

DINAMIKUS EGYENSÚLY KORLÁTOZOTT VÁLTOZÓK KÖZÖTT¹

RAPPAI GÁBOR
Pécsi Tudományegyetem

VJnek

A tanulmány a közös sztochasztikus trendet tartalmazó idősorok közötti együttmozgást vizsgálja mesterséges korlátozások esetén. A véletlen bolyongás és a kointegráció fogalmainak vázlatos áttekintését követően megemlíti a Tobit-típusú kointegrált vektor-autoregresszív (Tobit-CVAR) modellt és bemutatja az ebbe a modellcsaládba tartozó, korlátozott változók közötti hibakorrektációs modellt. Véletlen helyzetek generálásával elemzi, hogy a vizsgált jelenséget ért küszöb-korlátozás (lenullázódás) milyen hatással van az eredetileg kointegrált idősorok közötti dinamikus egyensúlyra. A szimulációk alapján kijelenthető, hogy a túlságosan szigorú, illetve túlságosan korán bekövetkező korlátozás nagy valószínűséggel megszünteti az együttmozgást, emellett kimutatható, hogy több idősor lineáris kombinációja (összege) sem védettebb az egyensúly megszűnésével szemben. Egy illusztratív példa a Vasicek-féle kamatmodellen keresztül bemutatja, hogy a túlságosan drasztikusan alkalmazott korlátozás a hitelbedőlési valószínűség felülbecsléséhez vezethet.

1 Bevezetés, problémafelvetés

A gazdaságmodellezés egyik leggyakoribb kérdésfeltevése, hogy két, a vizsgálat szempontjából kitüntetett jelenség milyen kapcsolatban van egymással. Noha korábban sokszor találkozhattunk helytelen megfogalmazásokkal nem csak a közbeszédben, de az írott és digitális médiában, sőt még a szakpublikációkban is, napjainkra tisztázódtak a témával kapcsolatos fogalmak jelentés-tartalmai. Amennyiben idő dimenzió nélkül, vagyis keresztmetszeti adatállományon vizsgálódunk, úgy két jelenség kapcsolatban áll(hat) egymással, ez a kapcsolat a változók jellegéből következően lehet asszociáció, korreláció vagy vegyes kapcsolat. Azonos időben lezajló jelenségek között így az ok-okozati összefüggést csak logikai úton, a változók természetének ismeretében tudjuk kimutatni.

Más a helyzet az időben lejátszódó folyamatokkal: itt az oksági kapcsolat

¹A tanulmány a Tématerületi Kiválósági Program 2020 (2020-4.1.1.-TKP2020) „intézményi kiválóság” alprogram 4. számú, „A hazai vállalatok szerepének növelése a nemzet újraiparosításában” című projekt támogatásával készült. A szerző köszönettel tartozik Kőrösi Gábornak, aki számos értékes, pontosító megjegyzése mellett felhívta a figyelmet a Tobit-CVAR modellek és az itt tárgyalt probléma közötti hasonlóságra is. Beérkezett 2020. november 24. E-mail: rappai.gabor@ktk.pte.hu.

feltárása alapvető fontosságú.² Abban az esetben, ha az idősorok stacionáriusak, a közöttük levő ún. Granger-oktságot Wald-féle F-próbával lehet kimutatni (Kőrösi és mtsai, 1990). A gazdaságelemzés során széles körben elterjedt Granger-oktságról ugyanakkor tudni kell, hogy feltételrendszere (lineáris összefüggés, a segédregresszióban fehér zaj hibatag) a valóságban csak viszonylag ritkán teljesül, így a jelenségek közötti ok-okozati összefüggések modellezése ennél összetettebb feladat (Abaligeti, 2015). Ugyanakkor, ha az idősorok trendet tartalmaznak, az ok-okozati összefüggés feltárása szintén nem triviális. Ezekben az esetekben ugyanis számolnunk kell a hamis regresszió jelenségével, amely megzavarhatja a felületes szemlélő okságról alkotott véleményét.³ Az idősorok közötti okság, illetve a trendet tartalmazó idősorok esetén az együttmozgás (közös trend) kimutatása az elmúlt néhány évtized ökonometriai fejlődésének a központi témája, 2003-ban és 2011-ben a közgazdasági Nobel-éremdíj is kifejezetten ilyen témájú kutatásokat jutalmazott (Darvas, 2004).

Az ok-okozati kapcsolat kimutatására szolgáló teszteljárások bemutatása mellett egyre több tanulmány foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy miként szűnnek, de még inkább, hogy mikor, mitől szűnik meg az ok-okozati összefüggés két vizsgált jelenség között. Különösen felértékelődik a kérdés jelentősége válságok idején. Vannak kutatások, melyek kifejezetten arra a következtetésre jutnak, hogy a válságok előrejelezhetőek abból, ha a korábbi ok-okozati összefüggések, illetve együttmozgások hirtelen megszűnnek (Ács, 2012).

Jelen írás is a speciális körülmények között fennmaradó vagy megszűnő okság témaköréhez kíván hozzájárulni. Azt vizsgáljuk, hogy amennyiben időben lejátszódó jelenségek között együttmozgás (közös trend) mutatható ki, vagyis kointegráltak, akkor milyen változásoknak kell bekövetkezni ahhoz, hogy a folyamatok közötti hibakorrekciós mechanizmus megszűnjön. A tanulmány egy, a gyakorlatban egyáltalán nem ritka anomáliát vizsgál, mégpedig azt az esetet, amikor valamilyen váratlan esemény hatására az egyik idősor értéke 0-vá válik, későbbi szóhasználatunk szerint lenullázódik. (Gondoljunk pl. a csőd/felszámolás esetére, vagy az elemi csapásra, ilyenkor pontosan ez a jelenség áll fenn!).

A következő részben címszavakban áttekintjük a legszükségesebb ökonometriai terminológiát, majd alkalmasan választott szimulációk segítségével megkíséreljük leírni az előbbi jelenség legfontosabb tulajdonságait, végezetül egy illusztratív példán keresztül szemléltetjük az elméleti jellegű megállapítások gyakorlati alkalmazhatóságát.

²Az okság modellezhetőségéről lásd pl. Rappai (2011).

³A determinisztikus trendet tartalmazó idősorok között mindig kimutatható hamis regresszió (melyet trendszűrővel egyébiránt jól lehet kezelni), sztochasztikus trendet tartalmazó idősoroknál a hamis okság (látszatkapcsolat) veszély, de nem törvényszerűség (minderről bővebben lesz szó a következő pontban).

2 Ökonometriai alapvetés

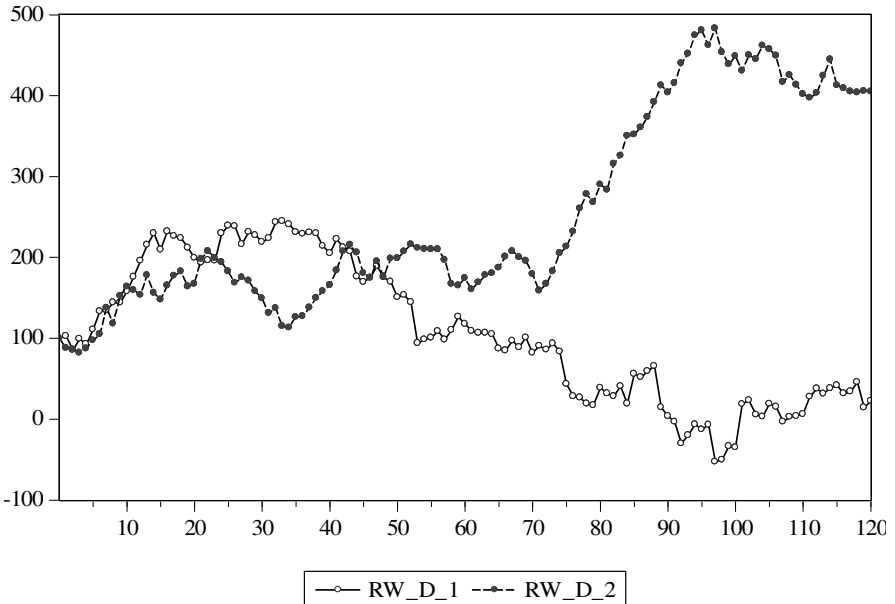
Tekintsünk egy, az időhorizonton ($t = 1, 2, \dots, T$) megfigyelt változót, amely a vizsgálat kezdő pillanatában y_0 értékkel rendelkezik. A jellemző értéke időszakra időszakra egy konstanssal és egy jól specifikált véletlen változó aktuális értékével (sztochasztikus taggal) változik. A változó értéke a t -edik időpillanatban tehát az alábbi

