FOLYTONOS DINAMIKUS COURNOT MODELLEK ÉS KITERJESZTÉSÜK[1]

FEUER GÁBOR – SZIDAROVSZKY FERENC – TERRY A. BAHILL
G. Feuer Ges.m.b.H. – Arizonai Egyetem

Realisztikus oligopol modelleket tárgyalunk folytonos időskála mellett. A piaci árfüggvény változását, termékmennyiség növelési költségét, környezetszennyezés csökkentését, valamint a különböző termelők költségkölcsönhatásait is figyelembe vevő modellek aszimptotikus tulajdonságait vizsgáljuk meg. A megfelelő diszkrét modelleket egy korábbi dolgozatban vezettük be és tárgyaltuk (Feuer és Szidarovszky, 2007).

1 Bevezetés

Az oligopol modellek jelentős irodalommal rendelkeznek, és az egyik leggyakrabban tárgyalt témakört jelentik a matematikai közgazdaságtan területén. A legegyszerűbb modell Cournot (1838) munkásságához vezethető vissza, és őt követően kutatók egész sora tanulmányozta az oligopol modellek tulajdonságait.

Kezdetben az egyensúlypont létezése és egyértelműsége volt a központi probléma, majd a modellek különféle változatai kerültek előtérbe. Differenciált termékű, többtermékes, alkalmazott-tulajdonú és piacmegosztási modelleket vezettek be és tanulmányoztak. Ugyanakkor a modellek dinamikus kiterjesztéseit is vizsgálták, ahol az egyensúlypont aszimptotikus stabilitásának feltételeit keresték meg. A korábbi eredmények jó összefoglalását adja a Okuguchi (1976) monográfia, és ezek többtermékes általánosítását, valamint többféle alkalmazását tárgyalja Okuguchi és Szidarovszky (1999) könyve. A dinamikus modellek stabilitási vizsgálata Theocharis (1959) cikkével kezdődött, aki kimutatta, hogy a dinamikus modell lineáris költség és árfüggvények, valamint diszkrét időskála mellett akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha csak két cég versenyez. A nemlineáris eset ennél sokkal bonyolultabb, a legfontosabb eredményeket a Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky (2007) monográfia tartalmazza. Nemlineáris esetekben a lokális és globális aszimptotikus stabilitás nem ekvivalens.

A korábbi modellek realitástartalma igen korlátozott volt, mert számos lényeges tényezőt nem vettek figyelembe. A Feuer és Szidarovszky (2009) dolgozat több modell kiterjesztést vezetett be és vizsgált diszkrét időskála mellett. Ezek a modellek figyelembe veszik a piaci árfüggvény időbeni változását, a kapacitásnövelés egyéb költségeit, környezetvédelmi kérdéseket, valamint

[1]Beérkezett: 2008. május 7. E-mail: `szidar@sie.arizona.edu`.

a különböző termelők költségkölcsönhatásait. Jelen dolgozatunkban ugyanezeknek a modelleknek a stabilitását vizsgáljuk meg folytonos időskála mellett. Vizsgálatunk a lokális aszimptotikus stabilitásra vonatkozik, amely nemlineáris esetekben nem garantálja a rendszer globális aszimptotikus stabilitását.

2 A klasszikus Cournot modell

A Cournot modellek legegyszerűbb változatában N termelőt, vagy szolgáltatót feltételezünk, akik azonos terméket termelnek, vagy azonos szolgáltatást ajánlanak ugyanazon a piacon. Ha x_k jelöli a k-adik termelő (vagy szolgáltató) által piacra bocsájtott mennyiséget és L_k a kapacitás korlátját, akkor nyilvánvalóan $0 \leq x_k \leq L_k$. A teljes piaci kínálat

$$s = \sum_{k=1}^{N} x_k,$$

az árfüggvény $p(s)$, és $c_k(x_k)$ a k-adik termelő vagy szolgáltató költségfüggvénye. Ezek alapján a k-adik termelő (vagy szolgáltató) profitja:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(s) - c_k(x_k) \; . \tag{1}$$

Ez a piaci szituáció egy N-személyes játék, ahol a termelők (vagy szolgáltatók) a játékosok, a k-adik játékos stratégiahalmaza a $[0, L_k]$ intervallum és φ_k a kifizetőfüggvénye.

Az $s_k = \sum_{l \neq k}^{N} x_l$ jelöléssel nyilvánvalóan

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(s_k + x_k) - c_k(x_k) \; , \tag{2}$$

azaz a k-adik játékos kifizető függvénye csak a többi játékos együttes kínálatától függ. A k-adik játékos válaszfüggvényét úgy kapjuk meg, hogy rögzített s_k mellett maximalizáljuk φ_k értékét:

$$R_k(s_k) = \underset{0 \leq x_k \leq L_k}{\operatorname{argmax}} \{x_k p(s_k + x_k) - c_k(x_k)\} \; . \tag{3}$$

Az oligopol játékok irodalmában általában felteszik, hogy a p és c_k függvények kétszer folytonosan diferrenciálhatók, valamint

(A) $p' < 0;\;\; c_k' > 0;$

(B) $p' + x_k p'' \leq 0;$

(C) $p' - c_k'' < 0;$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ érték mellett.

A fenti feltételek teljesülése esetén

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = p + x_k p' - c_k'$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} = 2p' + x_k p'' - c_k'' < 0 \,, \tag{4}$$

így φ_k szigorúan konkáv az x_k változóban. Így $R_k(s_k)$ egyértelmű és a következőképpen kapható meg:

$$R_k(s_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k) - c_k'(0) \le 0; \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(s_k + L_k) + p(x_k + L_k) - c_k'(L_k) \ge 0; \\ z_k & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{5}$$

ahol z_k a

$$z_k p'(z_k + s_k) + p(z_k + s_k) - c_k'(z_k) = 0 \tag{6}$$

egyenlet egyértelmű megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban. Vegyük észre, hogy (6) bal oldala szigorúan csökkenő, $z_k = 0$ esetén pozitív és $z_k = L_k$ esetén negatív. Így az egyértelmű megoldás létezése biztosított. Az implicit függvények tétele alapján R_k is folytonosan differenciálható, és R_k' értéke a (6) egyenletből implicit differenciálással kapható meg:

$$R_k' p' + z_k p''(1 + R_k') + p'(1 + R_k') - c_k'' R_k' = 0$$

amelyből

$$R_k' = -\frac{p' + z_k p''}{2p' + z_k p'' - c_k'} \in (-1, 0] \,. \tag{7}$$

A statikus oligopol-játék egyensúlya olyan $x_1^*, \ldots, x_N^*$ stratégiavektor, amelyre minden k mellett teljesül, hogy

$$0 \le x_k^* \le L_k \quad \text{és} \quad x_k^* = R_k\left(\sum_{l \ne k} x_l^*\right) .$$

