instabilitás fogalmának konkretizálására az egyes vizsgált problémák kapcsán jellemzően külön-külön kerül sor. A működési kockázatok esetén az instabilitás alatt a továbbiakban a tőkekövetelmény nagyfokú változékonyságát értjük, melynek elsődleges forrása a szabályozói definíció, konkrét megjelenési formái pedig a következő okokból adódhatnak:

- nagyfokú becslési hiba,
- extrémekre való érzékenység,
- nem megfelelő eloszlások választása, használata,
- különböző becslési módszerek segítségével kapott jelentősen eltérő eredmények.

Extrém események modellezésével kapcsolatos bizonytalanság

A következőkben a működési kockázati tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatos számításainkat a HUNOR adatbázison¹⁶ végeztük el, mely a magyarországi piacvezető bankok által közösen létrehozott operációs kockázati adatbázis. Célunk a tárgyalt problémák bemutatása során olyan esetek (pl.

¹⁶Hungarian Operational Risk Database (Magyar Működési Kockázati Adatbázis), melyben az adatkonzorcium tagok anonim módon osztják meg egymással az adatgyűjtési küszöb feletti veszteségeik megfelelő adatait.

paraméterválasztások, mintaméret) választása, melyek életszerűek a hazai környezetben is.¹⁷ Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk, hogy a HUNOR-hoz hasonló adatbázisok más földrajzi területeken (országokban) is létrejöttek, lásd például SAS OpRisk Global Data és ORX¹⁸ adatbázisokat.

Jegyezzük meg, hogy a HUNOR adatbázison végzett számításainkhoz a vizsgált célokra megfelelően hosszú időintervallumot választottunk. Másfelől viszont az is fontos, hogy ez az időintervallum ne legyen túl hosszú ahhoz, hogy a vizsgált eloszlások paramétereinek időbeli stabilitása teljesüljön. Jegyezzük meg továbbá, hogy a szabályozói elvárás¹⁹ szerint a tőkekövetelménynek 99,9%-os konfidenciaszint mellett, 1 éves időszakra kell megfelelő biztonságot nyújtania. Továbbá a tőkekövetelmény instabilitásával kapcsolatos számítások szempontjából a válságidőszak adatain végzett vizsgálatok különösen indokoltak lehetnek, mivel a tőkekövetelmény szintjét leginkább meghatározó, az eloszlás szélét reprezentáló események vélhetően épp ezen időszak alatt következtek be, míg az AMA modellek sajátossága miatt a tőkekövetelmény a relatíve gyakori, de kevésbé súlyos eseményekre nem tekinthető érzékenynek. Az 1. táblázatban foglaltuk össze a legfontosabb leíró statisztikákat²⁰ az általunk felhasznált adatbázis kapcsán, a CRR 324. cikke szerinti eseménytípusok bontásában²¹.

Esemény-típus	Db	Minta- átlag (mHUF)	Empirikus szórás (mHUF)	Maxi- mum (mHUF)	μ becslése	σ becslése	p-érték K-S	p-érték A-D
Belső csalás (ET1)	27	84	250	1220	15,14	2,75	0,99	0,99
Külső csalás (kiv. kártya) (ET2)	287	5	39	521	12,42	2,20	0,51	0,48
Munkáltatói gyakorlat (ET3)	133	4	13	92	13,10	2,18	0,49	0,52
Ügyfelek, termékek (ET4)	413	6	43	602	12,36	2,42	0,14	0,27
Tárgyi eszközök (ET5)	1465	0	1	25	11,96	1,34	0,03	0,00
Üzletmenet, rendszerhiba (ET6)	202	2	10	136	11,85	1,91	0,53	0,37
Végrehajtás, folyamatok (ET7)	2344	2	27	931	11,98	2,04	0,03	0,06
Kártya- csalás (ET2)	2205	0	1	27	11,46	1,45	0,01	0,01

1. táblázat. HUNOR adatbázis leíró statisztikai, az illesztett lognormális eloszlások becslült paramétereit (μ ill. σ). Forrás: saját számítás.

Az 1. táblázat alapján láthatjuk, hogy az ET1 eseménytípus esetén a minta elemszáma nem elégséges ahhoz, hogy a későbbiekben az eloszlás szélét

¹⁷A Bankszövetség és a Nemzetközi Bankárképző a 2009.06.30-2012.06.30 hároméves időszakra bocsátotta rendelkezésünkre a HUNOR adatokat, így ezeket használjuk fel a munkánkban az elemzésekhez.

¹⁸Operational Riskdata eXchange Association

¹⁹CRR 322. cikk (2) a)

²⁰A táblázatbeli átlagok kerekített értékek, a Tárgyi eszközök és Kártyacsalás esetén például 410, ill. 287 ezer HUF a mintaátlag.

²¹A bázeli üzletág-dimenzió vizsgálatát mellőzzük, mivel azon veszteségesemények, melyek több üzletágot is érintenek, azok a bázeli üzletágak szerint százalékosan megosztva kerülnek be a HUNOR adatbázisba, azaz részarányosan egy esemény több üzletághoz is rögzítésre kerülhet.

vizsgáljuk, továbbá az ET3 esetén, habár a szokásos hüvelykujjszabályok alapján éppen elégségesnek tekinthető a mintaelemszám, az eredményeket ugyanakkor kellő megfontolással kell majd kezelni. Az ET2 (kivéve kártya), ET4 és ET7 eseménytípus kategóriákban látható, hogy a szórás arányaiban itt haladja meg leginkább az átlagot. Megjegyezzük továbbá, hogy a minta ferdesége és csúcossága ezen kategóriák esetén a leginkább jelentős. Továbbá a maximum és átlag arány esetenként a több százat is meghaladja. Az előzőek összességében éppen arra utalnak, amire számítottunk: a kategóriánkénti eloszlások közül több is erősen vastag szélű.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy az igen népszerű (és hasonló problémáknál gyakran jól viselkedő) lognormális egyedi veszteségeloszlás mennyire jól illeszkedik a kategóriánkénti adatokra. Az eloszlás illesztése során az eredeti mintát eltoltuk 0-ba és az így kapott adatokra illesztettünk²² lognormális eloszlást. Az illesztések²³ során maximum likelihood becslést használtunk, továbbá az illeszkedés jóságáról a grafikus módszerek mellett a Kolmogorov-Smirnov és Anderson-Darling tesztek alapján is meggyőződünk, melyekhez tartozó p értékeket a paraméterek (μ és σ) becslt értékével együtt az 1. táblázatban is közöltük.

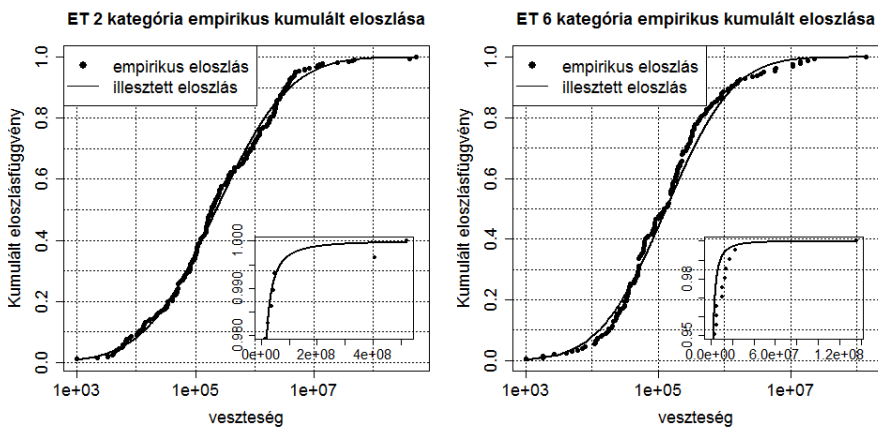
Az 1. táblázat p értékeket tartalmazó oszlopai alapján látható, hogy a Tárgyi eszközök és a Kártyacsalás kategóriák esetén utasítható el egyértelműen a nullhipotézis, akár 4-5%-os szignifikanciaszint mellett, mely szerint a veszteségadatok az adott kategóriában lognormális eloszlást követnek. Továbbá a Végrehajtás, folyamatok kategória esetén bizonytalanabb a döntés a kissé magasabb p értékek miatt, ám itt is megkérdőjelezhető a lognormalitás. Ha megfigyeljük, hogy hol sikerültek a „legjobban” az illesztések, akkor éppen a legkisebb mintaelemszámú kategóriák köszönnek vissza. Megjegyezzük, hogy az egyes eseménytípus szerinti kategóriák számos esetben tartalmaznak azonos veszteségértékeket, melyeket a szabályozó nem enged kiszűrni annak ellenére sem, hogy az azonos értékeknek köszönhetően ugrik az empirikus kumulált eloszlásfüggvény, mely jelentősen negatív irányban módosítja az illeszkedésvizsgálatok eredményét (így a probléma nagyságának függvényében más modellspecifikációra lehet szükség).