$$y_t = \beta + y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

ahol y_t a változó értéke, ε_t pedig a sztochasztikus tag (véletlen változó) értéke a t -edik pillanatban. A megfelelő behelyettesítéseket elvégezve a változó értéke felírható az alábbi formában is

$$y_t = y_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i. \quad (2)$$

A sztochasztikus idősor-modellezésben bevett szóhasználatlálva az idősor eltolásos véletlen bolyongást (random walk with drift) követ.⁴ Az 1. ábra ilyen változók alakulását mutatja különböző véletlen realizációk mellett ($y_0 = 100$ és $\beta = 0,1$ értékeket, valamint normális eloszlású, 0 várható értékű, 15 szórású véletlen tagot feltételezve).



1. ábra. Véletlen bolyongások eltolással

⁴Könnyen átlátható, hogy amennyiben $\beta = 0$, akkor a folyamat nem tartalmaz eltolást (random walk without drift), és (2) annyiban módosul, hogy nem tartalmazza a βt tagot.

Láthatjuk, hogy az azonos paraméterekkel definiált véletlen bolyongások a sztochasztikus tagok véletlen jellegéből adódóan teljesen különböző lefutásokat eredményeztek: 120 elemű (10 éves, havi bontású) idősorokat szimulálva akár az azonos kiinduló érték többszöröse is lehet a különbség az időszak végén a két idősor között.

Amennyiben ε független azonos eloszlású sztochasztikus tag, melynek várható értéke 0 és varianciája σ^2 , akkor a fenti folyamat első- és másodrendű momentumai viszonylag egyszerűen képezhetők:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= y_0 + \beta t = \mu_t \\ \text{Var}(y_t) &= t\sigma^2 \\ \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) &= (t-k)\sigma^2 \end{aligned}$$

Kihasználva a fentieket, a folyamat autokorrelációs együtthatói

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(y_t) \text{Var}(y_{t-k})}} = \sqrt{\frac{t-k}{t}} = \sqrt{1 - \frac{k}{t}}$$

formájúak, vagyis az idő előrehaladtával, még magasabb rendű autokorreláció esetén is 1-hez tartanak. Láthattuk, hogy az ilyen folyamatok várható értéke és varianciája az idő függvényében változik, az autokovariancia függvényük sem stabil, így kijelenthető, hogy az eltolás nélküli véletlen bolyongás nem stacionárius folyamat.

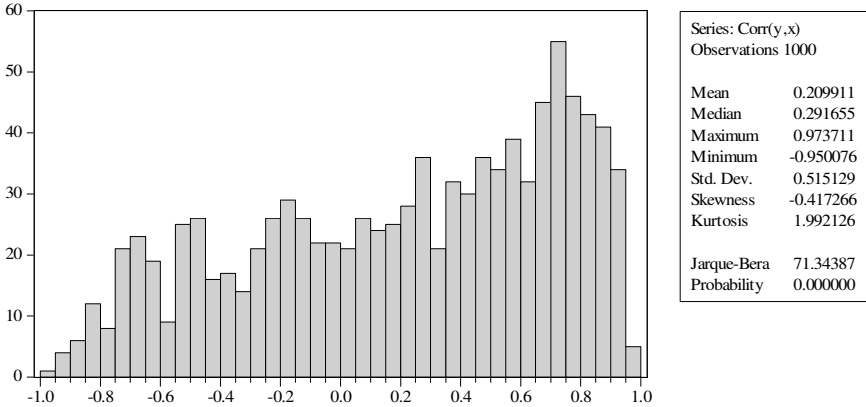
Granger és Newbold (1974) megmutatta, hogy az egymástól független véletlen bolyongások közötti korreláció határozatlan, de 0-tól általában szignifikánsan különbözik. Így két sztochasztikus trendet tartalmazó idősor között a kapcsolat nem mérhető korrelációs együtthatóval, ha erre hagyatkoznánk, sok esetben látszatkapcsolatot detektálnánk, amit a szakirodalom hamis korrelációnak (spurious correlation) nevez. Ennek szemléltetésére nézzük a következő két folyamatot

$$\begin{aligned} y_t &= \beta + y_{t-1} + \varepsilon_t^y \\ x_t &= \beta + x_{t-1} + \varepsilon_t^x \end{aligned} \quad (3)$$

ahol $t = 1, 2, \dots, 120$, és a szükséges paraméterek

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 = 100 \\ \beta &= 0,1 \\ \varepsilon_t^y, \varepsilon_t^x &\sim N(0, 15) \\ \text{Corr}(\varepsilon_t^y, \varepsilon_t^x) &= 0. \end{aligned}$$

A látszatkorreláció szemléltetéséhez 1000-szer létrehoztuk a két idősort, értelemszerűen más-más értékű, de azonos tulajdonságú sztochasztikus tagokkal, majd a szimulált idősor-párok között lineáris korrelációs együtthatókat számoltunk. Az 1000 korrelációs együttható, azaz $\text{Corr}(y_t, x_t)$ empirikus eloszlását a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra. Korrelációs együtthatók független véletlen bolyongások között

Az ábra nemcsak azt mutatja, hogy a korrelációs együttható „bejárja” a $(-1, 1)$ tartományt, de az is leolvasható, hogy 824 esetben (82,4%-ban) szignifikánsan különbözik 0-tól.⁵

Engle és Granger úttörő cikke (Engle–Granger, 1987) megmutatta, hogy léteznek azonban olyan esetek is, amikor két nemstacionárius folyamat között a korreláció valóságos, vagyis a két sztochasztikus trendet tartalmazó idősor kointegrált. Ennek szemléltetéséhez tekintsük a következő – a korábbiak alapján egyszerűen felírható – egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
 x_t &= \beta^x + x_{t-1} + \varepsilon_t^x \\
 y_{1t} &= \alpha_1 x_t + \varepsilon_{1t} \\
 y_{2t} &= \alpha_2 x_t + \varepsilon_{2t},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

ahol a sztochasztikus tagok $(\varepsilon_t^x, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ egymástól függetlenek. A fenti modellben mindhárom változó véletlen bolyongást követő nemstacioner folyamatból származik, de y_{1t} és y_{2t} között könnyen felírható olyan lineáris kombináció, amely stacionárius, vagyis a két változó – az ismert definíció alapján – kointegrált.⁶ Kointegrált változók esetében a korábban vizsgált korrelációs együtthatók sokkal markánsabban alakulnak. Elvégeztük a szimulációt, ahol a korábban már alkalmazott paraméterbeállításokon túl az alábbi együttha-

⁵120 elemű minták esetén, 5%-os szignifikancia-szinten szignifikáns a korreláció, ha a lineáris korrelációs együttható abszolút értéke magasabb, mint 0,18. Természetesen a korrelációs együtthatók empirikus eloszlása függ a β/σ_ε aránytól, amennyiben ez magas, akkor az együtthatók 1-hez konvergálnak.

