ÁLTALÁNOSÍTOTT KÁLMÁN-FÉLE KRITÉRIUMOK ALKALMAZÁSA AZ OLIGOPOL PROBLÉMÁRA[1]

MOLNÁR SÁNDOR – SZIDAROVSZKY FERENC

Szent István Egyetem – Corvinus Egyetem

A dolgozatban egy általánosított irányítási feladattal foglalkozunk, amely annyiban különbözik a klasszikus problémától, hogy az állapottranszformációs egyenlet nemcsak a jelenlegi állapottól és inputtól függ, hanem diszkrét esetben a megelőző inputot, a folytonos esetben pedig az inputfüggvény deriváltját is tartalmazza. Részletesen a diszkrét esettel foglalkozunk. Szükséges és elégséges feltételt adunk a végső állapot irányíthatóságára, és megadjuk azt a lineáris egyenletrendszert, aminek megoldásai szolgáltatják az irányítást biztosító input sorozatot. Ezek az eredmények a Kálmán-féle feltételek közvetlen általánosításai. A dinamikus oligopol játék esetén illusztráljuk az általános eredményeket.

1 Bevezetés

Gazdasági rendszerek irányíthatósága egy fontos problémakört jelent, amikor a rendszer gazdasági mutatóit előre megtervezett értékekre kívánjuk vezérelni egy adott későbbi időpontra.

Ezzel a kérdéskörrel az irányításelmélet foglalkozik, aminek alapjait lineáris rendszerek esetére a [Szidarovszky, F. et al., 1997] monográfia mutatja be. A modellben a következő időperiódusbeli állapot a jelenlegi állapot és input függvénye diszkrét időskálát feltételezve, a folytonos esetben pedig az állapot változásának iránya függ ugyanezektől. Az irányítást a megfelelően választott inputfüggvény garantálja, ha ilyen létezik.

A klasszikus oligopol modell irányíthatóságát vizsgálta a [Okuguchi, K. et al., 1999] kiadvány, amelyben a szerzők kimutatták, hogy a rendszer irányíthatósága függ az állapotváltozó és az input dimenziójától, valamint a marginális költségektől.

Gyakran szükséges az is, hogy az új állapot vagy az állapot változásának iránya nemcsak az input jelenlegi értékétől, hanem annak várható alakulásától is függjön. Például egy vállalat sokkal simábban tud alkalmazkodni az input változásaihoz, ha arról információja van.

Ebben a dolgozatban ezzel az általánosított irányítási problémával foglalkozunk. A diszkrét eset egyszerű lineáris algebrai eszközökkel könnyen tárgyalható, a folytonos eset azonban bonyolultabb és nehezebb matematikai apparátust igényel, ami meghaladja ennek a dolgozatnak a kereteit. Így ebben az esetben a felhasználandó apparátust és a részletes megoldást tartalmazó

[1] Beérkezett 2021. január 24. E-mail: `Molnar.Sandor@gek.szie.hu`.

munkákat mutatjuk be [Molnár, S., 1993], [Molnár, S. et al., 2017], [Molnár, S. et al., 2020].

2 Diszkrét matematikai modell

Diszkrét időskálát feltételezve tekintsük a következő általánosított irányítási feladatot

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t-1)\,, \tag{2.1}$$

ahol $\mathbf{x}$ az n dimenziós állapotváltozó, $\mathbf{u}$ egy m dimenziós input, $\mathbf{A}$ egy $n \times n$ típusú mátrix, valamint $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ $n \times m$ típusúak. A kezdeti állapot $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ adott. Olyan input sorozatot keresünk, amely a rendszer állapotát adott $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ vektorra vezérli, ahol T a végső idő periódus és $\mathbf{x}_T$ az előírt végállapot. Mindenekelőtt egy zárt formulára van szükségünk, ami $\mathbf{x}(T)$ értékét közvetlenül megadja a (2.1) rekurzív formula helyett.