Nem-egyensúlyi állapotok esetén feltételezzük, hogy a játékosok a válaszfüggvény által biztosított legjobb profit irányába mozdítják el stratégiáikat, amely folytonos időskála feltételezése mellett az

$$x_k'(t) = K_k\left(R_k\left(\sum_{l \ne k} x_l(t)\right) - x_k(t)\right) \tag{8}$$

differenciálegyenlettel írható le, ahol $K_k > 0$ a játékos által választott paraméter. Érdemes megjegyeznünk, hogy a (8) dinamikus rendszer és a statikus N-személyes oligopol-játék egyensúlypontjai egybeesnek. Az irodalomból ismert (lásd Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky, 2009), hogy a fenti (A)–(C) feltételek mellett a (8) rendszer egyensúlypontja lokálisan aszimptotikusan stabilis, ami azt jelenti, hogy ha a kezdeti $x_k(0)$ stratégiák elég közel vannak az egyensúlyi stratégiákhoz, akkor $t \to \infty$ esetén a stratégiák az egyensúlyponthoz konvergálnak. A dolgozat további részeiben a modell többféle kiterjesztését és a megfelelő dinamikus rendszerek stabilitását vizsgáljuk meg.

3 Árfüggvények időbeli kölcsönhatása

Piacok telítettségét a korábbi modellek általában nem veszik figyelembe, hasonlóan elhanyagolják a vásárlók ízlésének változását, vásárlási szokások befolyásolását. Mindezek azt eredményezik, hogy az ár a korábbi fogyasztásoktól is függ. Matematikailag feltesszük tehát, hogy a korábbi értékesítések összhatása egy időfüggő Q változóval írható le, amely egy

$$Q'(t) = H\left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t)\right) \tag{9}$$

dinamikával változik. Például a piac telítődése a speciális

$$Q'(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) - \alpha Q(t)$$

egyenlőséggel jellemezhető, ahol az első tag a jelenlegi fogyasztást, a második pedig az utolsó periódusban elhasználódott termékmennyiséget jelenti. Feltettük továbbá, hogy az árfüggvény nemcsak az értékesített termékmennyiségtől, hanem Q aktuális értékétől is függ. Így a k-adik termelő profitja:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N, Q) = x_k p(x_k + s_k, Q) - c_k(x_k)\ .$$

Feltesszük most, hogy

(A) $p' < 0;\ \ c_k' > 0;$

(B) $p' + x_k p_{xx}'' \leq 0;$

(C) $p_x' - c_k'' < 0;$

(D) $p_Q' + x_k p_{xQ}'' \leq 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ és Q mellett. A k-adik termelő válaszfüggvénye:

$$R_k(s_k, Q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k, Q) - c_k'(0) \leq 0; \\ L_k, & \text{ha } L_k p_x'(s_k + L_k, Q) + p(s_k + L_k, Q) - c_k'(L_k) \geq 0; \\ z_k & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{10}$$

ahol z_k a

$$p(z_k + s_k, Q) + z_k p_x'(z_k + s_k, Q) - c_k'(z_k) = 0 \tag{11}$$

egyenlet egyetlen megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban.

Implicit deriválással

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p_x' + x_k p_{xx}''}{2p_x' + x_k p_{xx}'' - c_k''} \in (-1, 0] \tag{12}$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial Q} = -\frac{p'_Q + x_k p''_{xQ}}{2p'_x + x_k p''_{xx} - c''_k} \in (-\infty, 0] \; . \tag{13}$$

Hasonlóan a (8) dinamikához, ebben az esetben az

$$\begin{aligned} x'_k(t) &= K_k \left(R_k \left(\sum_{l \neq k} x_l(t), Q(t) \right) - x_k(t) \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ Q'(t) &= H \left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t) \right) \end{aligned} \tag{14}$$

rendszert kapjuk, ahol $K_k > 0$ egy konstans. A rendszer Jacobi mátrixa a következő:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -K_1 & K_1 r_1 & \ldots & K_1 r_1 & K_1 \check{r}_1 \\ K_2 r_2 & -K_2 & \ldots & K_2 r_2 & K_2 \check{r}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_N r_N & K_N r_N & \ldots & -K_N & K_N \check{r}_n \\ h & h & & h & \hat{h} \end{bmatrix} \tag{15}$$

ahol

$$h = \frac{\partial H}{\partial s} \quad \text{és} \quad \hat{h} = \frac{\partial H}{\partial Q} \; .$$

A diszkrét esethez (lásd Feuer és Szidarovszky, 2007) hasonlóan tekintsük a szimmetrikus esetet, amikor $r_1 = \ldots = r_N = r$, $\check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r}$ és $K_1 = \ldots = K_N = K$. Ekkor (15) sajátértékfeladata a következőképpen egyszerűsödik:

$$-Ku_k + Kr \sum_{l \neq k} u_l + K\check{r}v = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{16}$$

$$h \sum_{k=1}^{N} u_k + \hat{h}v = \lambda v \; . \tag{17}$$

Vezessük be az $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$ változót, akkor (16) átírható a

$$KrU + K\check{r}v - (K + Kr + \lambda)u_k = 0 \tag{18}$$

alakba. Tegyük fel először, hogy $\lambda = -K(1 + r)$. A (12) egyenlőtlenség alapján ez az érték negatív, így nem befolyásolja a rendszer aszimptotikus stabilitását. Különben $u_1 = \ldots = u_N = u$ és így

$$\begin{aligned} ((N-1)Kr - K - \lambda)u + K\check{r}v = 0 \\ Nhu + (\hat{h} - \lambda)v = 0 \; . \end{aligned} \tag{19}$$

Nemtriviális megoldás akkor és csak akkor létezik, ha

$$\det \begin{bmatrix} (N-1)Kr - K - \lambda & K\check{r} \\ Nh & \hat{h} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \; , \tag{20}$$

azaz

$$\lambda^2 - \lambda(\hat{h} + (N-1)Kr - K) + \hat{h}((N-1)Kr - K) - K\check{r}Nh = 0\,. \tag{21}$$

Tegyük most fel, hogy $h > 0$ és $\hat{h} < 0$ (ami mindenképpen teljesül a piaci telítődés esetén), akkor mind a lineáris együttható és mind a konstans tag pozitív. A rendszer aszimptotikus stabilitása pedig a következő segédtétel egyszerű következménye.

Lemma. *A $\lambda^2 + \lambda p + q = 0$ másodfokú egyenlet (p, q valós együtthatók) gyökeinek valós része akkor és csak akkor negatív, ha p és q pozitív értékű.*

Ez az eredmény azt jelenti, hogy az árfüggvények időbeli kölcsönhatásának figyelembevétele pontosabb modell a stabilitás elvesztése nélkül.