⁶A definíció értelmében két (vagy több) elsőrendben integrált, tehát nemstacionárius változót akkor nevezünk kointegráltként, ha van stacionárius, nem triviális lineáris kombinációjuk. A (4) modellben ez a lineáris kombináció $\alpha_2 y_{1t} - \alpha_1 y_{2t}$ formájú, melyről könnyen belátható, hogy mivel fehér zajok lineáris kombinációja $\alpha_2 \varepsilon_{1t} - \alpha_1 \varepsilon_{2t}$, ezért stacionárius.

tókat használtuk:

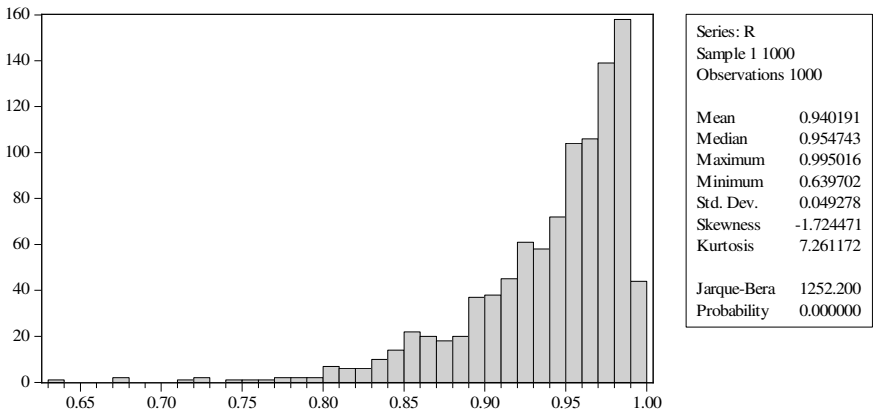
$$\alpha_1 = 0,8$$

$$\alpha_2 = 1,5$$

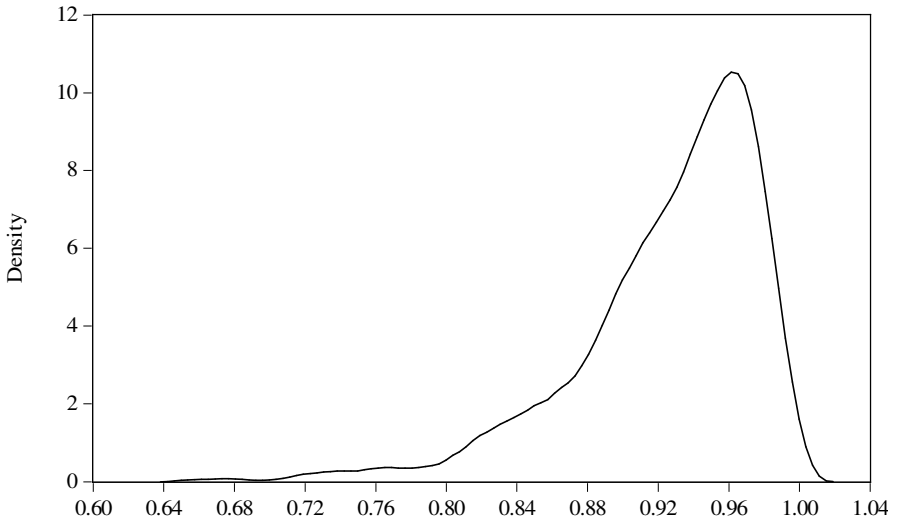
$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim N(0, 15)$$

$$\text{Corr}(\varepsilon_t^x, \varepsilon_{1t}) = \text{Corr}(\varepsilon_t^x, \varepsilon_{2t}) = \text{Corr}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0.$$

A két kointegrált idősor közötti – immár tényleges – korrelációkat a 3. ábra mutatja:



3. ábra. Korrelációs együtthatók két kointegrált véletlen bolyongás között



4. ábra. Kointegrált idősorok közötti korrelációs együtthatók magrsűrűségfüggvénye

Láthatjuk, hogy a korrelációs együttthatók valamennyi esetben szignifikáns kapcsolatot jeleznek. A paraméterbeállításból adódóan ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$) az együtttható mindig pozitív, az esetek 82,5%-ában meghaladja a 0,9-es értéket. Annak érdekében, hogy a későbbi eredményeinket könnyebben tudjuk ehhez hasonlítani, nézzük a hisztogram (egyedi értékek) alapján készült magssűrűségfüggvény becslését (4. ábra)!⁷

Amennyiben az együttmozgó gazdasági változók között az előbbieken bemutatott kointegrációs összefüggés érvényesül, a változók dinamikus egyensúlyban vannak. A dinamikus egyensúly lényege, hogy a kointegrált változók között hibakorrekciós mechanizmus érvényes, vagyis felírható az alábbi összefüggés

$$\Delta y_{1t} = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta y_{2t} + \gamma_2 (\alpha_2 y_{1t} - \alpha_1 y_{2t}) + \varepsilon_t^{\text{EC}} + \dots, \quad (5)$$

ahol $\alpha_2 y_{1t} - \alpha_1 y_{2t}$ az ún. hibakorrekciós tag, valamint – mivel negatív visszacsatolásról van szó – $\gamma_2 < 0$ (a képletben szereplő „...” arra utal, hogy természetesen mindezen magyarázó változókon túl továbbiak is szerepelhetnek a hibakorrekciós egyenletben). Mivel y_{1t} és y_{2t} a (4) modell szerint elsőrendben integráltak, így Δy_{1t} és Δy_{2t} stacionárius, valamint – a kointegráltság miatt – a hibakorrekciós tag is stacionárius. Ebből következően az (5) egyenlet paraméterei a közönséges legkisebb négyzetek (OLS) módszerével korrektil becsülhetők.

A következő részben azt vizsgáljuk, hogy ha az előbbi „elméleti” esethez képest valamely eredeti adatgeneráló folyamatban korlátozások lépnek fel, akkor hogyan változik az idősorok együttmozgásáról (kointegráltságáról) alkotott véleményünk.

3 Kapcsolat korlátozott változók között

A korlátozott⁸ endogén változós ökonometriai modellek viszonylag elterjedtek a gazdasági elemzésekben. A sztochasztikus trendet tartalmazó korlátozott endogén változók közötti összefüggések vizsgálatára fejlesztették ki a Tobit-típusú kointegrált vektor-autoregresszív modelleket (Tobit-CVAR). A Tobit-CVAR modell a Dueker (2005) által kidolgozott kvalitatív vektor-autoregresszív modell továbbfejlesztése, ahol a korlátozott változó (y_t^*) az alábbiak szerint képződik

$$y_t^* = \begin{cases} y_t, & \text{ha } y_t > 0; \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (6)$$

ahol y_t egy nemstacionárius változó. Az így definiált idősorok közötti kointegráltság vizsgálata alkalmasan választott nemlineáris modellek segítségével történik. Ilyen Tobit-típusú modellt használ Ordóñez-Callamand et al.

⁷A magssűrűségfüggvény becslést (kernel density estimation) Epanechnikov-maggal végeztük. Az eljárásról lásd pl. Kehl (2012) tanulmányát.

⁸Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező változók esetén gyakran használatos a cenzorált változó (censored variable) elnevezés. A „censored” kifejezés átültetése a magyar statisztikai nyelvbe mindeddig nem egyértelmű: a cenzúrázott szót egyértelműen más kontextusban használjuk, a korlátolt, vagy korlátos szavakat is inkább emberi tulajdonságként értjük. Ebben a tanulmányban a vonatkozó tulajdonságra a korlátozott kifejezést használom.