Annak ellenére, hogy a becslés összességében több kategóriában is megkérdőjelezhető, több fontos eredményt is kaptunk. Azon kategóriák esetén, melyek kapcsán a lognormális eloszlás illeszkedése elfogadható a tesztjeink eredményei alapján, ott nagyságrendileg leolvashatók a lognormális eloszlás paramétereinek (μ és σ) azon tartományai, melyek mellett érdemes további szimulációkat, vizsgálatokat folytatnunk. Látható például, hogy a gyakran

²²Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk Baud et al. [2002] és Ergashev et al. [2012] eredményeit, melyek alapján látható, hogy a tőkeképzés szempontjából nem mindegy – akár jelentős különbségek is adódhatnak –, hogy feltételes eloszlást használunk-e vagy a 0-ba eltolt adatokra illesztjük a feltétel nélküli eloszlást. Jelen cikk esetében a 0-ba való eltolást, mint módszertant az előzőekben hivatkozott szerzők eredményei alapján választottuk, tekintettel a feltételes eloszlás illesztésével kapcsolatos nehézségekre.

²³Az illesztett eloszlások paramétereinek becslését, valamint a későbbiekben ismertetett számításokat és a cikkben szereplő grafikonokat az R 3.4.2. szoftver segítségével végeztük, illetve készítettük el.

használt $\mu = [11, 13]$ és $\sigma = [2, 3]$ paraméterek közel állnak a realitáshoz, azaz egy-egy intézmény kapcsán relevánsak lehetnek. Ezen túl ugyanakkor grafikus úton vizsgálhatjuk azt a kérdést, mely szerint amennyiben az illeszkedésvizsgálat eredményei alapján elfogadható a lognormális eloszlás, úgy ez az elméleti eloszlás alulbecsli-e a kockázatot a veszteségeloszlás szélén. Másképp fogalmazva, a teljes veszteségtartományon jól illeszkedő lognormális eloszlás kellően vastag szélű-e ahhoz, hogy megfelelő módon lefedje a veszteségeloszlás szélét. Az 1. ábrán két olyan szegmens esetén vetjük össze az empirikus veszteségeloszlás és az illesztett eloszlás kumulált eloszlásfüggvényeit, melyek esetében a p értékek alapján nem tudtuk elvetni a lognormális eloszlást.



1. ábra. Az eloszlásfüggvények összevetése. *Forrás:* saját számítás.

A fenti összevetés alapján jól látható, hogy a teljes veszteségtartományt tekintve mind a Külső család (kivéve kártya) (ET2), mind az Üzletmenet, rendszerhiba (ET6) kategóriák esetén valóban jól illeszkedő eloszlásokat kapunk, ugyanakkor ha tekintjük a veszteségeloszlás magas percentiliseit, azaz az eloszlás szélét mutató kisebb ábrákat, úgy látható, hogy az Üzletmenet, rendszerhiba kategória esetén vastagabb szélű eloszlásra lenne szükségünk a lognormális helyett. Hasonlóan a teljes veszteségtartományon jól illeszkedő eloszlásokat kapunk az ET3 és ET4 kategóriák esetén, ugyanakkor ezen jól illeszkedő eloszlások szintén alulbecslik a kockázatot az eloszlás szélén, azaz az eredmények alapján látható, hogy érdemes a vastagabb szélű eloszlások felé elmozdulni.

Itt szeretnénk megemlíteni, hogy az egyes eseménytípusokba tartozó veszteségek kapcsolatának (függőségi struktúrájának) modellezése, továbbá a VaR nem szubadditív jellege számos további problémát vet fel a teljes tőkekövetelmény számítása során. Az eseményosztályokra számolt vagy becsült VaR értékek összeadásával nyert tőkeszükséglet a fenti problémák miatt gyakorolta a tőkekövetelmény túlbecsléséhez vezet. A szabályozó engedélyezi²⁴ az

²⁴EBA/RTS/2015/02 Article 40

egyes eseménytípusok közötti függőség modellezésének figyelembe vételét a tőkekövetelmény számítása során, melynek egy lehetséges eszköze a kopulák alkalmazása. A pénzügyi kockázatok kopulákkal történő modellezése kapcsán sok probléma merül fel, a témakörben számos tudományos publikáció ismert, ezek közül megemlítjük Mikosch [2006] és Bugár [2017] áttekintő cikkeit az érdeklődő olvasónak.

Az elégséges mintaelemszámról

Számos szerző foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy mekkora a VaR^{25} (azaz a tőkekövetelmény) becslés hibája, illetve mi lenne az a már elégségesnek tűnő (megfelelő) mintaméret, amely mellett a tőkekövetelmény már elfogadható hibával becsülhető. Szabályozói szemszögéből a VaR alulbecslése, míg a hitelintézet tulajdonosának szemszögéből nézve a tőke túlbecslése jelenti a problémát. A becslés hibáját számos oldalról megközelíthetjük a modellezés során, ugyanakkor a következőkben mi csak a megfelelő mintaelemszám nagyságrendjének függvényében vizsgáljuk a kérdéses problémát.

Az egyedi veszteségek éves gyakoriságának és eloszlásának tükrében Frachot et al. [2004] szimulációs kísérletek segítségével adott választ a tőke becslési hibájára és az elégséges mintaelemszámra. Elemzésében arra a kérdésre ad választ, hogy mekkora mintaelemszám szükséges ahhoz, hogy a becsült tőke (VaR_{EST}) a tényleges tőke (VaR_{TRUE}) $1 - c$ százalékánál α valószínűséggel nagyobb legyen. Eredményét az elfogadható mintanagyság tekintetében $\lambda = 100$ paraméterű Poisson gyakorisági eloszlás, valamint $\mu = 9$ és $\sigma = 2$ paraméterű lognormális veszteségeloszlás alkalmazása mellett kapta α és c paraméterek függvényében, melyet az alábbi 2. táblázat foglal össze.²⁶

c / α	60%	70%	80%	90%
10%	400	1740	4500	10430
20%	100	430	1120	2600
30%	40	190	500	1150
40%	20	100	280	650
50%	10	60	180	410

2. táblázat. Optimális mintaelemszám α és c függvényében, $\lambda = 100$, $\mu = 9$, $\sigma = 2$ esetén. *Forrás:* Frachot et al. [2004].

A 2. táblázat alapján látható, hogy egy átlagosan évi 100 adatot gyűjtő bank esetében több mint 10 ezer elemű mintára lenne szükség ahhoz, hogy 90%-os valószínűséggel ne becsüljük több mint 10 százalékkal alá a működési kockázati tőkekövetelményt, miközben egy intézmény a fenti paraméterek mellett várhatóan csak 500 eseménnyel fog rendelkezni 5 év után is. Ezt a mintaelemszámot a bank csak alkalmas (ugyanolyan eloszlásból származó) külső adatok bevonásával tudja elérni. A szakirodalomban továbbá Cope et

²⁵Value-at-Risk

²⁶Frachot et al. [2004] cikkében az optimális mintaelemszámot egy analitikus összefüggés segítségével kapja. Az optimális elemszámot megadó összefüggés levezetéséhez felhasználta, hogy az ML módszer mindig konzisztens és aszimptotikusan hatásos becslőfüggvényt eredményez normális határeloszlással. Az érdeklődő olvasó a pontos levezetést a hivatkozott cikk 6. fejezetében találja meg.

al. [2009] vizsgálta az elégséges mintanagyság kérdését, ugyanakkor lognormális eloszlás helyett Pareto-eloszlások²⁷ mentén, melyhez a kvantilis szten-derd hibájára vonatkozó becslést alkalmazta. Eredményei alapján a fentiek-hez hasonló 10 százalékos relatív hiba eléréséhez a 99,9%-os valószínűséghez tartozó kvantilis becslése során nagyobb, mint százezres mintaelemszámra lenne szükségünk.