Alkalmazzuk a (2.1) rekurziót $t = 1, 2, \ldots,$ esetére azzal a feltételezéssel, hogy $\mathbf{u}(-1) = \mathbf{0}$, hiszen a $t = 0$ időpontban kezdődik az irányítás. Könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(0), \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{C}\mathbf{u}(0) \\
&= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)\right) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) + \mathbf{C}\mathbf{u}(1) \\
&= \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}(0) + (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2),
\end{aligned}$$

ami alapján indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=0}^{t-2} \mathbf{A}^{t-2-\tau}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t-1) \tag{2.2}$$

Így a keresett $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(T-1)$ sorozat a

$$\sum_{\tau=0}^{T-2} \mathbf{A}^{T-2-\tau}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(T-1) = \mathbf{x}_T - \mathbf{A}^T\mathbf{x}_0 \tag{2.3}$$

egyenlet megoldása kell legyen. Vezessük be az általánosított Kálmán-féle irányítási mátrixot, amely $n \times (Tm)$ típusú,

$$\mathbf{K}_A = \left(\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C}, \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C}), \ldots, \mathbf{A}^{T-2}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C})\right)\,, \tag{2.4}$$

ekkor (2.3) a

$$\mathbf{K}_A \begin{pmatrix} \mathbf{u}(T-1) \\ \mathbf{u}(T-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{x}_T - \mathbf{A}^T\mathbf{x}_0 \tag{2.5}$$

egyenletre hozható.

2.1. Tétel. *A (2.1) rendszer akkor és csak akkor irányítható tetszőleges* $\mathbf{x}_T$ *végállapotra, ha az* $\mathbf{K}_A$ *mátrix rangja* n.

2.1. Megjegyzés. *A klasszikus irányítási feladatban* $\mathbf{C} = 0$, *akkor pedig*

$$\mathbf{K}_A = (\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{T-1}\mathbf{B})$$

ami a közismert klasszikus Kálmán-féle irányítási mátrixot adja.

2.1. Példa. *Legyen* $\mathbf{B}$ *olyan mátrix, amire* $\operatorname{rank}(\mathbf{B}) < n$, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ *az egységmátrix, valamint* $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$. *Ekkor*

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}), \quad \operatorname{rank}(\mathbf{K}) = \operatorname{rank}(\mathbf{B}) < n$$

és

$$\mathbf{K}_A = (\mathbf{B}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}), \quad \operatorname{rank}(\mathbf{K}_A) = n\,.$$

Az általánosított modell irányítható, amíg a hozzátartozó klasszikus modell nem.

2.2. Példa. *Legyen* $n = 2$, $m = 1$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = -\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank}(\mathbf{K}) = n\,,$$

míg

$$\mathbf{K}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank}(\mathbf{K}_A) = 1 < n\,.$$

Ebben az esetben a klasszikus modell irányítható, míg az általános modell nem.

2.2. Megjegyzés. *Egyik rendszer irányíthatóságából sem következik a másik irányíthatósága.*

2.3. Megjegyzés. *Az előírt végállapotba irányítható input sorozatokat a (2.5) lineáris egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják.*

2.4. Megjegyzés. *A Cayley-Hamilton tétel alapján* $\mathbf{A}^n$ *lineáris kombinációja az* $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ *mátrixoknak, így (2.4)-ben a* $\mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{AB} + \mathbf{C})$ *blokk utáni blokkok már nem változtathatják meg a* $\mathbf{K}_A$ *mátrix rangját. Tehát, ha a rendszer nem válik irányíthatóvá a* $T = n + 1$ *periódusig, akkor később már nem válhat irányíthatóvá.*

2.5. Megjegyzés. *Ha a rendszer nem teljesen irányítható, akkor is irányítható lehet bizonyos* $\mathbf{x}_T$ *állapotokra. Ez akkor lehetséges, ha* $\mathbf{x}_T - \mathbf{A}^T\mathbf{x}_0$ *a* $\mathbf{K}_A$ *mátrix oszlopterének eleme.*

Az előzőekben idővariáns rendszert vizsgáltunk, az általánosabb időfüggő rendszerek esete ugyanígy tárgyalható minimális változtatásokkal, amelyeket az érdeklődő olvasó egyszerű gyakorlatként elvégezhet.

3 Diszkrét oligopol modell

Tekintsünk n vállalatot, amelyek azonos terméket gyártanak és egy közös piacon értékesítik. Jelölje x_k a k-dik termelő kibocsátását, így az összes termékmennyiség $s = \sum_{k=1}^{n} x_k$, és a k-diktól különböző vállalatok együttes termelékenysége $s_k = \sum_{l \neq k} x_l$. Lineáris ár- és költségfüggvényeket feltételezve

$$p(s) = A - Bs \quad (A, B > 0) \quad \text{és} \quad C(x_k) = \alpha_k x_k + \beta_k \quad (\alpha_k > 0,\ \beta_k \geq 0)$$

jelöli az árfüggvényt és a k-adik vállalat költségfüggvényét.