(2018) a központi bank beavatkozásainak modellezésére, El Quadighiri és Uctum (2016) a devizapiaci egyensúlyi árfolyam meghatározására, vagy Ye et al. (2018) a női munkaerő iránti kereslet leírására. A témánkhoz legközelebb álló Tobit-CVAR modellt Grabowski és Welfe (2020) tárgyalja egy, a devizapiacot modellező friss tanulmányban. A cikk nemcsak a Tobit-CVAR modell felírását és a nemlineáris modell paraméterbecslésének lépéseit mutatja be, de – szimuláción alapuló – kritikus értékeket is meghatároz az ilyen esetekben alkalmazható Johansen-féle trace-teszt számára.

A gazdasági (pénzügyi) életben, elsősorban hitelezési tevékenységnél, vagy felszámolási (végelszámolási) folyamatokban gyakran előfordul, hogy amennyiben egy vagyonmutató (hitelfedezeti érték, rendelkezésre álló likvid vagyon stb.) elér egy bizonyos alsó küszöböt, onnantól kezdve drasztikusan megváltozik a folyamat jellege, a vizsgált mutató lenullázódik. Nyilvánvalóan releváns a kérdés: mi történik a hibakorrekciós mechanizmussal (más szavakkal: fennmarad-e a kointegráltság), ha létezik olyan küszöb (korlát), amely után az egyik (eredetileg kointegrált) változó letér a korábbi pályájáról és értéke lenullázódik?

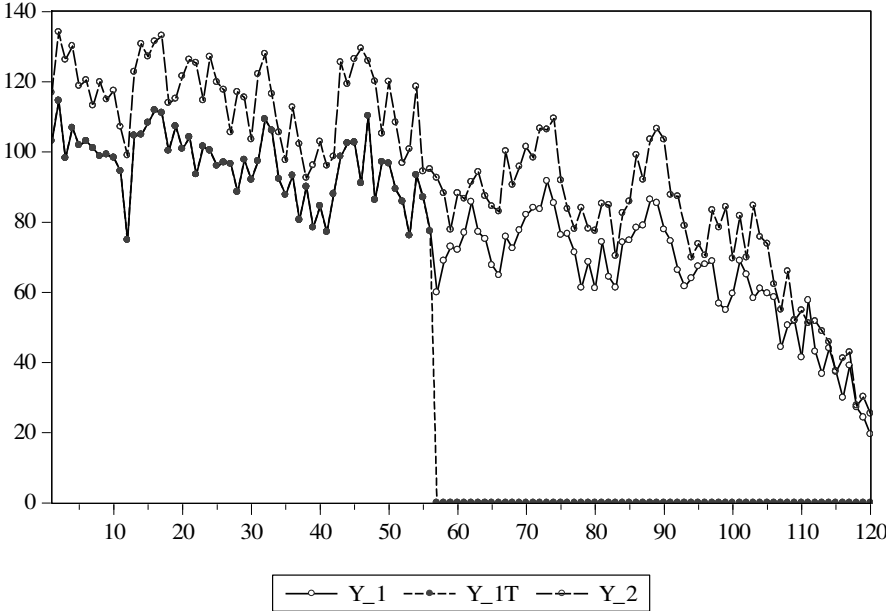
Nevezzük korlátosságnak azt a jelenséget, melyben egy előre adott küszöbérték alá kerülő pillanatnyi érték esetén az idősor értéke 0-vá válik és a teljes vizsgált időhorizonton úgy is marad. A korlátosság fennállása esetén az időszori értékek a (4) modelltől a következő egyszerű algoritmussal határozhatók meg, vagyis y_{1t}^T korlátos, ha az alábbi elven képződik

$$y_{1t}^T = \begin{cases} \alpha_1(\beta^x + x_{t-1} + \varepsilon_t^x) + \varepsilon_{1t}, & \text{ha } y_{1t-1} \geq \tau \\ 0, & \text{ha } y_{1t-1} < \tau, \end{cases} \quad (7)$$

ahol τ az előre adott korlát. (Természetesen y_{2t} -re, és amennyiben létezik, akkor a többi kointegrált változóra analog összefüggés írható fel.)

Érdeemes megjegyeznünk, hogy (6) és (7) alapján definiált idősorok, noha számos hasonlóságot mutatnak, de két dologban különböznek egymástól: (6) esetén a korlát 0-val egyenlő (ez nem jelentős különbség, hiszen egy eltolással viszonylag egyszerűen orvosolható), valamint az a tény, hogy a t -edik időpontban a változó értéke lenullázódik, nincs hatással a következő időpontok értékére. Ezzel szemben a (7) által definiált idősor, ha egyszer küszöb alá került és 0-vá vált, akkor attól kezdve úgy is marad. (Ez életszerű, ha az említett felszámolási eljárásra, vagy hitel-bedőlésre gondolunk.) Mindez azt is jelenti, hogy a Grabowski és Welfe (2020) által kidolgozott Tobit-CVAR modell eredményei csak részben használhatók.

Nézzünk egy példát két, az eredeti adatgeneráló folyamat alapján kointegrált idősorra, melyből az egyik korlátos, azaz a vizsgált idősor során lenullázódik (5. ábra)!



5. ábra. Változók együttmozgása korlátosság esetén

Az ábra jól mutatja a vizsgálni kívánt jelenséget: az eredeti y_{1t} és y_{2t} változók kointegráltak (közös trendjük⁹ van), köztük felírható a hibakorrekciós modell, illetve van értelme a korreláció kiszámításának. (A vizsgált esetben a kointegráltságot tesztelő EG-próba¹⁰ p -értéke kisebb, mint 0,0001; a két idősor közötti – valódi – korrelációs együttható 0,958.) Ugyanakkor a modellfeltevések értelmében y_{1t}^T egy korlátos változó, melynek értéke, ha egy küszöbérték (threshold, T) alá kerül, akkor onnantól kezdve 0-vá válik. Az ábrán illusztrált esetben a küszöbértéket a kiinduló érték kétharmadának választottuk, ezt először az időszak közepe táján (az 57. megfigyelésnél) mülja alul az y_{1t} idősor, vagyis innen kezdve értéke 0. Érdekes megvizsgálni a korlátos idősor viszonyát az eredeti adatgeneráló folyamat (data generating process, DGP) szerint vele együttmozgó y_{2t} idősorral: az EG teszt szerint nem kointegráltak ($p = 0,5704$). Ezek szerint közöttük hamis korreláció van, melynek szorosságát mérő – elvi hibával meghatározott – korrelációs együttható értéke 0,771 (ami „első ránézésre” szignifikáns kapcsolatra utalna, vagyis képes lenne az elemző megtévesztésére).

Az előbbi példa alapján kézenfekvően adódik a tanulmány három kérdése:

1. A küszöbértéknek milyen távol kell lennie a várható értéktől ahhoz, hogy megszűnjön a kointegráltság?
2. A tapasztalati idősor mely részén kell bekövetkezni a korlátozásnak ahhoz, hogy az együttmozgás megszűnjön?

⁹ Az ábrán egyébiránt a közös trend csökkenő.

¹⁰ Lásd pl. Rappai (2013) 105. old.

3. Ha nem egy, hanem több, a kitüntetett változóval együttmozgó idősor van, akkor ezek összegének kointegráltságát mennyiben befolyásolja a korlátozás?

A vizsgálat módszere mindhárom kérdésnél azonos volt: véletlenszerűen generált fehér zaj idősorokkal 10 000 különböző, de azonos paraméterekkel bíró DGP-t létrehozva megfigyelhetjük, hogy az adott kérdés esetén releváns statisztikai mutatók miként alakulnak.¹¹ Az alábbi táblázatok, illetve ábrák a szimulációk eredményeit tartalmazzák.