4 Termékmennyiség növelési költségek figyelembevétele

Tegyük most fel, hogy a termelési menyiség növelésének költségét is figyelembe veszik a termelők. A k-adik termelő profitja:

$$x_k p(s_k + x_k) - c_k(x_k) - A_k(x_k, x'_k) \tag{22}$$

ahol az utolsó tag a termékmennyiség növelési többletköltséget jelöli. A válaszfüggvény (5)-höz hasonlóan

$$R_k(s_k, x'_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k) - c'_k(0) - A'_{kx}(0, x'_k) \le 0; \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(L_k + s_k) + p(L_k + s_k) - c'_k(L_k) - A'_{kx}(L_x, x'_k) \ge 0; \\ z_k & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{23}$$

ahol z_k a

$$z_k p'(z_k + s_k) + p(z_k + s_k) - c'_k(z_k) - A'_{kx}(z_k, x'_k) = 0 \tag{24}$$

egyenlet egyértelmű megoldása. Az egyértelmű megoldás biztosítása érdekében a klasszikus Cournot modell (A), (B) és (C) feltételein kívül azt is feltételeznünk kell, hogy A_k konvex z_k-ban bármely rögzített x'_k mellett. Implicit deriválással,

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p''}{2p' + x_k p'' - c''_k - A''_{kxx}} \in (-1, 0] \tag{25}$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial x'_k(t)} = -\frac{A''_{kxx'}}{2p' + x_k p'' - c''_k - A''_{kxx}} \le 0 \tag{26}$$

ha a fentieken kívül feltesszük, hogy $A''_{kxx'} \ge 0$. A dinamikus egyenletek implicitek ebben az esetben:

$$x'_k(t) = K_k \left(R_k \left(\sum_{l \ne k} x_l(t), x'_k(t) \right) - x_k(t) \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{27}$$

Minthogy a jobboldal csökken $x'_k(t)$-ben, az egyensúlypont környezetében $x'_k(t)$ egyértelmű és egyértelmű függvénye $x_k(t)$-nek és $\sum_{l\neq k} x_l(t)$-nek. Implicit deriválással kaphatjuk meg a Jacobi mátrix elemeit, az eredmény:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{1-K_1\check{r}_1} & \frac{K_1 r_1}{1-K_1\check{r}_1} & \cdots & \frac{K_1 r_1}{1-K_1\check{r}_1} \\ \frac{K_2 r_2}{1-K_2\check{r}_2} & -\frac{K_2}{1-K_2\check{r}_2} & \cdots & \frac{K_2 r_2}{1-K_2\check{r}_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{K_N r_N}{1-K_N\check{r}_N} & \frac{K_N r_N}{1-K_N\check{r}_N} & \cdots & -\frac{K_N}{1-K_N\check{r}_N} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

A szimmetrikus esetben $r_1 = \ldots = r_N = r$, $\check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r}$ és $K_1 = \ldots = K_N = K$.

A Jacobi mátrix sajátérték-feladata a következő:

$$-\frac{K}{1-K\check{r}}u_k + \frac{Kr}{1-K\check{r}}\sum_{l\neq k} u_l = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{29}$$

Ha ismét bevezetjük az $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$ jelölést, akkor ezt a

$$\frac{Kr}{1-K\check{r}}U - \left(\frac{K(1+r)}{1-K\check{r}} + \lambda\right) u_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{30}$$

alakba tudjuk átírni. Ha $\lambda = -\dfrac{K(1+r)}{1-K\check{r}} < 0$, akkor a sajátérték nem befolyásolja a stabilitást. Ellenkező esetben $u_1 = \ldots = u_N = u$ és (29) alapján akkor

$$\left(\frac{-K + Kr(N-1)}{1-K\check{r}} - \lambda\right) u = 0 \tag{31}$$

azaz

$$\lambda = \frac{-K + Kr(N-1)}{1-K\check{r}} < 0 \tag{32}$$

a sajátérték. Minthogy ez is negatív értékű, a rendszer aszimptotikusan stabilis. Ez az eredmény is azt mutatja, hogy a reálisabb modellel a rendszer aszimptotikus stabilitása nem veszik el.

5 Ipari szennyeződés csökkentésének figyelembe vétele

Ebben a modellben feltesszük, hogy a termelők közös telepen tisztítják az ipari szennyeződést, és a felmerülő költséget a termékmennyiségek arányában osztják el. Ekkor a k-adik termelő profitja:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) - x_k \frac{T(x_k + s_k)}{(x_k + s_k)}\,. \tag{33}$$

Ha bevezetjük a

$$P(x_k + s_k) = p(x_k + s_k) - \frac{T(x_k + s_k)}{(x_k + s_k)} \tag{34}$$

jelölést, akkor (33) a klasszikus Cournot modellel írható le, amikor az árfüggvényt P helyettesíti. Feltéve, hogy P is kétszer folytonosan differenciálható, (7) alapján

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{P' + x_k P''}{2P' + x_k P'' - c_k''} \ . \tag{35}$$

Ha garantálni tudjuk, hogy $-1 < r \leq 0$, akkor az egyensúlypont aszimptotikusan stabilis marad. Ez biztosan teljesül, ha

$$P' + x_k P'' \leq 0 \qquad \text{és} \qquad P' - c_k'' < 0 \ .$$

Egyszerű differenciálással látható, hogy

$$P' = p' - \frac{T's - T}{s^2} \tag{36}$$

és

$$P'' = p'' - \frac{T''s^2 - 2T's + 2T}{s^3} \ . \tag{37}$$

A rendszer aszimptotikusan stabilis marad, ha p szigorúan csökken és konkáv, c_k konvex minden k esetén, valamint

$$T's - T \geq 0 \tag{38}$$

és

$$T''s^2 - 2T's + 2T \geq 0 \ . \tag{39}$$

A (38) feltétel teljesül, ha a $T(s)/s$ fajlagos költség növekszik és konvex.