Az előbb bemutatott eredmények alapján láthatjuk, hogy a különböző szerzők más és más mintanagyságot javasolnak vagy határoznak meg – természetesen nem teljesen ugyanabban a kontextusban a gyakorisági és az egyedi veszteségeket leíró eloszlások tekintetében –, ugyanakkor a közös vonás bennük az, hogy a tőkekövetelmény relatíve pontos meghatározásához olyan nagy mintára van szükség, mely a hitelintézet számára nem áll rendelkezésre. A szükséges minta nagyságát részben a veszteségeneráló folyamat határozza meg, azaz milyen gyakorisággal és mennyire vastag szélű eloszlásból származnak az adatok, ugyanakkor nem szabad megfeledkeznünk a szabályozó által determinált tőkekövetelmény definícióról sem, azaz éves időtávon, 99,9%-os valószínűséggel kell a tőkének fedezetet nyújtania a veszteségekre. Ez utóbbi fontos következménye, hogy a hitelintézet a gyakorlatban sosem rendelkezhet megfelelő mintaelemszámmal a tőkekövetelményének megfelelő becsléséhez. Ezt az alábbi logika mentén mutatjuk be. Tegyük fel, hogy évente átlagosan k darab veszteséget figyelünk meg. Ahhoz, hogy a szabályozó által meghatározott tőkekövetelményt közvetlenül meg tudjuk határozni, 1000 év aggregált veszteségét kell megfigyelniünk, azaz ekkor tudjuk a tőkét 99,9%-os biztonsággal közvetlenül meghatározni. Ez számunkra azt jelenti, hogy az egyedi veszteségeloszlásból $k \times 1000$ darab megfigyeléssel kell rendelkezniünk, tehát az adott intézménynek 1000 év adatára van szüksége. Ehhez képest mindössze 5 évnyi, azaz $k \times 5$ darab veszteséggel rendelkezik a tőkeszámításhoz.

A működési kockázati veszteségek eloszlása a szubexponenciális eloszláscsaládba tartozik, ami azt jelenti, hogy az éves aggregált veszteséget tipikusan 1 veszteség, a maximális veszteség határozza meg. Ebből adódik, hogy az egyedi veszteségeloszlás viselkedése a szélső tartományban fogja meghatározni az aggregált eloszlás VaR-ját, a tőkét.

A 99,9%-os konfidenciaszint melletti VaR meghatározása 5 éves időszorból a veszteségek $1000/5 = 200$ -szoros extrapolálását, és egyben parametrikus modell használatát teszi szükségessé. Az eloszlás extrapolálása olyan tartományba (a becsléni kívánt kvantilis tartományába), ami nem megfigyelhető és ezáltal visszamérhető az intézmény számára, óriási bizonytalanságot rejt magában. Ezt a problémát a későbbiekben extrapolációs problémaként hivatkozunk (Cope et al. [2009]).

A gyakorisági eloszlás választása

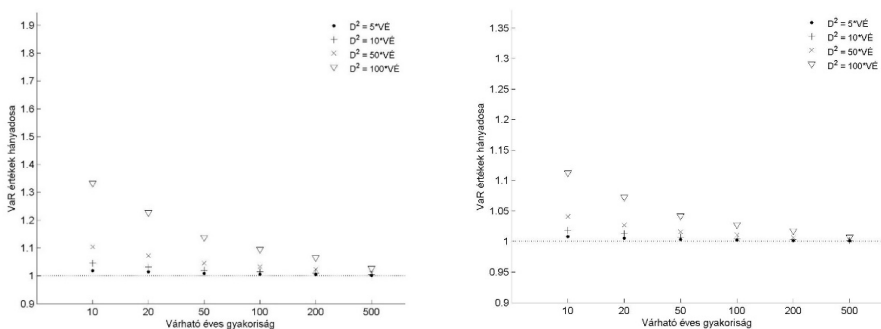
A gyakoriság modellezéséhez leginkább az ún. $(a, b, 0)$ típusú eloszláscsaládokat – így Poisson, binomiális és negatív binomiális eseteket – szokás használni működési kockázatok esetén. Az ezzel kapcsolatos egyszerű statisztikai

²⁷ $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \geq 1$.

(pontbecslések, illeszkedés vizsgálata) eszközök tárgyalása jelen cikkben nem cél, az érdeklődő olvasónak javasoljuk Gáll és Nagy [2007] cikkét.

Működési kockázatok esetén különösen kicsinek tekinthető a gyakorisághoz tartozó minták mérete, tekintettel arra, hogy egy-egy megfigyelt időszak csak egy újabb mintaelemet ad. Ezt a tényt figyelembe véve – bár matematikailag könnyen kezelhető lenne a három klasszikus gyakorisági eloszlás, sőt az azok közötti választás is könnyen megoldható²⁸, továbbá ezen eloszlások esetén jól használható rekurziós képlet is ismert az együttes veszteségeloszlás meghatározására (pl. Panjer [2006]). Ennélfogva azt javasolhatjuk általánosságban, hogy mindössze csak az egy paraméterrel rendelkező Poisson-eloszlást érdemes használni a működési kockázatok esetén, hiszen – ahogy ezt a későbbi példáinkban alá is támasztjuk – a tőkekövetelmény becslési hibáját érdemben nem a gyakoriságválasztás okozza a gyakorlatban.

A 2. ábrával azt illusztráljuk, hogy milyen esetekben számít a gyakorisági eloszlás alakja, illetve bármilyen tulajdonsága annak várható értékén túl. Az ábrákon azonos várható értékű (de különböző varianciájú) negatív binomiális és Poisson-eloszlások felhasználásával előállított tőkekövetelmények (VaR) hányadosát ábrázoljuk a gyakorisági eloszlások várható értékének függvényében. A lenti ábrán látható, hogy a gyakoriságok tekintetében négy különböző összehasonlítást végeztünk, miszerint az alkalmazott negatív binomiális eloszlás varianciája 5, 10, 50 és 100-szorosa volt a gyakoriság eloszlás várható értékének (az ábrán „ VE ”), és egyben a Poisson-eloszlás varianciájának (az ábrán „ D^2 ”). Megjegyezzük, hogy a VaR értékek számítása során a két megnevezett gyakorisági eloszlás mellett súlyossági eloszlásként lognormális eloszlást alkalmaztunk $\mu = 10$ és $\sigma = \{2, 2, 5\}$ paraméterekkel, azaz a jobb oldali ábra a lognormális eloszlás σ paraméterében különbözik a másiktól. Tekintettel arra, hogy lognormális eloszlás esetén a lapultság csak a σ függvénye, így a magasabb σ paraméterű eloszlás számít „vastagabb szélűnek”.



2. ábra. Negatív binomiális és Poisson eloszlások melletti VaR hányados a várható éves gyakoriság függvényében. A gyakoriságeloszlásokhoz tartozó lognormális eloszlások paraméterei rendre: $\mu = 10$ és $\sigma = \{2; 2, 5\}$. VE : várható érték, D^2 : szórás. Forrás: saját számítás.

²⁸Klugman [2004], valamint Arató [1997] és Gáll és Nagy [2007] alapján az alábbi hüvelykujj szabályt fogalmazhatjuk meg a gyakoriság eloszlások közötti választásra: ha $E\eta < D^2\eta$, akkor negatív binomiális, ha $E\eta = D^2\eta$, akkor Poisson, ha $E\eta > D^2\eta$, akkor binomiális eloszlás választása szükséges, ahol E és D^2 rendre a várható értéket és a varianciát jelölik.

A 2. ábráról két fontos következtetést vonhatunk le:

- A VaR hányados a várható éves gyakoriság függvényében konvergál 1-hez, azaz jellemzően csak a kis várható értékű gyakoriságok esetén fontos az, hogy milyen eloszlástípust választunk a gyakorisági eloszlás modellezésére. Érdeemes megjegyezni, hogy a Single Loss Approximation (SLA) módszerén alapuló VaR becslés egybecseng ezzel a megjegyzéssel, hiszen az azzal megadott tőkekövetelmény a gyakoriságeloszlástól már csak a várható értékén keresztül függ.
- Vastagabb szélű lognormális eloszlás alkalmazásával a VaR hányados közelebb van 1-hez azonos várható éves gyakoriság mellett, mint a kevésbé vastag szélű esetben. Ebből következik, hogy a nagyobb varianciájú negatív binomiális eloszlás jelentősége annál inkább csökken, minél vastagabb szélű a veszteség eloszlás.

A fenti eredmények kapcsán megjegyezzük, hogy a kérdéses (a gyakorisági eloszlás választásához kapcsolódó) hiba alapvetően eltörpül a veszteségeloszlás nem megfelelő választásából, valamint annak paraméterbecsléséből származó hibához képest. Ez az elsődleges oka annak, hogy jelen cikk és a szakirodalom súlypontját is sokkal inkább a veszteségeloszlás becslésével kapcsolatos problémák adják.