Tekintsük elsőként azt a kérdést, hogy milyen arányban maradnak kointegráltak az eredetileg együttmozgó DGP-vel rendelkező folyamatok a különböző küszöbérték-szinteknél!

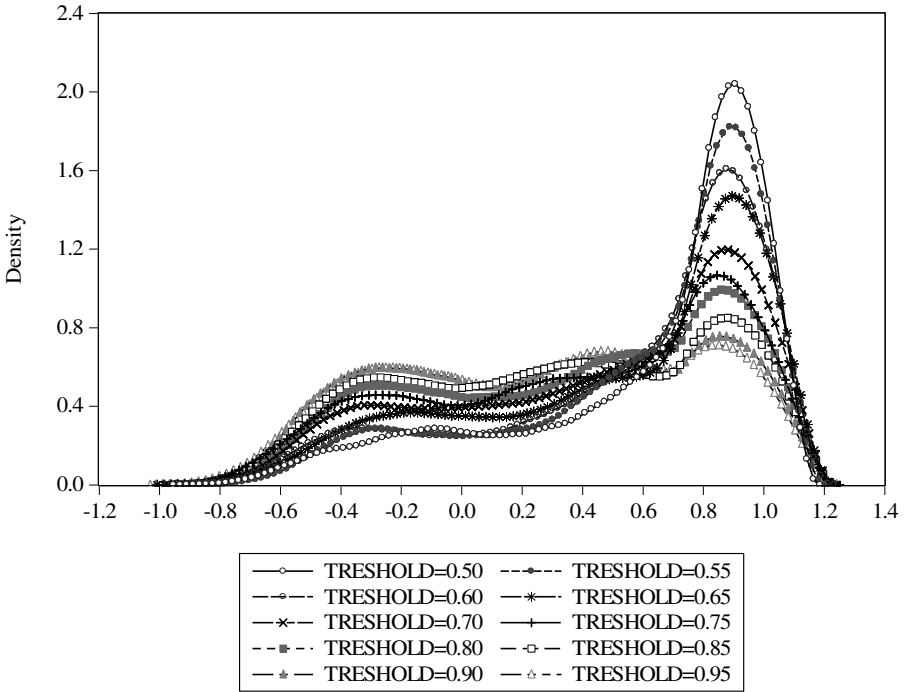
Küszöbérték (a kiinduló érték arányában)	Kointegrált idősor-párok aránya (%)
0,50	51,0
0,55	51,1
0,60	47,9
0,65	44,2
0,70	42,4
0,75	40,8
0,80	37,0
0,85	37,3
0,90	34,8
0,95	33,8

1. táblázat. Együttmozgó idősor-párok aránya

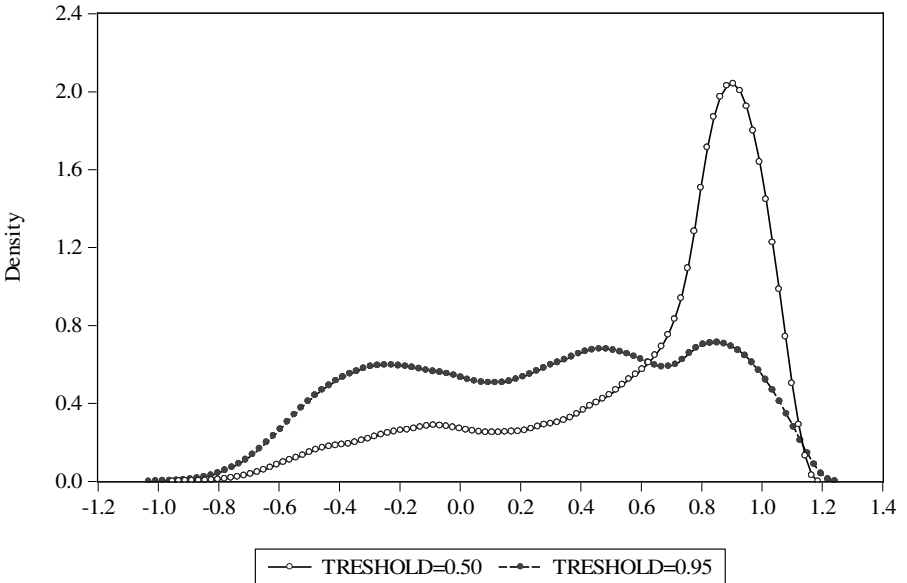
Láthatjuk, hogy – a szimuláció természetéből adódó pontatlanságoktól eltekintve – egyértelmű negatív kapcsolat mutatható ki a küszöbérték és a közös trendet (hibakorrekciót) megtartó idősor-párok aránya között. Meglehetősen kézenfekvően azt tapasztalhatjuk, hogy minél „messzebb” van a küszöbérték a kiinduló értéktől, annál kisebb a valószínűsége, hogy a kointegrált idősor-párok elveszítik az együttmozgást.

Érdeemes ugyanakkor arra is felfigyelnünk, hogy az adott modellspecifikáció mellett (a fehér zaj szórását a kiinduló érték 15%-ának definiáltuk), ha a küszöbértéket $-3 \times$ szórásnyira állítjuk, akkor az eseteknek mintegy felében marad meg az együttmozgás; amennyiben a küszöbérték $-1 \times$ szórásnyira kerül, akkor a teljes időszakban kointegrált változó párok aránya alig több, mint egyharmad. Annak érdekében, hogy a korlátosságának a kapcsolat szorosságára gyakorolt hatását jól követhessük, elkészíthetjük a különböző küszöbértékek esetén a két – eredetileg kointegrált – idősor közötti korrelációs együtthatók magsűrűségfüggvényét (6. ábra).

¹¹A szimuláció és a tanulmány valamennyi modellezési eredménye az EViews 8.0 programcsomaggal készült.



6. ábra. Eredetileg kointegrált DGP-ből származó, korlátos idősorok közötti korrelációs együtthatók magssűrűségfüggvényei különböző küszöbértékek esetén

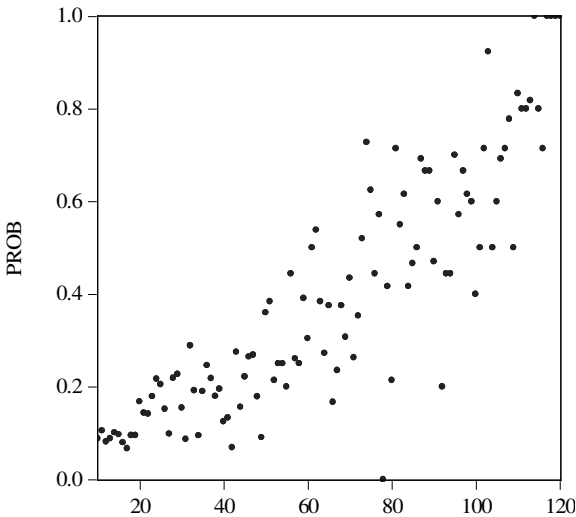


6a. ábra. Magssűrűségfüggvények 0,5 és 0,95 küszöbértékeknél

A szimuláció eredménye valószínűleg jobban nyomon követhető, ha csak a két szélső küszöbértéket ábrázoljuk (6a. ábra).

Könnyen észrevehető, hogy az 4. ábrán látható „eredeti” eloszlás jelentősen megváltozott: a sűrűségfüggvény bal oldala megvastagodott és elnyúlt, vagyis a magas pozitív korrelációs együttthatók mellett megjelentek az alacsonyabb abszolút értékű, sőt a negatív együttthatók is (természetesen ezek egy jelentős része, ahogy korábban láthattuk, hamis korreláció esetén kiszámított koefficiens). Az együttthatók eloszlásának megváltozása annál drasztikusabb, minél magasabb küszöbértékkel korlátozzuk az egyik együttmozgó változót, ez teljes mértékben megegyezik az 1. táblázatból kiolvasott eredményeinkkel.