Tegyük fel, hogy az állam támogatja a termelést u_k hozzájárulással minden egységnyi termékmennyiséghez. Így a k-adik vállalat profitja a bevétel és a kiadás különbsége

$$\begin{aligned} \Pi_k &= x_k(A - Bx_k - Bs_k) - (\alpha_k - u_k)x_k - \beta_k \\ &= x_k(A - Bx_k - Bs_k - \alpha_k + u_k) - \beta_k \,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A vállalat maximális profitra törekszik, ami a többiek termelésétől is függ, így adott s_k mellett az optimumfeltételek

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial x_k} = A - 2Bx_k - Bs_k - \alpha_k + u_k = 0\,, \tag{3.2}$$

vagyis az optimális termékkibocsátása

$$x_k = \frac{1}{2B}(A - Bs_k - \alpha_k + u_k)\,. \tag{3.3}$$

Azonban $s_k = s - x_k$, így (3.2) az

$$A - 2Bx_k - Bs + Bx_k - \alpha_k + u_k = 0$$

alakba is írható, amiből

$$x_k = \frac{1}{B}(A - Bs - \alpha_k + u_k) \tag{3.4}$$

pozitív optimumot feltételezve. Ha valamelyik vállalatnál $x_l = 0$, akkor ez a vállalat abbahagyja a tevékenységét, így nyugodtan feltételezhetjük, hogy $x_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$. A statikus Nash-egyensúly esetén az összes vállalat kielégíti a (3.4) feltételt. Ha összeadjuk a (3.4) egyenletet $k = 1, 2, \ldots, n$ esetére, akkor

$$s = \frac{1}{B}\left(nA - nBs - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l + \sum_{l=1}^{n} u_l\right)$$

adódik, amiből megkapjuk a teljes egyensúlyi kibocsátást

$$\bar{s} = \frac{1}{(n+1)B}\left(nA - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l + \sum_{l=1}^{n} u_l\right), \tag{3.5}$$

valamint a k-dik vállalat egyensúlyi kibocsátása (3.4) alapján

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= \frac{1}{B}\left(A - \frac{nA - \sum_{l=1}^n \alpha_l + \sum_{l=1}^n u_l}{n+1} - \alpha_k + u_k\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)B}\left(A + \sum_{l=0}^{n} \alpha_l - \sum_{l=0}^{n} u_l - (n+1)\alpha_k + (n+1)u_k\right),\end{aligned} \tag{3.6}$$

amelyek a statikus játék egyensúlypontját adják.

Diszkrét időskálát feltételezve tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban a kezdeti kibocsátások adottak, és a további $t = 1, 2, \ldots$ időpontokban a k-dik vállalat a következőképpen gondolkodik. A többiek együttes kibocsátása $\sum_{l \neq k}^{n} x_l(t)$, amit a vállalat nem ismer, de feltételezi, a következő periódusra ez nem változik, amit statikus elvárásnak szoktak nevezni. Így a $(t+1)$-dik periódusban a vélt optimális termelékenysége (3.3) alapján

$$x_k(t+1) = \frac{1}{2B}\Big(A - B\sum_{l \neq k} x_l(t) - \alpha_k + u_k(t)\Big). \tag{3.7}$$

A vállalat azonban figyelembe szeretné venni a szubvenció esetleges változását, így (3.7) helyett alkalmas γ_k konstans mellett az

$$x_k(t+1) = \frac{1}{2B}\Big(A - B\sum_{l \neq k} x_l(t) - \alpha_k + u_k(t)\Big) + \gamma_k\left(u_k(t) - u_k(t-1)\right)$$

dinamikát választja, amely homogén megfelelője

$$z_k(t+1) = -\frac{1}{2}\sum_{l \neq k} z_l(t) + \left(\frac{1}{2B} + \gamma_k\right) u_k(t) - \gamma_k u_k(t-1) \tag{3.8}$$

alakra írható. Ha bevezetjük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \ldots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ldots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2B} + \gamma_1 \\ \frac{1}{2B} + \gamma_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2B} + \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \\ \vdots \\ -\gamma_n \end{pmatrix}$$

mátrixot és vektorokat, akkor a (2.1) modellt kapjuk.