Az egyedi veszteségeloszlás választása

Az egyedi veszteségeket nemnegatív értékű valószínűségi változóval írhatjuk le, melyet egy alkalmas eloszláscsaládból kaphatunk. A különböző eloszláscsaládok közül a megfelelő kiválasztása, továbbá az illesztett eloszlás illeszkedése kiemelt szerepet tölt be a veszteségeloszlás modellezése szempontjából, különös tekintettel az eloszlás szélére vonatkozóan, ahol éppen azok az események helyezkednek el, melyek a leginkább meghatározzák a működési kockázati tőkekövetelmény értékét. A paraméterbecsléshez, az eloszlások szelekciójához, az illeszkedés jóságának vizsgálatához tipikusan a statisztikából jól ismert standard eljárásokat használhatjuk: illeszkedésvizsgálatokat (pl. χ^2 -próba, Kolmogorov-Smirnov és Anderson-Darling próbák stb.), grafikus eszközöket (pl. hisztogram, PP-plot, QQ-plot), pontbecslési módszerek (pl. momentumok módszere, maximum likelihood módszer, kvantilis módszer). Mivel ezen eljárások alkalmazása során nem vetődnek fel működési kockázatra jellemző specifikus problémák, így ezeket jelen írásban nem tárgyaljuk részletesen. Az érdeklődő olvasónak javasoljuk Gáll és Nagy [2007] cikkét, ahol az alkalmas eloszláscsaládok, valamint az illeszkedéshez kapcsolódó eszközök tárgyalása részletesebb operációs kockázatok esetére.

A megfelelő mintaelemszám tárgyalásakor már vizsgáltuk, hogy mennyire nagy mintaelemszám kell ahhoz, hogy a VaR értéket kis hibával tudjuk meghatározni. Ezen a ponton felmerülhet az a kérdés, hogy mennyire pontosan tudjuk meghatározni a működési kockázati tőkekövetelményt. A konkrét számítások és eredmények kapcsán felhívánk az érdeklődő olvasó figyelmét,

hogy vessen össze a 2. táblázatban közölt, a megfelelő mintanagyságra vonatkozó eredményeket a HUNOR adatbázis deskriptív statisztikáit tartalmazó 1. táblázattal, valamint vegye figyelembe, hogy a HUNOR adatok töredéke kerül csak felhasználásra a gyakorlatban, mivel külső adatokat jellemzően csak a széleloszlás paraméterbecslése során kevernek be az intézmények. A táblázatok összevetéséből adódik, hogy az intézmények számára rendelkezésre álló veszteségek száma messze elmarad attól, hogy az adatokból direkt kvantilis becsléssel határozzuk meg a VaR-t. Épp ezért csak a paraméteres modellek alkalmazása kerülhet szóba, ugyanakkor itt ütközünk az úgynevezett extrapolációs problémába: az illesztést csak a megfigyelhető tartományból származó információ alapján végezhetjük el, ugyanakkor a tőkekövetelmény az esetek túlnyomó többségében azon túl helyezkedik el. Továbbá a későbbiekben az illesztés jóságát is csak abban a tartományban tudjuk tesztelni, ahol megfigyelések állnak a rendelkezésünkre. A következő példában két olyan eloszlásillesztést mutatunk be, ahol a tesztelt eloszlások nagyon jól teljesítettek a megfigyelhető tartományban az illeszkedésvizsgálat során (lásd 3. táblázat), ugyanakkor a hozzájuk tartozó tőkekövetelmények mégis jelentősen különböznek (lásd 4. táblázat).

A vizsgálat elvégzéséhez egy 200 elemű (évi 40) mintát generáltunk lognormális eloszlásból²⁹, melyre Burr³⁰ és lognormális eloszlásokat illesztettünk maximum likelihood módszerrel³¹. A 3. táblázat alapján jól látható, hogy a generált mintára illesztett lognormális és Burr-eloszlások megfelelően illeszkednek, sem az illeszkedésvizsgálatra (Goodness of Fit – GoF) alkalmas Kolmogorov-Smirnov, sem az Anderson-Darling tesztek p értékei alapján nem tudjuk elvetni a nullhipotézist.

Illesztés	K-S teszt p érték	A-D teszt p érték
Lognormális	0,9311	0,9232
Burr	0,9454	0,9162

3. táblázat. Az illesztett eloszlások GoF tesztjeinek p értékei.

Forrás: saját számítás.

A 4. táblázat a generált 200 elemű mintából számolt VaR értékeket, valamint a 3. táblázat szerint jól illeszkedő eloszlások VaR értékeit foglalja össze különböző megbízhatósági szintek mellett.

p	igazi VaR	Burr VaR	Lognormális VaR
0,9	4 934	3 310	3 643
0,99	67 230	48 797	37 202
0,999	453 877	599 296	203 410
0,9999	2 185 907	7 159 036	823 549
0,999975	5 071 096	31 789 076	1 741 037

4. táblázat. A generált minta, valamint az illesztett eloszlások VaR értékei. Forrás: saját számítás.

²⁹ $\mu = 5,3$ $\sigma = 2,5$ paraméterek mellett.

³⁰A Burr-eloszlás egy olyan folytonos egymódusú eloszlás, melyet gyakran alkalmaznak kockázatkezelési, aktuáriusi és opcióárazási modellek fejlesztése során, továbbá ökonometriai modellekben való felhasználása is elterjedt. A Burr-eloszlás sűrűségfüggvénye a következő: $f(x, c, k) = ckx^{c-1}/(1+x^c)^{k+1}$, ahol c és k pozitív valós paraméterek. Amennyiben $c = 1$, úgy a Pareto-eloszlást kapjuk.

³¹Számos hasonló példa található a szakirodalomban, lásd pl. Mignola et al. [2006] cikke.

A 4. táblázat utolsó sorában található percentilis alapját a Single Loss Approximation (Böcker, K., Klüppelberg, C. [2005]) adja, amely lehetőséget teremt arra, hogy az aggregált eloszlás tőkekövetelményhez használt 0,999-es percentilisét az éves gyakoriságok várható értékének függvényében (esetünkben ez 40) az egyedi veszteséeloszlás percentilisének (esetünkben 0,999975) megfeleltessük. Másképp fogalmazva, (modell feltételektől eltekintve) állíthatjuk, hogy az aggregált eloszlás 0,999 percentilisének megfelelő értéket az egyedi veszteséeloszlás 0,999975. percentilise adja a fenti példában.

A 4. táblázat alapján világosan látható, hogy a szabályozó által kért 99,9%-os megbízhatósági szint mellett is jelentősen eltér a két illesztett eloszlás VaR értéke (közel 3-szoros különbség), valamint a szabályozó által kért megbízhatósági szint felett ez az eltérés akár 20-szoros is lehet. Továbbá az is látható a táblázatból, hogy a két jól illeszkedő eloszlás közül a Burr alapján kapott VaR erősen felülbecsli, míg az illesztett lognormális alapján kapott VaR erősen alulbecsli a valós VaR értéket.

Az egyedi veszteséeloszlás választásával kapcsolatos problémát és a kapcsolódó bizonytalanságot a tőkekövetelmény szintjére vonatkozóan a következőkben egy újabb példán keresztül is szemléltetjük. Ha a cikk 1. táblázatát újra áttekintjük, látható a p értékek alapján, hogy a Belső csalás (ET1) eseménytípus esetén mondható legjobbnak az illeszkedés, így azt gondolhatjuk, hogy legalább ebben a kategóriában egyértelmű, mennyi tőkét kell egy adott hitelintézetnek képeznie. A következő szemléletes példa az előzőekben említett extrapolációs probléma okozta instabilitásra világít rá: egy ugyanolyan jó illesztés ugyanazon eloszláscsaládon belül is akár 100%-os eltérést okozhat a tőkében.

Tegyük fel, hogy egy hitelintézet által a HUNOR külső adatbázis alapján meghatározott veszteséeloszlás megegyezik a saját belső adatainak veszteséeloszlásával, ugyanakkor az események éves gyakorisága eltérő: mindössze 4 évente egyszer ($\lambda = 0,25$) következik be belső csalás az adott intézményben. Az 5. táblázat tartalmazza a Belső csalás kategória MLE becslését, mely alapján látható, hogy kvantilis-kvantilis illesztéssel több olyan hasonlóan jó becslés is adható, melyek KS vagy AD értékei az MLE becsléssel azonos konklúziót adnak, ráadásul nagyon magas (> 0.9) p -értékek mellett.

Becslés típusa	Való- színű- ség1	Való- színű- ség2	μ	σ	p érték KS	p érték AD	Tőke- követelmény
Maximum likelihood	-	-	15,1432	2,7453	0,9877	0,9911	5 477 569 095
Kvantilis-kvantilis	0,30	0,84	15,0983	2,9008	0,9932	0,9912	7 910 241 101
Kvantilis-kvantilis	0,27	0,78	15,0492	2,5755	0,9876	0,9666	3 178 279 311

5. táblázat. Egymással azonosan jó becslések, melyek jelentősen különböző tőkekövetelményt eredményeznek. Forrás: saját számítás.