Második kérdésünk arra irányult, vajon kimutatható-e összefüggés a töréspont (a küszöbérték alá kerülés, vagyis a lenullázódás kezdete) és az együttmozgás megmaradása között? A 7. ábra vízszintes tengelyén a küszöbérték elérésének az időpontja, függőleges tengelyén pedig a továbbra is kointegrált idősor-párok aránya található.



7. ábra. A töréspont helye és a kointegráltság közötti kapcsolat

A tendencia az ábrából egyértelműen leolvasható: minél később következik be a küszöb alá kerülés, annál kisebb lesz a valószínűsége, hogy a két idősor között meglevő hibakorrekciós mechanizmus megszűnik, vagyis annál kisebb valószínűséggel következik be az együttmozgás megszűnése.¹²

Végezetül azt is megvizsgálhatjuk, hogy vajon a „portfolió-szemlélet”, vagyis több, eredetileg együttmozgó, majd egy küszöbérték elérése lenullázódó folyamat összegeként definiált idősor mennyiben tartja meg a közös trendet a küszöb alá kerüléssel nem fenyegetett idősorral. A szimuláció során az előzőekhez hasonlóan jártunk el, vagyis ez esetben is a véletlen bolyongás

¹²Érdekes vizsgálat lenne, bár ebben a dolgozatban nem térünk ki rá, azt elemezni, hogy a kointegráltság megmaradásában a töréspont abszolút helyzete (elégésesen hosszú „bizonyított” együttmozgás), vagy relatív elhelyezkedése játszik szerepet.

aktuális lefutása határozta meg, hogy egy idősor bekerül-e a küszöbérték alá. Tehát amikor pl. 5 folyamat összegét vizsgáljuk, elképzelhető, hogy – természetesen különböző időpontokban – egy, vagy akár több idősor is a küszöb alá kerül és lenullázódik. A szimulációt elvégeztük 5, illetve 10 idősor összegére is, eredményeinket a 2. táblázat mutatja.

Láthatjuk, hogy nincs jelentős különbség abban a tekintetben, hogy mennyi időorból képezzük az összeget (ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy bármelyik idősor azonos valószínűséggel küszöb alá kerülhet, tehát nincs arról szó, hogy a 10 idősort tartalmazó összeg „védehetőbb” lenne). Ugyanakkor észrevehetjük, hogy mindkét esetben lényegesen kevesebbszer marad meg a hibakorrekciós összefüggés, mint korábban, amikor csak két idősort vizsgáltunk. Tehát, ha egy idősor lenullázódik, akkor ez viszonylag magas arányban azt okozza, hogy a teljes összeg letér a közös trendről.

Küszöbérték (a kiinduló érték arányában)	K o i n t e g r á l t i d ő s o r - p á r o k a r á n y a	
	10 idősor összege esetén (%)	5 idősor összege esetén (%)
0,50	46,9	45,7
0,55	41,8	40,9
0,60	38,4	38,6
0,65	35,9	35,2
0,70	31,3	32,6
0,75	30,0	29,3
0,80	29,0	24,3
0,85	26,0	24,9
0,90	20,5	19,7
0,95	20,1	17,1

2. táblázat. Együttmozgó idősor-párok aránya

Érdeemes összefoglalni a szimuláció alapján levonható következtetéseket:

- minél kisebb toleranciával dolgozunk (minél kevesebb eltérést engedünk meg a kiinduló értékhez képest), annál nagyobb arányban számíthatunk arra, hogy a korábban jól működő hibakorrekciós mechanizmus megszűnik,
- minél korábban következik be a jelentős negatív irányú eltávolodás a kiinduló értéktől, annál kevésbé valószínű, hogy a közös trend megmarad,
- nem javít (vélelmezhetően inkább ront) a kointegráció fennmaradásának esélyén, ha egynél több, de azonos eséllyel küszöbérték alá kerülő idősor összegével próbáljuk fenntartani a hibakorrekciós mechanizmust.

Az előbbi megállapítások talán nem teljesen váratlanok, ugyanakkor a következő pontban bemutatandó gyakorlati alkalmazás szempontjából nagy jelentőséggel bírnak.

4 Illusztratív példa – a Vasicek-modell meglepetésfaktora

A Vasicek-modell¹³ az egyik legelső arbitrázmentes kamatmodell, amely

- a kamatlábak átlaghoz történő visszatérésének gondolatán alapul,
- explicit formulát ad hozamgörbére (illetve a kötvények és egyéb pénzügyi eszközök értékére).

A modell hozamokra felírt változata

$$\Delta r_t = \kappa(\theta - r_{t-1})\Delta t + \sigma\Delta z_t, \quad (8)$$

ahol r_t a t -edik időpillanatra vonatkozó hozam, κ a hosszú távú átlaghoz való visszatérés sebességét mutatja, θ a hosszú távú átlagos hozam, σ a folyamat volatilitása és Δz_t egy normális eloszlást követő hibatag ($\Delta z_t \sim N(0, \Delta t)$).

Behelyettesítve (8) egyenletbe az egy periódusra vonatkozó esetet, valamint felírva a differencia változó eredeti alakját, az alábbi modellt kapjuk

$$r_t = \kappa\theta + (1 - \kappa)r_{t-1} + \sigma\Delta z_t, \quad (9)$$

ahol Δz_t standard normális eloszlást követ. Kihasználva, hogy κ és θ nagyobb mint 0, a (9) egyenlettel definiált hozam AR1-folyamatot követ, hiszen

$$r_t = \mu + \varphi r_{t-1} + \sigma\Delta z_t, \quad (10)$$

azaz stationer, ha $\sigma\Delta z_t$ valóban stationer.¹⁴

Vörös (2020) megmutatja, hogy a hitelek bedőlési valószínűségének meghatározása során használt Vasicek-modellben az előbb említett sztochasztikus hibatag két tényező eredője, vagyis a pénzügyi eszközökhöz köthető meglepetésfaktor (v_t) és a makrogazdaság állapotát leíró jellemző (m_t) speciális lineáris kombinációja, azaz

$$\sigma\Delta z_t = v_t\sqrt{1 - r^2} + r m_t, \quad (11)$$

ahol r a meglepetésfaktor és a makro-állapot közötti lineáris korrelációs együttható. Bevezetve a

$$\frac{\sigma\Delta z_t}{\sqrt{1 - r^2}} = \varepsilon_t$$

jelölést ($\varepsilon_t \sim N(0, \sigma/\sqrt{1 - r^2})$) a (11) egyenlet átrendezése jelenti a példánk szempontjából valóban fontos modellt:

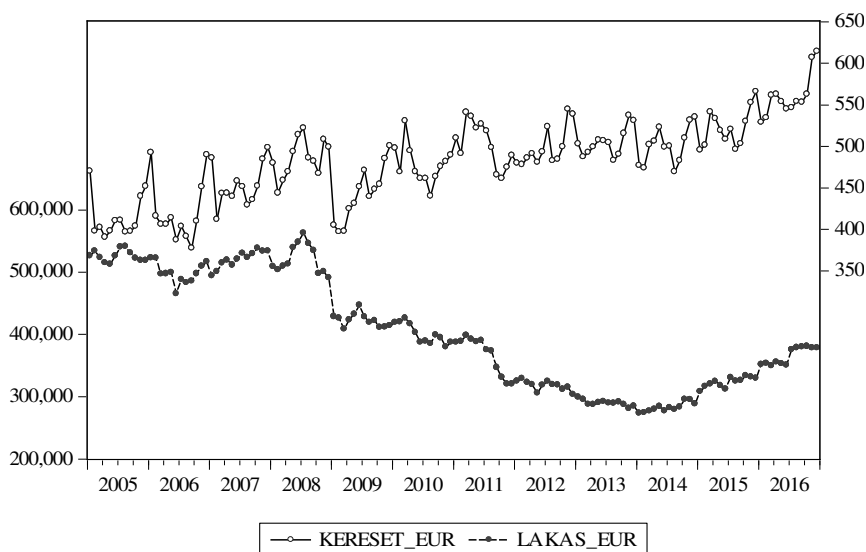
$$v_t = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} m_t + \varepsilon_t. \quad (12)$$

¹³A modell nevét az első leírójáról kapta (Vasicek, 1977), magyar nyelven jó összefoglalás olvasható róla Kopányi (2009) értekezésében.