6 Költségkölcsönhatások figyelembevétele

A korábbi modellekben feltettük, hogy az egyes termelők költségei egymástól függetlenek. Ez a feltételezés gyakran irreális, hiszen a kutatási eredményeket a konkurens termelők is hasznosíthatják, valamint a közös mukaerő, energia, tőke stb. piac is összekapcsolja a termelők költségtényezőit. Ez az általánosabb feltétel legegyszerűbben úgy modellezhető, hogy egy $c_k(x_k, s_k)$ költségtényezőt feltételezünk. Így a k-adik termelő profitja a következő alakú:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k, s_k) \ . \tag{40}$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = p + x_k p' - c_{kx}'$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} = 2p' + x_k p'' - c_{kxx}'' < 0 \ .$$

Ha feltesszük, hogy

(A) $p' < 0;\ c'_{kx} > 0;$

(B) $p' + x_k p'' \leq 0;$

(C) $p' - c''_{kxx} < 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ mellett, akkor φ_k szigorúan konkáv x_k –ban, így a válaszfüggvény egyértelmű. Implicit differenciálás mutatja, hogy

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p'' - c''_{kxs}}{2p' + x_k p'' - c''_{kxx}} . \tag{41}$$

A rendszer aszimptotikusan stabilis, ha $r_k \in (-1, 0]$, amely feltétel biztosan teljesül, ha

$$0 \geq p' + x_k p'' - c''_{kxs} > 2p' + x_k p'' - c''_{kxx} ,$$

amely átírható a következő alakba:

$$c''_{kxx} - p' > c''_{kxs} \geq p' + x_k p'' . \tag{42}$$

Vegyük észre, hogy a baloldal pozitív és a jobboldal nem pozitív. Tehát a rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a c''_{kxs} másodrendű vegyes parciális derivált a zérus megfelelő környezetébe esik.

7 Következtetések

Ebben a dolgozatban dinamikus oligopol modelleket vizsgáltunk meg a Cournot klasszikus modellnél reálisabb feltételek mellett. Folytonos időskála mellett kimutattuk, hogy alkalmas feltételek teljesülése esetén a modellek aszimptotikus stabilitása megmarad. A stabilitás azonban elvész időkésleltetések mellett, mint ahogy azt a klasszikus modellre kimutatta Chiarella és Szidarovszky (2001). Az itt bemutatott modellek megfelelő vizsgálata egy további dolgozatunk tárgya lesz.

Irodalom

1. Bischi, G-I., C. Chiarella, M. Kopel, F. Szidarovszky (2009): *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations.* Springer-Verlag, Berlin.

2. Chiarella, C., F. Szidarovszky (2001): The Birth of Limit Cycles in Nonlinear Oligopolies with Continuously Distributed Information Lags, in M. Dror, P. L'Ecyer, F. Szidarovszky (szerk.): *Modelling Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 249–268.

3. Cournot, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie de Richesses.* Hachette, Paris (Angol fordítás (1960): Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. Kelley, New York.)

4. Feuer G., F. Szidarovszky (2007): Dinamikus Cournot modellek és kiterjesztésük. *Szigma*, 38 (1-2), 1–13.

5. Okuguchi, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Springer-Verlag, Berlin, New York.

6. Okuguchi, K., F. Szidarovszky (1999): *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms*. Springer-Verlag, Berlin, New York.
7. Theocharis, R. D. (1959): On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, 27, 133–134.

CONTINUOUS COURNOT MODELS AND THEIR EXTENSIONS

Realistic Cournot Models are examined with continuous time scales. The asymptotic properties of models with intertemporal demand interaction, output adjustment costs, environmental considerations and with cost externalities are investigated. The corresponding discrete models were discussed in our earlier paper (Feuer and Szidarovszky, 2007).

PSZEUDOLINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNYEKRŐL[1]

KOMLÓSI SÁNDOR
PTE KTK

Martos Béla és Rapcsák Tamás emlékének ajánlom

Martos Béla a hiperbolikus programozásról írt 1960-as cikkében [8] új fejezetet nyitott a matematikai programozás terén, melyet Ő ugyan hiperbolikus programozásnak nevezett, de mivel ez az elnevezés csak a lineáris törtfüggvényekre találó, ezért a nemzetközi szakirodalom a törtprogramozás (fractional programming) elnevezést fogadta el. Martos Béla fedezte fel, hogy a lineáris törtfüggvények rendelkeznek számos olyan jó tulajdonsággal, mint a lineáris függvények, és ezért a hiperbolikus programozás joggal tekinthető a lineáris programozás egy általánosabb változatának. Martos Béla többek között azt is megmutatta, hogy a szimplex módszer hatóköre kiterjeszthető hiperbolikus programozási feladatokra is [8,9]. Ennek oka a lineáris törtfüggvénynek egy olyan tulajdonsága, melyet pszeudolinearitásnak nevezünk. A pszeudo-linearitás a pszeudokonvexitás és pszeudokonkavitás egyidejű fennállását jelenti. A pszeudolinearitással azóta is nagyon sokan foglalkoznak, főleg a törtprogramozásban betöltött szerepe miatt.

Rapcsák Tamás több cikkben foglalkozott a pszeudolinearitás vizsgálatával. Ezen a téren elért legjelentősebb eredménye 1991-ben jelent meg [10], amelyben differenciálgeometriai segédeszközökkel a pszeudolinearitás egy teljesen új jellemzését adta, melynek segítségével további szép eredményeket ért el kvadratikus törtfüggvények pszeudolinearitásának vizsgálatában [11, 12].

Ezzel a dolgozattal, mely kvadratikus törtfüggvények azon osztályának pszeudolinearitást vizsgálja, melyeket Rapcsák Tamás is vizsgált, szeretném Martos Béla és Rapcsák Tamás emléke előtt tisztelegni. Mindketten a közelmúltban hagytak itt bennünket, de gondolataik tovább munkálkodnak bennünk [17, 18].

Bevezetés

Ebben a dolgozatban $f(x)$ mindig n-változós függvényt jelöl, melynek $\nabla f(x)$ gradiensét oszlopvektornak tekintjük. A pszeudokonvexitás fogalmát Mangasarian vezette be differenciálható függvényekre. Ebből származik a pszeudolinearitás definíciója mely szerint $f(x)$ akkor pszeudolineáris, ha egyszerre pszeudokonvex és pszeudokonkáv.

1. Definíció. A differenciálható $f(x)$ függvényt pszeudolineárisnak nevezzük

[1] Beérkezett: 2009. február 15. E-mail: `komlosi@ktk.pte.hu`.

a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon, ha minden $x, y \in K$ esetén

$$f(x) < f(y) \Rightarrow \nabla f(y)^T(x-y) < 0 \quad \text{és} \quad f(x) > f(y) \Rightarrow \nabla f(y)^T(x-y) > 0 \ . \tag{PLIN}$$

A definíció közvetlen következménye, hogy ha $f(x)$ pszeudolineáris K-n, akkor $f(x)$ vagy konstans K-n (ekkor $\nabla f(x) = 0$ minden $x \in K$-ra), vagy $\nabla f(x) \neq 0$ minden $x \in K$ esetén. Emiatt a továbbiakban csak olyan $f(x)$ differenciálható függvényeket vizsgálunk, melyekre $\nabla f(x) \neq 0$ minden $x \in K$-ra teljesül.