Az 5. táblázat kiemelt példáin túl még számos olyan jó becslést lehet adni csak a lognormális eloszlásra (tehát más eloszláscsaládot nem is vizsgálva), amely a fentiekől eltérő tőkét eredményez. Az általunk vizsgált esetek kö-

zül³² azokat kiválasztva, ahol mind a KS-hez, mind az AD-hez tartozó p érték a 0,9-et meghaladta, a legkisebb becsült tőkekövetelmény 2,31 milliárd forint, míg a legnagyobb becsült tőkekövetelmény 14,79 milliárd forint volt. Ez egy 6-7-szeres különbséget jelent a tőkekövetelményben, miközben a becslés eredménye akár tankönyvi példa is lehetne a 0,9 fölötti p értéknek köszönhetően.

Adatgyűjtési küszöb

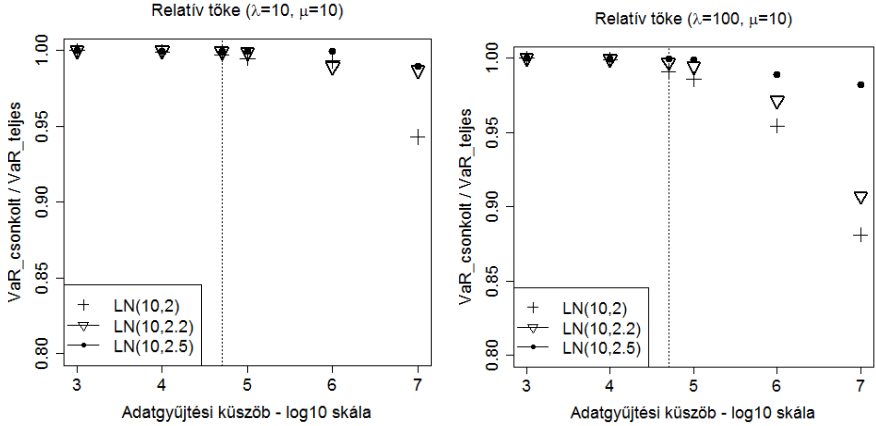
Az intézményekben csak egy adott szint fölötti veszteségek kerülnek be a működési kockázatok adatbázisába (összhangban a Basel II ajánlásokkal). Ennek legfőbb oka az, hogy a veszteségek súlyosságától függetlenül minden egyes esemény gyűjtése jelentős erőforrást igényel a hitelintézetben. A fentieknek megfelelően egy szűrt mintánk van, ahol a szűrés feltételt a megadott limit (HUNOR esetén 50 ezer HUF) jelenti. Ekkor, ha körültekintően akarunk eljárni, akkor az egyedi veszteségeknél és gyakoriságoknál ezen szűrés feltételt figyelembe véve kell elvégezni a paraméterbecsléseket (akár momentumok módszerének alkalmazása esetén, akár maximum likelihood becslés esetén). Ezt a korrekciót a maximum likelihood módszerre illusztráljuk is, az érdeklődő olvasónak pedig javasoljuk Klugman et al. [2004] és Panjer [2006] műveit.

A HUNOR adatkonzorcium tagjai csak az 50 ezer forint feletti veszteségeket kötelesek továbbítani a HUNOR adatbázisba. A fentiek alapján felmerülhet a cikkünk fő témája kapcsán az a kérdés, hogy a tőkekövetelmény számítása szempontjából van-e jelentősége a kérdéses küszöb alatti veszteségeknek. Továbbá szintén felmerülhet az a kérdés, hogy a kérdéses küszöb alatti veszteségek eldobása milyen hatást gyakorolhat a paraméterbecslésre. A küszöb alatti veszteségek tőkekövetelményre gyakorolt hatásának elemzését Mignola et al. [2006] ötlete alapján a következő Monte Carlo szimulációs kísérlet segítségével végeztük el:

1. Poisson-folyamatból λ éves gyakorisággal lognormális egyedi veszteségeket generálunk;
2. az előre rögzített K küszöb fölötti veszteségekből meghatároztuk az éves aggregált veszteséget;
3. az 1-2. lépéseket megismételtük 10 000-szer, és meghatároztuk az aggregált veszteségek eloszlásának $p = 0,999$ konfidenciaszint melletti VaR_K értékét;
4. képeztük a $\text{VaR}_K/\text{VaR}_0$ hányadost, ahol VaR_K a K , míg VaR_0 a 0 küszöbértékhez tartozó kockázatosított érték.

A szimulációs eredményeinket a 3. ábra tartalmazza a küszöbérték (K) függvényében.

³²Kvantilis-kvantilis becslés, ahol az első valószínűség a $[0,1;0,3]$, míg a második valószínűség a $[0,7;0,9]$ intervallumban vehet fel értéket.

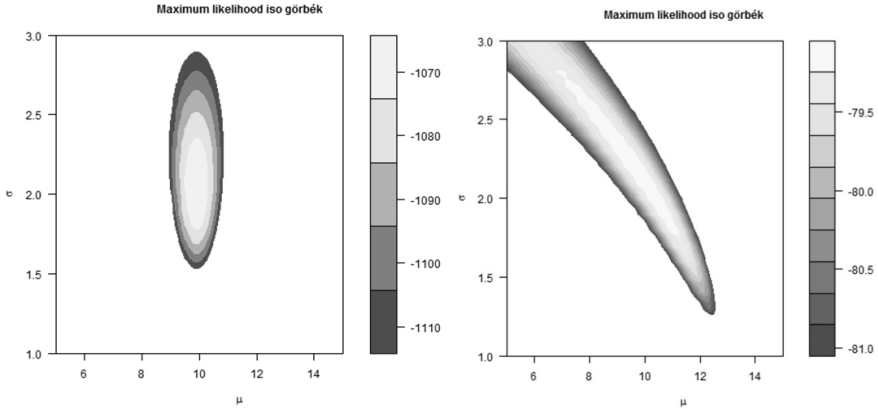


3. ábra. A relatív tőkekövetelmény alakulása az adatgyűjtési küszöb (K) függvényében.
 Forrás: saját számítás.

A 3. ábra az adatgyűjtési küszöb függvényében (logaritmus skálán) mutatja a relatív tőkekövetelmény (VaR_K/VaR_0) alakulását. A szimuláció során az egyik ábra előállításához $\lambda = 10$, míg a másik esetben $\lambda = 100$ paraméterű Poisson-eloszlást alkalmaztunk, továbbá a lognormális eloszlás μ paraméterének értéke a két ábra 3-3 esete kapcsán egységesen 10, míg a σ paraméter a $\{2; 2,2; 2,5\}$ halmazból vesz fel értéket. A két ábrán látható szaggatott vonal a Magyarországon tipikus 50 ezer forintos adatgyűjtési küszöböt jelenti. A 3. ábrából két következtetést vonhatunk le:

- minél kevésbé vastag szélű az eloszlás, annál inkább számít az adatgyűjtési küszöb, azaz kisebb σ mellett romlik a becslés;
- minél nagyobb az események éves gyakorisága, annál inkább számít az adatgyűjtési küszöb, azaz a két ábrán az eloszlások páronkénti (különböző gyakoriság, de ugyanazon egyedi veszteséeloszlás) összehasonlítása mutatja, hogy ugyanazon küszöb mellett nagyobb gyakoriság esetén jobban alábecsüljük a tőkét.

A következő vizsgálandó kérdést a küszöb alatti veszteségek kiszűrésének az eloszlások paraméterbecslésére gyakorolt hatása adja. Az magától értetődő, hogy az egyedi veszteséeloszlás becslésének bizonytalansága a csökkenő mintaelemszám miatt bizonyos mértékben nő, ami a becsült tőkekövetelmény növekvő instabilitásához vezet. Ugyanakkor az továbbra is kérdés a jelen cikkben már említett extrapolációs probléma ismeretében, hogy mennyire kell az egyedi veszteséeloszlás becslésének jóságával foglalkoznunk. A GoF tesztek csak a megfigyelhető tartományra korlátozódnak, és az előzőekben (3. és 4. táblázatok) bemutatottak alapján a becsült tőkekövetelmény egy jó illesztés esetén is instabil lehet. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy az adatgyűjtési küszöb ugyan közvetlenül kis hatással van a becsült tőkekövetelményre, viszont jelentős hatással bírhat az egyedi veszteséeloszlás paramétereinek a becslésére.



4. ábra. Lognormális eloszlásból ($\mu = 10$ és $\sigma = 2$) generált véletlen számokra illesztett lognormális és feltételes lognormális eloszlás log-likelihood függvényének izofelülete. A második ábra esetén küszöbértéknek 200 ezer forintot feltételeztünk. *Forrás:* saját számítás.