¹⁴Annak feltételezése, hogy a hosszú távú átlagos hozam pozitív, valamint, hogy az ehhez történő visszatérés előbb-utóbb megtörténik, nem sérti az általánosítást.

(12) értelmében, ha a makrogazdaság állapotát leíró változó (pl. a GDP, a keresetek, vagy az árszínvonal) sztochasztikus trendet követ, akkor a pénzügyi eszközök hozamához kapcsolódó meglepetésfaktor is sztochasztikus trendet követ, ám együtt mozog (közös trendje van) a makroállapottal, így hibakorrekciós (EC) modellel becsülhető. A fenti levezetés értelmében a kointegráló vektor könnyen felírható, a hibakorrekciós egyenlet paraméterei egy lépcsőben becsülhetők.

Tekintsünk erre egy tanulságos példát!¹⁵ Tétélezzük fel, hogy egy fiktív ügyfél 2000-ben 10 millió forintos lakást vásárol, amelynek értéke a piaci átlagnak megfelelően, azaz a lakáspiaci árindexszel¹⁶ karbantartva alakul a következő évtizedekben. Az ügyfél 2005-ben euró-alapú kölcsönt vesz fel, amihez fedezetül az említett ingatlant használja, természetesen az ingatlan értékét is euróban nyilvántartva (az euróárfolyam¹⁷ és a lakásárindex segítségével kiszámítható, hogy a lakás értéke 2005 januárjában 530 ezer euró). Az említett ügyfél keresete, melyből a felvett hitelt törleszti, megegyezik a nemzetgazdasági átlagkeresettel, amit – hiszen a hitele is euróban számolódik el – célszerű szintén euróban nyilvántartani.¹⁸



8. ábra. A lakásérték (euróban, bal oldali tengely) és a nemzetgazdasági nettó átlagkereset (euróban, jobb oldali tengely) alakulása 2005. január – 2016. december

¹⁵A példa fiktív, tehát egyetlen konkrét pénzintézet, illetve egyetlen konkrét ügyfél adatait nem tartalmazza, ugyanakkor a benne szereplő adatok (lakás-árindex, nemzetgazdasági átlagkereset) valóságok.

¹⁶A lakáspiaci árindex megtalálható az MNB honlapján: <https://www.mnb.hu/statisztika/statisztikai-adatok-informaciok/adatok-idosorok/vi-arak/mnb-lakasarindex>.

¹⁷Az euróárfolyam szintén az MNB honlapjáról származik: <https://www.mnb.hu/statisztika/statisztikai-adatok-informaciok/adatok-idosorok/vii-arfolyam>.

¹⁸A nemzetgazdasági nettó átlagkereset a KSH kiadványaiból (A KSH jelenti), illetve honlapjáról összegyűjthető.

A két változó (eszköz-érték, vagyis a lakás euróban mért ára és a makroállapot, vagyis a nettó átlagkereset euróban) alakulását a hitelfelvételt követő években szemlélteti a 8. ábra. (Az illusztratív példához választott idősor 2005. január és 2016. december közötti időszakokra vonatkozik és havi bontású. Azért ezt az időszakot választottuk, mert – noha nem célunk semmiféle, nemzetgazdaságra vonatkozó általánosítás – szerettünk volna olyan időintervallumot választani, amelyben egy pénzügyi válság középidőben helyezkedik el.)

Mindkét változó véletlen bolyongást követ, a folyamatot leíró paramétereiket, illetve az egységgyök teszt eredményét a 3. táblázat tartalmazza:

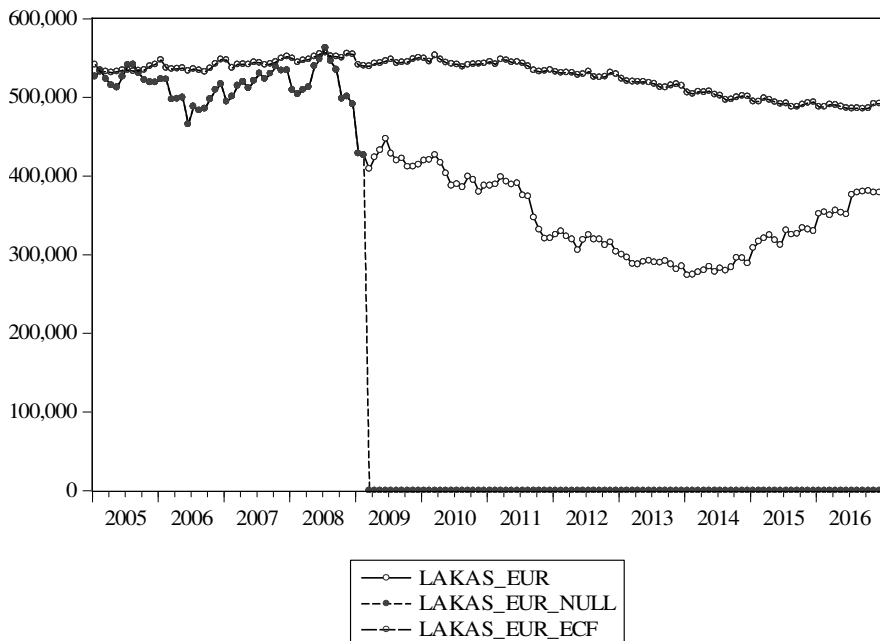
Mutató	Lakásérték (euró)	Nettó átlagkereset (euró)
Eltolás (β)	-1092,7	1,262
Hibatag szórása (σ_ε)	11718,7	24,928
ADF-próba (τ)	-0,744	-1,427
(p -érték)	0,8311	0,5675

3. táblázat. A lakásérték és az átlagkereset jellemzői (2005-2016, havi bontás)

A két véletlen bolyongást követő (nemstacionárius) idősor esetében felmerül a hamis korreláció (regresszió) lehetősége. Ugyanakkor elvégezve az Johansen-tesztet azt kapjuk, hogy az idősorok a 2005. január és 2016. december közötti időperiódusban kointegráltak (a trace-próba értéke 24,381, a hozzátartozó szignifikancia-érték 0,0064). Amennyiben az idősoroknak közös trendjük van, úgy a köztük levő korreláció nem hamis (valós összefüggésen alapul), tehát a korrelációs együttható (példánkban -0,562) a (12) modell alapján felhasználható a meglepetésfaktor becslésére.