A pszeudolinearitás lokális jellemzése

A pszeudolineáris függvények vizsgálatát egy olyan módszerrel fogjuk végezni, melyben kitüntetett szerepet játszik az implicitfüggvény tétel, illetve az implicit függvények. Mivel az implicit függvények lokális információt adnak a vizsgált függvényről, ezért célszerű bevezetni a lokális pszeudolinearitás fogalmát.

2. Definíció. Az $f(x)$ függvény lokálisan pszeudolineáris x_0-ban, ha van x_0-nak olyan G környezete, hogy

$$\begin{aligned} x \in G, f(x) < f(x_0) &\Rightarrow \nabla f(x_0)(x - x_0) < 0 \ , \\ x \in G, f(x) = f(x_0) &\Rightarrow \nabla f(x_0)(x - x_0) = 0 \ , \\ x \in G, f(x) > f(x_0) &\Rightarrow \nabla f(x_0)(x - x_0) > 0 \ . \end{aligned}$$

Ez a lokális fogalom azért is szerencsés, mert általa a globális tulajdonság is vizsgálható. Igaz ugyanis a következő tétel.

1. Tétel [5, 6]. Legyen $f(x)$ differenciálható a K nyílt konvex halmazon. $f(x)$ akkor és csak akkor pszeudolineáris K-n, ha lokálisan pszeudolineáris K valamennyi pontjában.

Megmutatható, hogy $\nabla f(x_0) \neq 0$ esetén a lokális pszeudolinearitás egyszerűbben is jellemezhető.

2. Tétel [5]. Legyen $f(x)$ differenciálható x_0 valamely környezetében és legyen $\nabla f(x_0) \neq 0$. Ekkor $f(x)$ akkor és csak akkor lokálisan pszeudolineáris x_0-ban, ha van x_0-nak olyan G környezete, hogy

$$\text{valahányszor } x \in G \text{ és } f(x) = f(x_0), \text{ mindannyiszor } \nabla f(x_0)(x - x_0) = 0 \ . \tag{LPLIN}$$

A lokális pszeudolinearitásnak ez az a formája, amely lehetővé teszi az implicit függvényekkel való jellemzést. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható x_0 valamely környezetében, és legyen $\nabla f(x_0) \neq 0$. Tegyük fel, hogy $f'_{x_n}(x_0) \neq 0$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = u, \ x_n = v \ \text{ és } x = (u, v) \ .$$

Az implicitfüggvény tétel. A fenti feltételek teljesülése esetén az $\{ x \in K : f(x) = f(x_0) \}$ szintvonal lokálisan parametrizálható x_0 közelében (x_0 egy G környezetében) egy egyértelműen meghatározott $p_{x_0}(u)$ függvény segítségével (mely u_0 egy N környezetén van értelmezve), a következő módon:

$x = (u, v) \in G$ és $f(x) = f(x_0)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v = p_{x_0}(u)$, $u \in N$.

A további vizsgálódások alapját képezi a következő tétel.

3. Lemma [5]. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható x_0 valamely környezetében, és legyen $\nabla f(x_0) \neq 0$. $f(x)$ akkor és csak akkor pszeudolineáris x_0-ban, ha a $p_{x_0}(u)$ (röviden $p(u)$) implicitfüggvény lineáris N-en.

Bizonyítás. Mivel $f(u, p(u)) \equiv f(x_0)$ N-en, ezért mindkét oldal deriválásával adódik, hogy

$$f'_v(u, p(u))\nabla p(u) + \nabla_u f(u, p(u)) \equiv 0 \, .$$

Ebből egyrészt minden $u \in N$-re

$$\nabla p(u) = -\frac{\nabla_u f(u, p(u))}{f'_v(u, p(u))} \, , \tag{1}$$

másrészt minden $x = (u, v) \in G$, $f(x) = f(x_0)$ esetén

$$\nabla f(x) = -f'_v(x) \begin{bmatrix} \nabla p(u) \\ -1 \end{bmatrix} \, , \tag{2}$$

illetve

$$\nabla f(x_0)^T (x - x_0) = f'_v(x_0) \big[p(u) - p(u_0) - \nabla p(u_0)^T (u - u_0) \big]$$

adódik. Ebből már nyilvánvaló, hogy (LPLIN) akkor és csak akkor teljesül, ha $p(u)$ lineáris N-en. □

Ebből a tételből következik a pszeudolinearitás Rapcsák-féle jellemzésének [10] lokális változata.

4. Tétel [5]. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható x_0 valamely környezetében és legyen $\nabla f(x_0) \neq 0$. $f(x)$ akkor és csak akkor pszeudolineáris x_0-ban, ha van olyan $g \in \mathbb{R}^n$, $g \neq 0$ vektor és x_0 egy G környezetében értelmezett és ott előjeltartó folytonos $c(x)$ függvény, hogy

$$\text{valahányszor } x \in G \text{ és } f(x) = f(x_0), \text{ mindannyiszor } \nabla f(x) = c(x) g \, . \tag{R}$$

Bizonyítás. A 3. Lemma szerint $f(x)$ akkor és csak akkor pszeudolineáris x_0-ban, ha minden $u \in N$-re $\nabla p(u) = \nabla p(u_0) = r \in \mathbb{R}^{n-1}$. (2) szerint ez akkor és csak akkor teljesül, ha minden $x = (u, v) \in G$, $f(x) = f(x_0)$ esetén

$$\nabla f(x) = -f'_v(x) \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix} = c(x) g$$

teljesül, ahol $g^T = [r^T \; -1]$. □

A következő tétel, amely a 3. Lemma közvetlen következménye, másodrendű szükséges és elégséges feltételt ad lokális pszeudolinearitásra. Ez fogja képezni további vizsgálódásaink alapját.

5. Lemma. Legyen $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható x_0 valamely környezetében és legyen $\nabla f(x_0) \neq 0$. $f(x)$ akkor és csak akkor pszeudolineáris x_0-ban, ha a $p(u) = p_{x_0}(u)$ implicitfüggvény rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $u \in N$-re

$$\nabla^2_{uu} f(u,p(u)) + 2\nabla_u f'_v(u,p(u))\nabla p(u)^T + f''_{vv}(u,p(u))\nabla p(u)\nabla p(u)^T \equiv 0\,. \quad (3)$$

Bizonyítás. A (3) azonosság, mint majd látni fogjuk, azzal ekvivalens, hogy a $p(u)$ implicitfüggvény $\nabla^2 p(u)$ Hesse mátrixa azonosan 0 N-en. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $p(u)$ lineáris N-en, következésképpen $f(x)$ lokálisan pszeudolineáris x_0-ban.