A $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$ speciális esetben

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{2B} + \gamma\right)\mathbf{1}, \quad \mathbf{C} = -\gamma\mathbf{1}, \quad \mathbf{A} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{1} \times \mathbf{1}^T - \mathbf{I}\right),$$

ahol $\mathbf{1}$ az n elemű, csupa 1 komponensű vektor. Így $\mathbf{K}_A$ minden oszlopa az $\mathbf{1}$ vektor skalárszorosa, azaz $\operatorname{rank}\mathbf{K}_A = 1$, a modell nem irányítható.

Tekintsük az $n = 2$ esetet $\gamma_1 \neq \gamma_2$ esetén. Ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2B} + \gamma_1 \\ \frac{1}{2B} + \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4B} - \frac{1}{2}\gamma_2 \\ -\frac{1}{4B} - \frac{1}{2}\gamma_1 \end{pmatrix},$$

így

$$\mathbf{AB} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4B} - \frac{1}{2}\gamma_2 - \gamma_1 \\ -\frac{1}{4B} - \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 \end{pmatrix}$$

és

$$\mathbf{K}_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2B} + \gamma_1 & -\frac{1}{4B} - \frac{1}{2}\gamma_2 - \gamma_1 \\ \frac{1}{2B} + \gamma_2 & -\frac{1}{4B} - \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K}_A &= \left(\frac{1}{2B} + \gamma_1\right)\left(-\frac{1}{4B} - \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1\right) - \left(\frac{1}{2B} + \gamma_2\right)\left(-\frac{1}{4B} - \frac{1}{2}\gamma_2 - \gamma_1\right) \\ &= -\frac{1}{2}\gamma_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_2^2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

amely nyilvánvalóan zérus $\gamma_1 = \gamma_2$ esetén. A modell irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy a (3.10) kifejezés zérustól különböző értékű legyen, azaz $|\gamma_1| \neq |\gamma_2|$.

4 Folytonos matematikai modell

A (2.1) diszkrét rendszer folytonos megfelelőjét akkor kapjuk, ha azt átírjuk

$$\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{u}(t) + (-\mathbf{C})(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-1)) \tag{4.1}$$

alakba. Ha az $\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t)$ és $\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-1)$ különbségeket deriváltakkal helyettesítjük, akkor az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{u}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) \tag{4.2}$$

modell adódik. Ilyen típusú rendszerek irányítási problémájának vizsgálata messze meghaladja ennek a cikknek kereteit, mert igen bonyolult matematikai apparátust igényel.

A fenti probléma vizsgálatához szükséges matematikai apparátus részletesen megtalálható [Molnár, S., 1993], [Molnár, S. et al., 2017] és [Molnár, S., 2017]-ben.

Az említett dolgozatok eredményeit a következőkben lehet összefoglalni. A megfogalmazott célkitűzések eléréshez szükség volt néhány algebrai fogalom összefoglalására, többek között a gyűrű, a differenciálgyűrű, az algebrai, illetve differenciálalgebrai függés, függetlenség, a differenciálpolinom és az algebrai differenciálegyenlet fogalmára. A paraméterváltozós irányítási rendszerek vizsgálatához az állapottól, ill. a kimenetektől függő paraméterek esetén a parciális differenciálgyűrűk néhány elemi tulajdonságaira is szükség volt az egységes módszertani keretek végett. Az természetes, hogy a bemeneteknek a deriváltjai is szerepelhetnek mind az állapottérben megfogalmazott irányítási differenciálegyenletekben, mind a kimenetekben. Ezzel természetes módon adódik a Kálmán-féle kanonikus alakoknál is általánosabb ún. Fliess-féle kanonikus alak [Kalman, R. E. et al., 1969], [Fliess, M., 1991]. Beszélhetünk lineáris rendszerekről is, amikor az adott leíró egyenletek lineárisak az állapotváltozókban és a bemenetekben, ill. azok deriváltjaiban is. A fogalmak használhatóságára mutatnak a szerzők egy érdekes eredményt, amely a klasszikus Kálmán-féle mátrix-rangfeltétel általánosítása [Molnár, S., 1993], [Molnár, S. et al., 2020].