Feltétel nélküli eloszlások paramétereinek MLE becslése esetében a becült paraméterek aszimptotikusan normális eloszlásúak és korrelálatlanok, és a becslés szórásában a Fisher-féle információs mátrixának inverze $[I(\Theta)]^{-1}$ játszik kulcsszerepet³³ (Lynch [2007]). A szokásos lognormális eloszlás esetén amennyiben feltételes eloszlásról beszélünk, úgy az információs mátrix megváltozik³⁴ és a Cramer-Rao féle korlát a küszöb függvényében átalakul (Roehr [2002]). Az előbbi következménye, hogy csonkolt (feltételes) eloszlás használata esetén a log-likelihood függvény izofelülete eltorzul, megnyúlik, keskeny formájúvá válik (melyet a 4. ábra szemléltet), emiatt a becslés során instabil helyzetet eredményez (Frachot et al. [2004]).

A fentiek következménye, hogy a konfidenciaintervallumok kitágulnak, információértéküket pedig fokozatosan elveszítik. Az eredmények kapcsán jogosan merül fel a kérdés, hogy mennyire bízhatunk, vagy bízhatunk-e egyáltalán a becült paraméterekben. Léteznek javaslatok, robosztus becslések a probléma bizonyos szintű kezelésére, ilyen pl. Cope [2011] munkája, ugyanakkor itt nem célunk ennek bemutatása, elsődlegesen a probléma természetére kívántuk felhívni a figyelmet.

GPD szimulációs elemzés

Az extrémek vizsgálatának egyik eszköztára³⁵ (Embrechts et al. [2003]) a Peaks Over Threshold (POT) módszer, ami szerint az eloszlás széle egy bizonyos u küszöbön túl az általánosított Pareto-eloszláshoz (GPD) közeleli. Bár a név azt sugallja, hogy itt mindig vastag szélű eloszlásokról van szó, tudni

³³Az MLE klasszikus becslési tulajdonságait nem célunk természetesen tárgyalni ebben a cikkben. Ezeket számos statisztikai monográfia tartalmazza.

³⁴Vegyes tagok jelennek meg az információs mátrix inverzében, tehát a becült paraméterek korrelálttá válnak.

³⁵Lásd még GEV – generalized extreme value distribution.

kell, hogy az eloszlás szélének viselkedését egyetlen paraméter írja le (ξ , azaz shape parameter vagy tail index), ami bizonyos érték mellett pontosan az exponenciális eloszlást adhatja vissza. A gyakorlatban a hitelintézetek a működési kockázati tőkekövetelmény számítása során gyakran alkalmazzák a POT módszert annak érdekében, hogy a veszteségeloszlást két részletben modellezhessék: a gyakori és kevésbé súlyos eseményekre a kiválasztott u küszöb alatt jellemzően egy kevésbé vastag szélű eloszlást (pl. lognormális), míg a ritka és súlyos veszteséget jelentő eseményekre a küszöb felett egy vastag szélű (pl. GPD) eloszlást illesztnek. A veszteségeloszlás két részletben történő modellezésének célja kettős:

- A leggyakrabban használt becslési eljárás (MLE) jellemzően olyan paramétereket határoz meg, mely mellett az illesztett eloszlás összességében a legjobban illeszkedik az adatokra: természeténél fogva ott fog a legjobban illeszkedni az eloszlás, ahol a legtöbb adat van, és nem az eloszlás szélén, ahol jellemzően csak néhány megfigyeléssel rendelkezik a hitelintézet, melyek ugyanakkor a leginkább befolyásolják a tőkekövetelmény szintjét. Ennek a jelenségnek a hatását lehet tompítani a két részletben történő modellezéssel.
- A kevésbé vastag szélű eloszlások, melyek jól alkalmazhatóak a gyakori és kevésbé súlyos események modellezésére, jellemzően nem tudják megragadni a veszteségeloszlás szélét, emiatt fennáll annak a veszélye, hogy a 99,9%-os percentilis alulbecsli a szükséges tőke mértékét.

A következőkben azt fogjuk vizsgálni, hogy a szakirodalomban is javasolt, valamint a gyakorlatban is alkalmazott GPD eloszlás felhasználásával mekkora a bizonytalanság egy hitelintézet működési kockázati tőkekövetelményének meghatározása kapcsán. A kérdés megválaszolásához szimulációs kísérletet végzünk azzal a céllal, hogy a modell keretein belül megismerjük a GPD eloszlás paramétereinek eloszlását, valamint hatását a működési kockázati tőkekövetelményre. A kísérletben $n = 1000$ elemű, küszöbön túli mintákat fogunk generálni adott paraméterű GDP eloszlásból, amely esetén a paraméterek reálisak abban az értelemben, hogy előzetesen a HUNOR adatbázison kalibráltuk őket. A kísérletek során a szimulációk³⁶ száma 100 ezer, melyek során számos változó befolyását vizsgáljuk a tőkekövetelményre, így a legtöbb esetben a változóknak csupán két értékét tudtuk egyidőben megvizsgálni, és következtetést levonni arra vonatkozóan, hogy melyik állapot a kedvezőbb. A kísérletben tehát az előre definiált paraméterekkel GPD eloszlású mintát generáltunk, majd MLE és PWM³⁷ módszerekkel visszabecsültük a GPD paramétereit, és azok felhasználásával meghatároztuk a VaR értéket. A vizsgálati szempontok a következők:

³⁶Felhívjuk az érdeklődő olvasó figyelmét, hogy a szimuláció során az SLA (Single Loss Approximation) keretrendszer alkalmaztuk a cikkben eddig alkalmazott LDA (Loss Distribution Approach) helyett, mivel minden egyes VaR értéket csak egy újabb időigényes szimulációval, vagy Fourier transzformációval tudnánk előállítani.

³⁷Probability Weighted Moments – súlyozott momentumok módszere.

- ξ (shape) paraméter nagyságrendjének a hatása a tőkére
- β (scale) paraméter nagyságrendjének a hatása a tőkére
- becslési módszer (MLE, PWM) hatása a paraméterekre és a tőkekövetelményre.

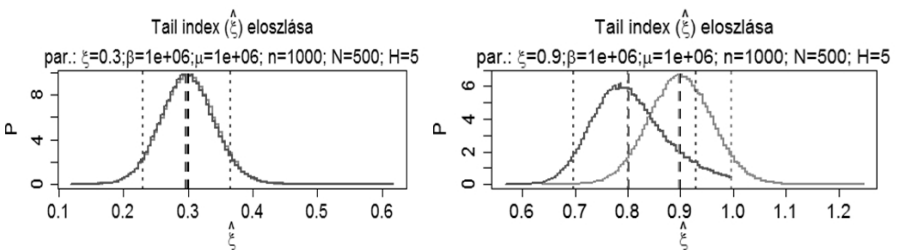
A kísérlet során $N = [50, 500]$ értékkel dolgoztunk, habár itt csak az $N = 500$ -hoz tartozó eredményeket mutatjuk be. A H paraméter jelenti az intézmény összes (külső adatbázis nélküli) veszteségszámának és a küszöbön túli veszteségek számának az arányát, melynek értéke a bemutatott kísérletekben egységesen öt. Az eredményeinket összefoglaló ábrákon a későbbiekben a szürke szín az MLE, míg a fekete szín a PWM becslésekhez tartozó eredményt jelenti, továbbá a paraméterek vagy jellemzők igazi értékét minden esetben függőleges vastag szaggatott vonal jelzi, míg a vékony szürke és fekete függőleges szaggatott vonalak az MLE és PWM becsléseket reprezentálják. Az ábrák tartalmaznak még szürke és fekete függőleges pontozott vonalakat, melyek 90 százalékos biztonsággal tartalmazzák az adott paramétert vagy jellemzőt az MLE és a PWM becslés vonatkozásában.

A már említett tail index (ξ) becslésének eloszlását (pontosabban annak sűrűségfüggvényének a becslését) az 5. ábra mutatja (terjedelmi okok miatt csak két tail index melletti eloszlást mutatunk be). A grafikonok előállításakor a tail index kivételével minden paramétert³⁸ rögzítettünk.

A szimulációs eredményekből a következő következtetések vonhatóak le:

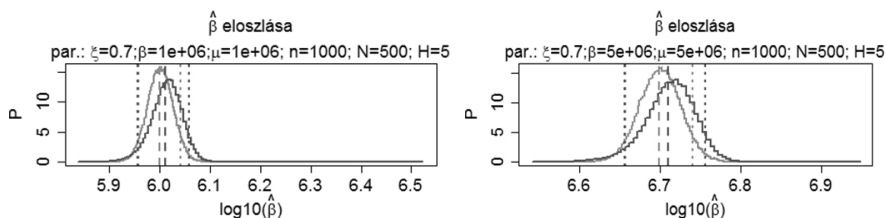
- Az MLE becslés (aszimptotikusan) torzítatlanságát tükrözi vissza a szimuláció, míg a PWM becslőfüggvény alulbecsli az igazi paramétert. A torzítás mértéke annál nagyobb (PWM esetén), minél közelebb van az igazi paraméter 1-hez.
- Az MLE becslés szimmetrikus, míg a PWM jobbra ferde.
- Minél közelebb van ξ értéke az 1-hez, annál inkább különbözik az MLE és a PWM becslés.