Deriváljuk kétszer az $f(u,p(u)) \equiv f(x_0)$, $u \in N$ azonosságot. Ebből az

$$f'_v(u,p(u))\nabla^2 p(u) =$$
$$= -\nabla^2_{uu} f(u,p(u)) - 2\nabla_u f'_v(u,p(u))\nabla p(u)^T - f''_{vv}(u,p(u))\nabla p(u)\nabla p(u)^T$$

azonosságot kapjuk, melyből nyilvánvaló, hogy (3) akkor és csak akkor teljesül, ha $\nabla^2 p(u) \equiv 0$ minden $u \in N$-re. □

Egy speciális függvényosztály vizsgálata

A továbbiakban egy többek által vizsgált függvényosztály pszeudolinearitását fogjuk vizsgálni az 5. Lemma (3) feltétele segítségével. Ezt a függvényosztályt vizsgálta Rapcsák Tamás is a [12, 13] cikkekben.

Tekintsük az

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^T Ax + a^T x + \alpha}{b^T x + \beta}, \quad x \in K \subseteq \mathbb{R}^n \quad (4)$$

kvadratikus törtfüggvényt a $K \subseteq \{\, x \in \mathbb{R}^n : b^T x + \beta > 0 \,\}$ halmazon, ahol $A \neq 0$ n-edrendű szimmetrikus mátrix, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A (4) függvény tulajdonságai alapvetően függnek az A mátrixtól. A dolgozat további részeiben a következő jelöléseket fogjuk használni. $\operatorname{rang}(A)$ jelöli az A mátrix rangját, $\operatorname{image}(A)$ jelöli az A mátrix képterét, azaz $\operatorname{image}(A) = \{\, Ax : x \in \mathbb{R}^n \,\}$, $\operatorname{Iner}(A)$ pedig az A szimmetrikus mátrix inerciáját jelöli. Az A mátrix inerciája az a rendezett számhármas $(\nu(A), \zeta(A), \pi(A))$, ahol $\nu(A)$, $\zeta(A)$, $\pi(A)$ az A negatív, nulla illetve pozitív sajátértékeinek számát jelöli multiplicitásokkal számolva, vagyis $\operatorname{Iner}(A) = (\nu(A), \zeta(A), \pi(A))$.

R. Cambinitől és L. Carositól származik a következő jellemzés.

6. Tétel [1]. A (4) alatt definiált $f(x)$ függvény akkor és csak akkor pszeudolineáris a $K = \{ x \in I\!R^n : b^T x + \beta > 0 \}$ nyílt konvex halmazon, ha $f(x)$ vagy lineáris, vagy pedig léteznek olyan $\hat{\alpha} \neq 0$ $\hat{\beta}$ és $\hat{\gamma}$ konstansok, hogy $\hat{\alpha}\hat{\gamma} < 0$ és

$$f(x) = \hat{\alpha} b^T x + \hat{\beta} + \frac{\hat{\gamma}}{b^T x + \beta} . \tag{5}$$

Később Rapcsák Tamás, egy teljesen más módszert alkalmazva, a következő eredményre jutott.

7. Tétel [12]. A (4) alatt definiált $f(x)$ függvény akkor és csak akkor pszeudolineáris a $K = \{ x \in I\!R^n : b^T x + \beta > 0 \}$ nyílt konvex halmazon, ha $f(x)$ vagy lineáris, vagy pedig léteznek olyan $\hat{\alpha} \neq 0$ és $\hat{\beta}$ konstansok, hogy

$$A = \hat{\alpha} b b^T \quad \text{és} \quad a = \hat{\beta} b . \tag{6}$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ezek az eredmények csupán lokális pszeudolinearitást feltételezve is kiadódnak, vagyis az (5), illetve (6) karakterizációk gyengébb feltételek esetén is fennállnak.

8. Tétel. Tegyük fel, hogy a (4) alatt definiált kvadratikus törtfüggvény lokálisan pszeudolineáris $x_0 \in K$-ban, ahol $\nabla f(x_0) \neq 0$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $f'_{x_n}(x_0) \neq 0$. Ekkor létezik olyan $r \in I\!R^{n-1}$ vektor és léteznek olyan λ, $\mu \in I\!R$ skalárok, hogy

$$A = \begin{bmatrix} \lambda r r^T & \mu r \\ \mu r^T & -(\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} . \tag{7}$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x + a^T x + \alpha - f(x_0)(b^T x + \beta)$$

segédfüggvényt. Vegyük észre, hogy $f(x) = f(x_0)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\phi(x) = \phi(x_0)$, valamint $\nabla\phi(x_0) \neq 0$ és $\phi'_{x_n}(x_0) \neq 0$. Ennek az a fontos következménye, hogy $\phi(x)$ is lokálisan pszeudolineáris x_0-ban. Tekintsük a $p(u)$ implicitfüggvényt, amely x_0 egy környezetében parametrizálja a $\phi(x) = \phi(x_0)$ szintvonalat. A 3. és 5. Lemmák szerint ekkor minden $u \in N$-re

$$\nabla p(u) = -\frac{\nabla_u \phi(u, p(u))}{\phi'_v(u, p(u))} \equiv r = \text{const} , \tag{8}$$

és

$$\nabla^2_{uu} \phi(u, p(u)) \equiv -2 \nabla_u \phi'_v(u, p(u))^T \nabla p(u) - \phi''_{vv}(u, p(u)) \nabla p(u)^T \nabla p(u) . \tag{9}$$

Használjuk az $x = (u, v)$ dekompozíciót és az A mátrix ennek megfelelő

$$A = \begin{bmatrix} A_{uu} & a_u \\ a_u^T & a_{vv} \end{bmatrix} \tag{10}$$

partícionált alakját. Ekkor igazak a következő összefüggések:

$$\nabla^2_{uu}\phi(u,p(u)) = A_{uu}\,, \quad \nabla_u\phi'_v(u,p(u))\nabla p(u)^T = a_u\nabla p(u)^T = a_u r^T\,,$$

$$\phi''_{vv}(u,p(u))\nabla p(u)\nabla p(u)^T = a_{vv}\nabla p(u)\nabla p(u)^T = a_{vv}rr^T\,.$$

Ezek, a (3) feltétellel együtt, azt adják, hogy

$$A_{uu} = -(2a_u + a_{vv}r)r^T\,. \tag{11}$$

Mivel A_{uu} szimmetrikus, ezért (11) csak úgy teljesülhet, ha $-2a_u - a_{vv}r = \lambda r$ valamely $\lambda \in I\!R$ mellett, következésképpen $A_{uu} = \lambda rr^T$ és $a_u = \mu r$, ahol $\mu = -(\lambda + a_{vv})/2$, és így $a_{vv} = -(\lambda + 2\mu)$. □

Az A mátrix (10) alatti alakja különösen alkalmas arra, hogy az A mátrix inerciáját meghatározzuk. Az inerciaszámítás a Haynsworth féle inercia tétel segítségével könnyen elvégezhető [4]. Ez a tétel feltételezi a Schur-komplemens fogalmát, mely az A mátrix alábbi partícionált alakjával kapcsolatos, ahol P nemszinguláris kvadratikus részmátrix:

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix}\,.$$

A determinánselméletből (Schur-lemma) jól ismert

$$S = R - Q^T P^{-1} Q \tag{12}$$

kvadratikus mátrixot (újabban) a P blokk A-beli Schur-komplemensének nevezzük. A Haynsworth-féle inercia tétel azt állítja, hogy amennyiben a nemszinguláris P mátrix principális (sorindexeinek halmaza megegyezik oszlopindexeinek halmazával), akkor

$$\mathrm{Iner}(A) = \mathrm{Iner}(P) + \mathrm{Iner}(S)\,, \tag{13}$$

ahol az összeadás komponensenként végzendő. A P blokk principalitása biztosítja azt, hogy mind a P, mind pedig az S mátrix szimmetrikus.