Tételezzük fel, hogy a hitelnyújtó addig fogadja el fedezetként az ingatlant, amíg annak értéke 420 ezer euró felett van (ez a hitelfelvételkor érték kb. 80%-a), azt követően más biztosítékot kér (a tanulmány korábbi részében ezt az esetet neveztük lenullázódásnak). Ez az eset fiktív példánkban 2009 márciusában áll elő (a gazdaságtörténetet ismerve nem véletlenül). A 9. ábra a lakás hitelfedezeti értékét mutatja három különböző szcenárió mellett: egyrészt a tényleges értéket, másrészt a lenullázódást feltételezve és végül – témánk szempontjából a legfontosabb – a Vasicek-modell meglepetésfaktorával számolva (tehát a nemzetgazdasági átlagkeresetből a kointegrált változók között felírt hibakorrekciós modellel becsülve).

Az ábra önmagáért beszél és a Vasicek-modell értő, vagyis a hibakorrekciós összefüggést is kihasználó alkalmazása mellett szól. Láthatjuk, hogy a véletlen bolyongás „természetéből” fakadó eltérés esetén a korlátozás automatikus (elhamarkodott) alkalmazása könnyen azt eredményezi, hogy elveszítjük az együttmozgó (közös trendet tartalmazó), de átmenetileg egymástól távolabb került idősorok hatékony előrejelezhetőségét. A küszöbértékek (korlátozások) alkalmazása során célszerűbb az előre megválasztott arányszámok helyett, a véletlen bolyongást követő idősorok hibatagjainak jellemzőit figyelembe véve, hibakorrekciós összefüggéseket felírni.



9. ábra. A tényleges (LAKAS_EUR), a lenullázott (LAKAS_EUR_NULL), illetve a hibakorrekciós modellel előrejelzett (LAKAS_EUR_ECF) lakásérték (euróban)

* * *

A pénzügyi ökonometria eredményei és a pénzügyi idősorokra felírt elméleti összefüggésekkel operáló modellek néha – a kointegrált idősorokhoz hasonlóan – eltávolodnak egymástól, pedig igazán hasznos, vagyis a mindennapi gyakorlatban hasznosítható eredményeket csak a két terület szoros együttműködésével lehet elérni. Ez a tanulmány, hasonlóan a dedikáció Címzettjének teljes életművéhez, az elmélet és az üzleti gyakorlat közötti híd szerepét kívánja betölteni.

Irodalom

1. Abaligeti Gallusz (2015): Nem-paraméteres okság tesztek két változóra. *Sigma*, 46(3-4), 159-185.
2. Ács Barnabás (2012): Was the financial crisis of 2008 forecastable? *Hungarian Statistical Review*, Special Number 16, 85-100.
3. Darvas Zsolt (2004): Robert F. Engle és Clive W. J. Granger, a 2003. évi Közgazdasági Nobel-díjasok. *Statisztikai Szemle*, 82(3) 296-319.
4. Ducker, M. (2005): Dynamic forecasts of qualitative variables: a qual-VAR model of U.S. Recessions. *Journal of Business Economics and Statistics*, 23(1), 96-104.

5. El Quadghiri, L. – Ucum, R. (2016): Jumps in equilibrium prices and asymmetric news in foreign exchange markets. *Economic Modelling*, 54, 218-234.
6. Engle, R. F. – Granger, C. W. J. (1987): Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55(2), 251-276.
7. Grabowski, W. – Welfe, A. (2020): The Tobit cointegrated vector autoregressive model: An application to the currency market. *Economic Modelling*, 89, 88-100.
8. Granger, C. W. J. – Newbold, P. (1974): Spurious regression in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2), 111-120.
9. Kehl Dániel (2012): „Hisztogram história”. (in Kehl D. – Rappai G. (szerk): *A statisztika szürke eminenciása*), PTE KTK, Pécs, 45-60.
10. Kopányi Szabolcs András (2009): *A hozamgörbe dinamikus becslése*. PhD értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
11. Kőrösi Gábor – Mátyás László – Székely István (1990): *Gyakorlati ökonometria*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
12. Ordonez-Callamad, D. – Villamizar-Villegas, M. – Melo-Velandia, L. F. (2018): Foreign exchange intervention revisited: a new way of estimating censored models. *International Finance*, 21(2), 195-213.
13. Rappai Gábor (2011): Okság a statisztikai modellekben. *Statisztikai Szemle*, 89(10-11), 1113-1129.
14. Rappai Gábor (2013): *Bevezető pénzügyi ökonometria*. Pearson Education, Harlow UK.
15. Vasicek, O. (1977): An equilibrium characterization of the term structure modell. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.
16. Vörös József (2020): A bedőlések valószínűségének (PD) meghatározására használt Vasicek-modell alkalmazhatóságáról és javaslatok a PD meghatározására (kézirat). PTE KTK, Pécs.
17. Ye, X. – Xu, J. – Wu, X. (2018): Estimation of an unbalanced panel data Tobit model with interactive effects. *Journal of Choice Modelling*, 28, 108-103.

COINTEGRATION BETWEEN CENSORED VARIABLES

The study investigates the cointegration between nonstationary censored endogenous variables in the case of restrictions. It examines that if common trend (cointegration) can be detected between the time series, then what changes need to occur to eliminate the error correction mechanism between the processes. A not rare anomaly is investigated; the case of one of the time series' value becomes zero due to an unexpected event. After reviewing the concept of random walk and cointegration, the paper mentions the Tobit cointegrated vector autoregressive model. It presents an error correction model between censored variables belonging to this model family. The Tobit-CVAR model is a further development of the qualitative vector autoregressive model, where the censored variable (y_t^*) is formed from a nonstationary variable (y_t) as follows

$$y_t^* = \begin{cases} y_t, & \text{if } y_t > 0; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The cointegration between the time series defined as above is examined using suitably chosen nonlinear models. In economics (or finance), especially in credit activities, or in liquidation processes, it often happens that if an asset value (loan-to-value, available liquid assets, etc.) reaches a certain lower threshold, the nature of the process changes drastically. In these cases, the asset value may even become zero. This phenomenon is described by the following formula, which is similar to the previous one. In this case, y_t^T is censored if it is formed as follows

$$y_t^T = \begin{cases} y_t, & \text{if } y_t \geq \tau; \\ 0 & \text{if } y_t < \tau, \end{cases}$$

where τ is the predefined threshold.

In the next part, the paper analyzes the effect of the threshold constraint (downsizing) on dynamic equilibrium relationship in terms of original cointegration between time series by simulation. Based on 10,000 simulations performed under the same initial conditions, we got the following plausible results regarding the ending of the error correction mechanism:

- if the tolerance is smaller (the fewer deviations from the initial value are allowed), it is more likely that the previously well-functioning error correction mechanism is eliminated,
- the earlier the significant negative deviation from the baseline occurs, the less probability will persist the common trend,
- it does not improve (rather worsens) the surviving chances of cointegration if we try to maintain the error correction mechanism by the sum of more time series censored on the same principle.

Finally, an illustrative example through Vasicek's model shows that a too drastic restriction may lead to an overestimation regarding the risk of a credit crunch. According to the Vasicek's model, if a macroeconomic variable (e.g., GDP, earnings, or price level) follows a stochastic trend (random walk with drift), then the surprise related to the return on financial assets also follows a stochastic trend. However, it has a common trend with the macroeconomic variable, which can be estimated with an error correction (EC) model. According to the above argument, the cointegration vector can be easily defined; the equation's parameters can be estimated in one step. The empirical example shows the case of a personal loan by collateral (a flat). Regardless of the debtor's income status, the lender considers the collateral to be acceptable only as long as it exceeds 80% of its initial value. The 12-year (monthly) data for Hungary shows that house prices and average incomes are cointegrated time series, so there is an error correction between the surprise and the macroeconomic variable. Consequently, the threshold's automatic application easily results in the loss of the effective predictability regarding the cointegrated but temporarily diverged time series. Instead of pre-selected ratios, it is more appropriate to describe error correction relationships considering the characteristics of the error terms regarding random walks, during the using of thresholds.