A scale paraméter (β) becslésének eloszlását a 6. ábra szemlélteti két rögzített érték mellett.



5. ábra. A tail index becslésének eloszlása (az eloszlások sűrűségfüggvényeinek becslései).
Forrás: saját számítás.

³⁸A grafikonokon a H paraméter értékeként a küszöbön túli veszteségek teljes mintán belüli arányának reciprokát tüntettük fel. Azaz $H = 5$ a grafikonon 20%-os arányt jelent.



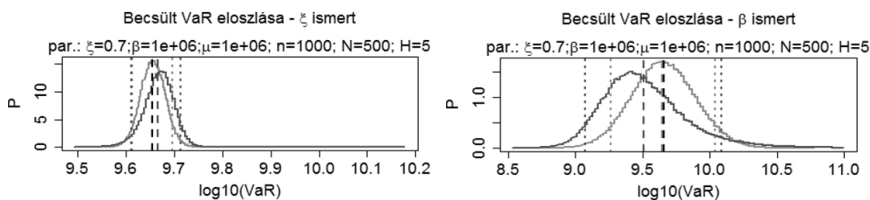
6. ábra. A scale paraméter becslésének eloszlása logaritmus skálán. *Forrás:* saját számítás.

A következőket lehet megállapítani a szimuláció eredményei alapján:

- A scale paramétert a PWM becslőfüggvény rendre felülbecsli, míg az MLE aszimptotikus torzítatlanságát illusztrálja az eredmény.
- A 90%-os konfidencia sáv a PWM esetében szélesebb.
- A nagyobb β nagyobb szórással is jár, de a relatív szórások már megegyeznek.

Számunkra ugyanakkor a legfontosabb kérdés, hogy a becslési hiba következtében hogyan alakul a tőkekövetelmény. A korábban vázolt szempontok mindegyike befolyásolja a tőkekövetelményt, így itt sem teszünk közzé minden eredményt, csak az általunk legrelevánsabbnak tartottakat, azaz mind a ξ , mind a β paraméter becslésének hibáját figyelembe véve mutatjuk be az eredményeinket. A 7. ábra³⁹ esetén az első grafikon a valódi (azaz ismert, nem becsült) ξ paraméter mellett mutatja a VaR eloszlását, melyen így a β becslése okozta bizonytalanság hatása látszik, míg a második grafikon a valódi β mellett (minden más paraméter értéke változatlan), azaz utóbbi a tail index becslésének VaR-ra gyakorolt következményét szemlélteti.

A 7. ábra két grafikonjának összehasonlítása alapján jól látszódik a VaR szélesebb konfidencia intervalluma alapján, hogy ξ becslésének hibája lényegesen nagyobb hatással van a tőkére, mint β becslésének hibája. Ez megerősít minket abban a hitünkben, hogy a Pareto-eloszlás illesztése során ξ becslésre kell nagyobb hangsúlyt fektetni, illetve a VaR becslésben elkövetett hiba elsődlegesen a ξ becslésében elkövetett hibára vezethető vissza.



7. ábra. A VaR eloszlása logaritmus skálán. *Forrás:* saját számítás.

³⁹Természetesen több esetre is elvégeztük az elemzést, ugyanakkor a terjedelmi korlátok miatt csak két szemléletes VaR eloszlást mutató grafikont közlünk.

4 Összegzés

Cikkünkben a működési kockázati tőkekövetelmény számítására alkalmas AMA modellek instabilitási problémáira kívántuk felhívni az érdeklődő olvasó figyelmét. A problémakörnek aktualitást ad az a tény, hogy a Bázeli Bizottság a Bazel IV javaslatcsomaggal várhatóan kivezeti a fejlett mérési módszert, mint tőkekövetelmény számítására alkalmas eszközt a működési kockázatok tekintetében. Célunk volt, hogy a cikkünkben bemutatott, a tőkekövetelmény instabilitását eredményező problémákkal rávilágítsunk arra, hogy egyes modellezési nehézségek az AMA modellek inherens részei, ezért teljességgel nem eliminálhatóak, így a Bázeli Bizottság szemszögéből valóban egyszerűbb egy új módszertant kidolgozni a tőkekövetelmény számítására, mintsem orvosolni a jelenlegi hiányosságait.

Cikkünkben bemutatásra került az alkalmas mintaelemszám problémája, mely szerint a kívánt biztonsági szintnek való megfeleléshez egy hitelintézet soha nem rendelkezhet kellően nagy mintával. Továbbá bemutattuk a modell-szelekciós nehézségeket is: egy eloszlás illeszkedésének megfelelését csak a megfigyelhető tartományban tudjuk tesztelni. Emiatt cikkünk eredménye szerint két hasonlóan jól illeszkedő eloszlás segítségével akár többszörös eltérések is tapasztalhatóak a tőkekövetelmény mértékében. Hasonló problémával állunk szemben a cikkünkben bemutatott, az intézmények által alkalmazott adatgyűjtési küszöb miatt. A kérdéses küszöbérték hatására feltétel nélküli eloszlás helyett feltételelssel kell dolgoznunk, mely esetén a loglikelihood függvény izofülete eltorzul (cikkünkben lognormális eloszlás esetére mutattuk be), melynek eredményeképp a paraméter konfidenciaintervalluma kitágul, és emiatt veszít információértékéből. Továbbá cikkünk eredményei segítségével felhívtuk a figyelmet a gyakorlati eloszlás megválasztásával kapcsolatos hibalehetőségre: minél inkább magasabb a várható érték, a konkrét eloszlás fontossága csökken, ugyanakkor a várható érték alacsony tartományában már számít, hogy Poisson vagy negatív binomiális eloszlás alkalmazása mellett döntünk.

Irodalom

1. Arató, M., [2001]: *Nem-életbiztosítási matematika*, egyetemi tankönyv, ELTE, Eötvös Kiadó, Budapest.
2. Aue, F., Kalkbrenner, M. [2006]: LDA at work: Deutsche Bank's approach to quantifying operational risk. *Journal of Operational Risk*. 1(4):49–93.
3. Baud, N., Frachot, A., Roncalli, T., [2002]: How to Avoid Over-estimating Capital Charge for Operational Risk? Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais. France.
4. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) [2014]: Operational Risk – Revisions to the simpler approaches. Consultative Document. <https://www.bis.org/publ/bcbs291.pdf>. Letöltés ideje: 2017.12.08.
5. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) [2016]: Standardised Measurement Approach for Operational Risk. Consultative Document. <https://www.bis.org/bcbs/publ/d355.pdf>. Letöltés ideje: 2017.12.10.

6. Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) [2017]: Basel III: Finalising post-crisis reforms. <https://www.bis.org/bcbs/publ/d424.pdf> Letöltés ideje: 2018.01.15.
7. Böcker, K., Klüppelberg, C. [2005]: Operational VAR: a closed-form approximation. *Risk*. 2005. 90–93.
8. Bugár, Gyöngyi [2017]: Mérföldkövek a befektetési kockázat modellezésében. *Sigma* 48(1-2):19–32.
9. Cope., E. W, Mignola, G., Antonini G., Ugoccioni. R. [2009]: Challenges and pitfalls in measuring operational risk from loss data. *Journal of Operational Risk*. 4(4):3–27.
10. Cope, E. W. [2011:] Penalized likelihood estimators for truncated data. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 01/2011.
11. CRR (Capital Requirement Regulation) – az Európai Parlament és a Tanács 575/2013/EU rendelete a hitelintézetekre és befektetési vállalkozásokra vonatkozó prudenciális követelményekről és a 648/2012/EU rendelet módosításáról
12. Dahlen, H., Dionne, G. [2008]: Scaling Models for the Severity and Frequency of External Operational Loss Data. *Journal of Banking and Finance*. 34(7):1484–1496.
13. Embrechts, P., Furrer H., Kaufmann R. [2003]: Quantifying regulatory capital for operational risk. *Derivatives Use, Trading and Regulation*. 9. 217–233.
14. Ergashev, B., Pavlikov, K., Uryasev, S., Sekeris, E., [2012]: Estimation of Truncated Data Samples in Operational Risk Modeling, http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2193493
15. European Banking Authority (EBA) [2015]: Final Draft RTS on AMA assessment for operational risk. <https://www.eba.europa.eu/documents/10180/1100516/EBA-RTS-2015-02+RTS+on+AMA+assessment.pdf>. Letöltés ideje: 2017.12.10.
16. Frachot, A., Moudaoulaud, O., and Roncalli, T. [2004]: Loss distribution approach in practice. in M. K. Ong (Ed.), *The Basel*. 369–398.
17. Gáll, J., Nagy, G. [2007]: A működési kockázat veszteségeloszlás-alapú modellezése (Loss Distribution Approach – LDA), *Hitelintézeti Szemle*, 6(4): 386–412.
18. Klugman, S., Panjer, H. and Willmot, G., [2004]: *Loss Models, From Data to Decision*. Wiley, Hoboken, New Jersey.
19. Lynch, S. M. [2007]: *Introduction to Applied Bayesian Statistics and Estimation for Social Scientists*. Springer-Verlag, New York.
20. Mikosch, T. [2006]: Copulas: Tales and facts, *Extremes*, 9(1):3–20.
21. Mignola, G., Ugoccioni, R. [2006]: Sources of uncertainty in modelling operational risk losses. *Journal of Operational Risk*. 1(2):33–50.
22. Panjer, H., [2006]: *Operational Risk, Modeling Analytics*. Wiley, Hoboken, New Jersey.
23. Roehr, A. [2002]: Modelling Operational Losses. *Algo Research Quarterly* 53. 5/2. 53–64.