A Schur-komplemens fontos szerepet játszik minden pivot algoritmusban, ezért a (10) képlet alapján bármely szimmetrikus mátrix inerciája kiszámítható speciális pivot elem választási szabályon alapuló pivot transzformációk véges sorozatával. Ezt a numerikus módszert R. W. Cottle publikálta [2]-ben. Erről részletes leírás található [7]-ben.

9. Tétel. Tegyük fel, hogy a (4) alatt definiált kvadratikus törtfüggvény lokálisan pszeudolineáris $x_0 \in K$ -ban, ahol $\nabla f(x_0) \neq 0$. Ha $r \neq 0$, akkor igazak a következő állítások:

(i) Ha $\lambda + \mu \neq 0$, akkor $\mathrm{Iner}(A) = (1, n-2, 1)$.

(iia) Ha $\lambda + \mu = 0$ és $\lambda + 2\mu > 0$, akkor $\mathrm{Iner}(A) = (1, n-1, 0)$.

(iib) Ha $\lambda + \mu = 0$ és $\lambda + 2\mu < 0$, akkor $\mathrm{Iner}(A) = (0, n-1, 1)$.

Ha $r = 0$, akkor $\mathrm{Iner}(A) = (1, n-1, 0)$, ha $\lambda + 2\mu > 0$ és $\mathrm{Iner}(A) = (0, n-1, 1)$, ha $\lambda + 2\mu < 0$.

Bizonyítás. (ia) Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\lambda + 2\mu \neq 0$, és legyen $P = [-(\lambda + 2\mu)]$ a (13) inercia-formulában. A (12) Schur-komplemens formula szerint

$$S = \left[\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda+2\mu} rr^T\right] .$$

$r \neq 0$ miatt $\mathrm{Iner}(rr^T) = (0, n-2, 1)$, és így

$$\mathrm{Iner}(S) = \mathrm{Iner}\left[\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda+2\mu}\right] + (0, n-2, 0) .$$

Mivel $\mathrm{Iner}(A) = \mathrm{Iner}(P) + \mathrm{Iner}(S) = \mathrm{Iner}\,[-(\lambda+2\mu)] + \mathrm{Iner}\left[\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda+2\mu}\right] + (0, n-2, 0)$, ezért az (ia) állítás bizonyítást nyert.

(ib) Vizsgáljuk most a $\lambda + 2\mu = 0$ esetet. Ekkor szükségképpen $\lambda \neq 0$. Legyen $P_1 = \left[\lambda r_i^2\right]$, ahol $r_i \neq 0$ valamely i-re. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $i = 1$. Ekkor (12) a következőt adja:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0^T & -\lambda/4 \end{bmatrix} .$$

Válasszuk S_1-ben a $P_2 = [-\lambda/4]$ blokkot. Mivel P_2-nek S_1-ben az $(n-2)$-ed rendű nullmátrix a Schur-komplemense, ezért

$$\mathrm{Iner}(A) = \mathrm{Iner}\left[\lambda r_i^2\right] + \mathrm{Iner}\,[-\lambda/4] + (0, n-2, 0) = (1, n-2, 1) .$$

(ii) Legyen $P = [-(\lambda + 2\mu)]$. (12) szerint, $\lambda + \mu = 0$ miatt

$$S = \left[\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda+2\mu} rr^T\right] = 0 .$$

Mivel $\mathrm{Iner}(A) = \mathrm{Iner}(P) + \mathrm{Iner}(S) = \mathrm{Iner}\,[-(\lambda+2\mu)] + (0, n-1, 0)$, ezért (ii) bizonyítást nyert.

Az A mátrix (7) alakja miatt az $r = 0$ eset bizonyítása a (ii) állítás bizonyításával megegyező. □

A következő tétel a lokális pszeudolinearitás további fontos következményeit fogalmazza meg.

10. Tétel. Tegyük fel, hogy a (4) alatt definiált kvadratikus törtfüggvény lokálisan pszeudolineáris $x_0 \in K$-ban, ahol $\nabla f(x_0) \neq 0$. Legyen $g^T = \left[r^T \;\; -1\right]$. Ekkor igazak a következő állítások:

(i) $\mathrm{rang}(A) = 1$ vagy 2.

(ii) Ha $\mathrm{rang}(A) = 1$, akkor $\nabla f(x_0), a - f(x_0)b \in \mathrm{Lin}\{g\} = \mathrm{image}(A)$.

(iii) Ha $\mathrm{rang}(A) = 2$, akkor $\nabla f(x_0), a - f(x_0)b \in \mathrm{Lin}\{g\} \subseteq \mathrm{Lin}\{g, Ag\} = \mathrm{image}(A)$.

(iv) Ha $f(x)$ lokálisan pszeudolineáris egy x_0-tól különböző x_1 pontban is, ahol $\nabla f(x_1) \neq 0$ és $f(x_1) \neq f(x_0)$, akkor $a, b \in \mathrm{image}(A)$.

(v) Ha $Ax = \nabla f(x_0)$, akkor $\nabla f(x_0)^T x = 0$ és, ha $\nabla f(x_0)^T x = 0$, akkor $x^T Ax = 0$.

Bizonyítás. (i) Mivel $\mathrm{rang}(A) = \nu(A)+\pi(A)$, ezért a 9. Tételből következik, hogy $\mathrm{rang}(A) = 1$ vagy 2.