Legyen a vizsgált rendszer a (derivált Fliess-féle jelölésével)

$$dx = Ax + \sum_{i=0}^{I} B_i d^i u$$

$$y = Cx + \sum_{i=0}^{I} D_i d^i u.$$

Ennek az elérhetőségét tekintve a

$$\rho \left[\sum_{i=0}^{I} A^i B_i, A \left(\sum_{i=0}^{I} A^i B_i \right), ..., A^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{I} A^i B_i \right) \right] = n$$

feltétel szükséges és elégséges. Ez a Kálmán-féle rangfeltétel általánosítása.

A szerzők vizsgálták a lineáris időtől függő rendszerek úgynevezett rendszertulajdonságait is. Rendszertulajdonságokon a bemenet-kimenet rendszerek 0-ból való elérhetőségét, 0-ba irányíthatóságát, megfigyelhetőségét és rekonstruálhatóságát, valamint valamilyen típusú stabilitását értjük. Ez utóbbival nem foglalkoztak átfogóan, mert a klasszikus Ljapunov-féle módszerek, a Riccati-egyenletes jellemzések lényegében megoldják a problémát ebben a rendszerosztályban is.

A klasszikus kanonikus alakú

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t)$$

$$y(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t)$$

időtől függő együtthatós rendszerekre Kálmán minden alapkérdést megoldott.

Bebizonyította az általa definiált alapvető fogalmakat illetően (elérhetőség, irányíthatóság, megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság) az elérhetőség és megfigyelhetőség, illetve az irányíthatóság és rekonstruálhatóság közötti dualitást, valamint a folytonos idejű (2.1) alakú rendszerekre fennálló elérhetőség és irányíthatóság, valamint megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság párok ekvivalenciáját. Ennek értelmében csak egyetlen rendszertulajdonsággal, az elérhetőséggel foglalkoztak a szerzők.

Tételeik (ld. Molnár S. et al., [Molnár, S., 1993], [Molnár, S. et al., 2017], [Molnár, S. et al., 2020], [Molnár, S., 2017]) kapcsolatot teremtenek az elérhetőség Gram-féle mátrixos jellemzése és az általánosított Kálmán-féle rangfeltétellel megfogalmazott szükséges és elégséges feltétel között. Ez azonban nem teljesen zökkenőmentes, ui. szükség volt további, az időfüggő együtthatókra vonatkozó differenciálalgebrai feltételekre is, az ún. gerjesztési feltételekre. Ezt úgy kapták meg, hogy a Wei-Norman-féle differenciálegyenletre [Wei, J. and Norman, E., 1964] alkalmazták a Diop-féle állapoteliminációs algoritmust [Diop, S., 1991], [Molnár, S. et al., 2017].

A továbbiakban az előzőekben említettekhez hasonlóan strukturált rendszert vizsgáltak, de az időtől függő együtthatók helyett állapotfüggést feltételeztek.

Állításaikat a speciális

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{I} p_i(t) A_i x + q(t) Bu$$

alakú rendszerekre mutatták be. Bebizonyították, hogy ha a $p(x)$ együttható teljesít egy ún. gerjesztési feltételt, amely egy p-re vonatkozó parciális differenciálegyenlet nem teljesülését jelenti, akkor kivéve egy nem sűrű szinguláris felületet, a rendszer lokális irányíthatóságának a feltétele a jól ismert

$$\rho\left(B, AB, \ldots. A^{n-1}B\right) = n$$

rangfeltétel lesz.

A lokalitás itt azt jelenti, hogy a szingularitási felület felbonthatja több nyílt komponensre az állapotteret, amelyek együttesen sűrű halmazt alkotnak ugyan, de nem feltétlenül lehet egyik komponensről a másikra irányítani a rendszert.

Az általános tételt hasonlóképpen igazolták, egy technikailag finomított módszerrel. Az általánosított, ún. perzisztencia gerjesztési tétel hasonlót állít. A gerjesztési feltételek teljesülése esetén a lokális irányíthatóság szükséges és elégséges feltétele az általánosított Kálmán-féle rangfeltétel teljesülése. Ezen túlmenően további nagyon érdekes eredmények találhatóak a Molnár et al., [Molnár, S., 2020] forrásban.