INSTABILITY PROBLEMS IN AMA MODELS

The Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) planned to review the non-model based capital requirement calculation methods in case of operational risk since 2010 and the model based Advanced Measurement Approach (AMA) was also criticized in the literature in recent years. Many problems presented by professionals and researchers are due to some instability issues of the capital requirement calculated in LDA models. However, the difficulty of validation and the benchmarking of the results are criticized as well which are mostly caused by the diversity of methodologies used in such models. In this paper we discuss a notion of instability regarding capital requirement, where instability is used as a set of different (estimation or sensitivity) problems. The main purpose of this article is to present the main deficiencies of capital estimations in LDA models within the AMA framework, for which we show some empirical examples as well as simulations, which can lead to the instability of the capital requirement. We show the sensitivity of the capital requirement estimations to extreme loss events, we discuss problems caused by the small sample sizes, the effect of certain information losses realised during the collection of loss data and selection problems of distributions for frequency and severity.

Our estimations on the sensitivity of the capital requirement to extreme loss events were based on the Hungarian Operational Risk Database (HUNOR) in which the recorded loss events are shared anonymously among the members of the data consortium. We used the classification of loss events in the database according to the event types defined in Article 324 of the Capital Requirements Regulation (CRR) and fitted lognormal distributions on data in each class. For the fitting of distribution, an adequately long time interval was chosen, which is short enough in the sense that one can assume that the distributions at issue are unchanged over the specified interval. Due to data collection practice only loss events above a predefined materiality threshold have to be recorded in HUNOR, thus we needed to work with truncated data.

We chose to shift data to 0 in every segment before the fitting of the distribution rather than fitting conditional probability distribution on the truncated data based on the methodology of Baud et al. [2002] and Ergashev et al. [2012]. To estimate the parameters Maximum Likelihood (ML) method was applied and goodness-of-fit was tested with Kolmogorov-Smirnov and Anderson-Darling tests beside the usual graphical methods (i.e. histograms, Q-Q plots). According to the expectations of the regulator the calculated capital requirement for operational risk has to cover all losses within one year period at a confidence level of 99,9% so one needs to put special focus on the (right) tail behaviour of the distribution. In some categories the lognormal distribution was not accepted by the tests. In two further categories though the tests accepted the lognormality assumptions, the tails seems to be fatter in one case compared to the fitted one, whereas the for the other the tail of the fitted distribution seems to be satisfactory.

Several publications discussed the size of the error of VaR (i.e. capital requirement) estimations and the sufficient sample size in order to obtain a reasonable error. Regarding to the above-mentioned results the only way to have enough observations for modelling purposes is to use external data together with internal data in similar market situations to the ones analysed by us.

For frequency distribution modelling in case of operational risk the so-called $(a, b, 0)$ type distribution family – including the Poisson, binomial and negative binomial distributions – are used in most cases. Sample size for operational risk frequency modelling can be considered small as one more observed period gives only one observation to the sample. It is well known that the three classical frequency distributions are easy to handle statistically and methods are also known for the selection between them, moreover one can also apply the Panjer [2006] recursion

for the aggregate loss distribution. However, we recommend to use in case of operational risk modelling only the Poisson-distribution. We examined the relationship between the VaR ratio and the expected value of the frequency distributions where the VaR ratio is equal to ratio of VaR values estimated using Poisson and negative binomial distributions as frequency distributions and lognormal distribution as a severity distribution in both cases. Based on our results we concluded that the type of frequency distribution is important only if the expected frequency is relatively low and the importance of the negative binomial distribution with higher variance is decreasing with more fat-tailed severity distributions.

Loss events usually modelled by non-negative continuous random variables. As we mentioned above the selection of an appropriate distribution and is crucial, in particular the tail behaviour is also of high importance, since that part corresponds to those loss events, which determine the level of capital requirement for operational risk the most. The sufficient sample size to estimate the VaR with relatively small error was already discussed but further questions may arise concerning the accuracy of the estimation regarding the operational risk capital requirement. When we compare the available sample size from database HUNOR and the necessary sample size based on Frachot et al. [2004] it can be seen that the number of losses available for modelling purposes to the institutions is far from sufficient, the determination of VaR with direct quantile estimation is clearly not possible. We encountered a so-called extrapolation problem: fitting a distribution can only be done on the basis of information from the observable range of losses, however, in most cases the capital requirement is beyond that range. Clearly, the goodness-of-fit tests can only use the information from the same observed range. To draw the attention to the consequences of extrapolation problem we showed an example where we tested the goodness of fit of two (test) distributions to the data. Both distributions were accepted by the tests (with high p -values), however, the corresponding capital requirements calculated from the two fitted distributions are rather different. In our example, we generated a sample of 200 observations (40 on annually basis) from a lognormal distribution, then both lognormal and Burr distribution did fit to the data by the tests. Based on our results a 20 times difference can be seen between VaR values estimated from the two fitted distributions at the required regulatory level of confidence. We also showed that VaR derived from the fitted Burr distribution highly overestimates the real VaR calculated on the generated sample while high underestimation can be seen in case of the fitted lognormal distribution.

To analyse extreme events the Peak Over Threshold (POT) method is an often used method as the tail distribution above a certain threshold u . The Generalized Pareto distribution (GPD) is often used in such cases. The tail behaviour can be characterized by a single parameter (say, ξ , i.e. shape parameter or tail index). In practice, the POT method is often used by credit institutions in capital requirement calculations in order to model the loss distribution in two parts: frequent and less severe events under a certain threshold u are typically modelled with a distribution showing less fat-tail behaviour (e.g. lognormal) while rare and severe events are modelled with distributions showing more fat tail behaviour (e.g. GPD). Those loss events, which determine the level of capital requirement for operational risk can be found in the (right) tail part of the distribution which generally cannot be captured with the rest of normal loss events in the body part of the distribution. So fitting only one probability distribution to the whole sample is often not satisfactory. Taking into account this problem the aim of the modelling the two (body and tail) parts of the distribution separately is to capture rare and severe events that are independent from the mass of typical loss events in order to avoid the underestimation of the capital requirement. In this paper we analysed the uncertainty connected to the estimation of operational risk capital requirement using GPD distribution which is widely used in practice and recommended by many au-

thors in the literature. Samples with 1000 observations were generated above a certain threshold u from a GPD case with given parameters, which were calibrated on database HUNOR. Then GPD distributions were fitted using ML and PWM (Probability Weighted Moments) methods in order to analyse the distribution of the GPD's parameters as well as the effect on capital requirement. We found that the estimation of the tail index (ξ) seems to be (asymptotically) unbiased in case of ML method while significant underestimation of the real parameter can be seen using PWM method. The degree of the underestimation became higher as the real value of ξ was tending to 1. Furthermore, the closer the value of ξ is to 1 the more is the difference of ML and PWM results. According to the results regarding the uncertainty of capital requirement calculation we showed that the estimation error of ξ has a significantly higher impact on capital requirement than estimation error of β (scale parameter). This confirms that more attention has to be paid on estimating ξ when GPD distribution are used and a huge part of the error of VaR is due to the error in the estimation of ξ .

The results presented in our paper reveal that some instability problems are inherent part of the estimation of capital requirement in LDA within AMA framework. A more realistic aim can be the minimization of their effect rather than their elimination from the applications of the model.