5 Folytonos oligopol modell

Ha a (4.2) átírást a (3.8) egyenletre alkalmazzuk, akkor

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \cdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2B} \\ \frac{1}{2B} \\ \vdots \\ \frac{1}{2B} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \\ \vdots \\ -\gamma_n \end{pmatrix},$$

így a folytonos modell a következő alakú

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \cdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -1 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2B} \\ \frac{1}{2B} \\ \vdots \\ \frac{1}{2B} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t).$$

Ennek a modellnek a vizsgálata az általános elmélet alapján végezhető el, a részletek nehézsége és bonyolultsága miatt ezzel itt nem tudunk foglalkozni.

6 Befejező megjegyzések

A dolgozatban a klasszikus irányításelmélet olyan kiterjesztését vezettük be, amikor az állapot transzformációs egyenlet nemcsak a jelenlegi állapot és input függvénye, hanem az eggyel megelőző inputtól vagy annak deriváltjától is függ. A diszkrét időskála esetén szükséges és elégséges feltételt adtunk az állapotfüggvény irányíthatóságára és módszert is adtunk az irányító input sorozat megtalálására. Amennyiben a megoldás nem egyértelmű, akkor a megoldáshalmazon egy alkalmas célfüggvényt, például az inputok összes költségét lehet minimalizálni. Erre a kérdésre egy következő dolgozatban még visszatérünk. Folytonos időskála mellett az általános modellt megfogalmaztuk, és irodalmi útmutatást adtunk a megoldás elméleti hátterére és konkrét alkalmazására.

Az oligopol játék esetére mutattuk be a modelleket, és a diszkrét esetben a megoldást is bemutattuk.

Irodalom

1. Szidarovszky, F. and Bahill, A. T. (1997): *Linear Systems Theory* (2nd edition), CRC Press, Boca Raton, Boston.
2. Okuguchi, K. and Szidarovszky, F. (1999): *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-60169-9
3. Wei, J. and Norman, E. (1964): On Global Representation of the Solutions of Linear Differential Equations as a Product of Exponentials, *Proc. Amer. Math. Soc*, Vol. 15, No. 12, pp. 327-334. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1964-0160009-0
4. Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A. (1969): *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, St. Louis, Toronto, London, Sydney.
5. Diop, S. (1991): Elimination in Control Theory, Mathematics of Control, *Signals and Systems*, 4(1), 17-32. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02551378
6. Fliess, M. (1991): *Controllability Revisited in Mathematical System Theory: The influence of R. E. Kalman*, A. C. Antoulas (Szerk.) Springer-Verlag, Berlin. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-08546-2_26
7. Molnár, S. (1993): Kalman's Rank Conditions for Time Dependent Linear Systems, *Pure Mathematics and Applications*, 4(3), 353–361.
8. Molnár, S. and Molnár, M. (2017): Approximation of LPV-Systems with Constant-Parametric Switching Systems In: Matsumoto, A. (szerk.) *Optimization and Dynamics with Their Applications: Essays in Honor of Ferenc Szidarovszky*, Springer Verlag, Singapore, 127–154. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-10-4214-0_8
9. Molnár, S. and Molnár, M. (2020): Properties of Linear Time-Dependent Systems In: Bischi, G. I.; Szidarovszky, F. (szerk.), *Games and Dynamics in*

Economics, Springer, Singapore, 271–290. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-15-3623-6_15

10. Molnár, S. (2017): Qualitative Analysis of Structured Systems, doctoral dissertation for the Hungarian Academy of Sciences (in Hungarian: Strukturált rendszerek kvalitatív vizsgálata, MTA doktori disszertáció).
11. Molnár, S. (2020): Assessment of Quantitative System Attributes with Finite Structured Parametric Groups (megjelenés alatt).

GENERALIZED KALMAN-TYPE RANK CONDITIONS FOR OLIGOPOLIES

A generalized final state control model is introduced, in which the state transition relation depends on the current state and input as usual, and in addition it contains the input in the previous time period in the discrete case, or the derivative of the input function in the continuous case. The discrete case is discussed in detail. Sufficient and necessary conditions are given for the complete controllability of the final state and a system of linear algebraic equations is derived, the solutions of which provide the controlling input sequence. These results are straightforward generalizations of the corresponding Kalman-type rank conditions. The general methodology is illustrated in the case of the dynamic oligopoly game.