(ii) A 9. Tétel szerint, $\mathrm{rang}(A) = 1$ ekvivalens a következő állítással: vagy $r \neq 0$ és $\lambda + \mu = 0$, vagy pedig $r = 0$. A 8. Tétel szerint ekkor

$$A = \kappa \begin{bmatrix} rr^T & -r \\ -\, r^T & 1 \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} r \\ -\,1 \end{bmatrix} [\, r^T \quad -1\,] \ ,$$

ahol az első esetben $\kappa = \lambda$, a másodikban pedig $\kappa = -(\lambda + 2\mu)$. Ebből közvetlenül adódik, hogy $A = \kappa g g^T$, és $\mathrm{image}(A) = \mathrm{Lin}\{g\} = \{tg : t \in \mathbb{R}\}$. A (8) összefüggés szerint

$$\nabla\phi(x_0)^T = -\phi'_v(x_0)\, [\, r^T \quad -1\,] = -\phi'_v(x_0) g^T \ ,$$

ahol $\phi'_v(x_0) \neq 0$. A $\phi(x)$ függvény definícióját is figyelembe véve, igaz a következő:

$$\nabla f(x_0) = \frac{1}{b^T x_0 + \beta} \nabla\phi(x_0) = -\frac{\phi'_v(x_0)}{b^T x_0 + \beta} g \ ,$$

és ezért $\nabla\phi(x_0), \nabla f(x_0) \in \mathrm{Lin}\{g\}$. Másfelől viszont $\nabla\phi(x_0) - Ax_0 = a - f(x_0)b$, és ezért $a - f(x_0)b \in \mathrm{Lin}\{g\} = \mathrm{image}(A)$.

(iii) A 9. Tétel szerint $\mathrm{rang}(A) = 2$ azzal ekvivalens, hogy $r \neq 0$ és $\lambda + \mu \neq 0$. Először azt mutatjuk meg, hogy $g \in \mathrm{image}(A)$, vagyis az $Ax = g$ egyenlet megoldható x-ben. Tekintsük az x és g vektorokat, valamint az A mátrixot az (u, v) felbontásukban, ahol $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ és $v \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$Ax = \begin{bmatrix} \lambda r r^T & \mu r \\ \mu r^T & -(\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(r^T u) r + \mu v r \\ \mu(r^T u) - (\lambda + 2\mu) v \end{bmatrix} .$$

Ebből a felbontásból nyilvánvaló, hogy az $Ax = g$ egyenlet akkor és csak akkor teljesül, ha az x vektor u és v komponensei kielégítik a következő, $r^T u$-ban és v-ben lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \lambda(r^T u) + \mu v &= 1 \ , \\ \mu(r^T u) - (\lambda + 2\mu) v &= -1 \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Mivel az egyenletrendszer determinánsa $\lambda + \mu \neq 0$, ezért (14)-nek egyetlen megoldása van:

$$r^T u = v = \frac{1}{\lambda + \mu} \ , \tag{15}$$

amiből $g \in \mathrm{image}(A)$ adódik.

Most megmutatjuk, hogy g és Ag lineárisan függetlenek. Első lépésben azt mutatjuk meg, hogy $Ag \neq 0$. Indirekt módon okoskodva, tegyük fel, hogy $Ag = 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$Ag = \begin{bmatrix} \lambda r r^T & \mu r \\ \mu r^T & -(\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ -\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(r^T r) r - \mu r \\ \mu(r^T r) + (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ez azonban akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lambda r^T r - \mu = 0 ,$$
$$\mu r^T r + \lambda + 2\mu = 0 ,$$

és ennek következtében $\lambda\mu r^T r = \mu^2 = -\lambda^2 - 2\lambda\mu$. Ez azonban ekvivalens a $(\lambda+\mu)^2 = 0$ feltétellel, ami $\lambda + \mu \neq 0$ miatt lehetetlen. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

A következő lépésben megmutatjuk, hogy g és Ag lineárisan függetlenek. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy $Ag = \gamma g$ valamely $\gamma \neq 0$ valós számmal. Legyen $\delta = 1/\gamma \neq 0$. Feltevésünk szerint ekkor $A(\delta g) = g$ kell, hogy teljesüljön. Ez azonban azt jelenti, hogy az $x = \delta g = (u, v)$ vektornak teljesítenie kell a (15) egyenletet, ami ekvivalens azzal, hogy $g^T x = g^T(\delta g) = \delta g^T g = 0$, ami azonban $\delta \neq 0$ és $g \neq 0$ miatt lehetetlen. Ez bizonyítja azt, hogy g és Ag lineárisan függetlenek. Mivel $g, Ag \in \mathrm{image}(A)$ és $\mathrm{rang}(A) = 2$, ezért $\mathrm{image}(A) = \mathrm{Lin}\{g, Ag\}$, ahogy azt állítottuk.

A (ii) állítás bizonyítása során alkalmazott gondolatmenet ebben az esetben is azt eredményezi, hogy $\nabla f(x_0), a - f(x_0)b \in \mathrm{Lin}\{g\} \subseteq \mathrm{Lin}\{g, Ag\} = \mathrm{image}(A)$.

(iv) Tekintsük most az $x_1 \in K$ pontot, melyre $f(x_1) \neq f(x_0)$, $\nabla f(x_1) \neq 0$ teljesül, és amelyben $f(x)$ ugyancsak lokálisan pszeudolineáris. (ii) és (iii) szerint ekkor

$$\nabla\phi(x_i) - Ax_i = a - f(x_i)b \in \mathrm{image}(A)$$

$i = 0, 1$ esetén. Mivel $f(x_0) \neq f(x_1)$, ezért nyilvánvaló, hogy $a, b \in \mathrm{image}(A)$.

(v) Megmutatjuk, hogy, ha $Ax = \nabla f(x_0)$, akkor $\nabla f(x_0)^T x = 0$ és, ha $\nabla f(x_0)^T x = 0$, akkor $x^T Ax = 0$.

Nézzük először azt az esetet, amikor $\mathrm{rang}(A) = 1$. Mivel ekkor $A = \kappa g g^T$ és $\nabla f(x_0) = \gamma g$, ahol $\kappa, \gamma \neq 0$, ezért mindkét állítás nyilvánvaló.

Nézzük most azt az esetet, amikor rang(A) $= 2$. Legyen $x = (u, v)$ megoldása az $Ax = g$ egyenletnek. Ekkor (15) szükségképpen teljesül, ami pontosan a $g^T x = r^T u - v = 0$ feltételt szolgáltatja. Mivel $\nabla f(x_0) = \gamma g$, ezért, ha $Ax = \nabla f(x_0)$, akkor $\nabla f(x_0)^T x = 0$. Tegyük most fel, hogy $\nabla f(x_0)^T x = 0$, amely ekvivalens azzal, hogy $g^T x = r^T u - v = 0$. (15) szerint ekkor $Ax = (\lambda + \mu)g$ és így $x^T Ax = (\lambda+\mu) g^T x = 0$. □

A következő tétel talán túlságosan technikainak tűnik, de fontos szerepe lesz a dolgozat fő eredményeinek bizonyításában.

11. Segédtétel. Tegyük fel, hogy a (4) alatt definiált kvadratikus törtfüggvény lokálisan pszeudolineáris $x_0 \in K$-ban, ahol $\nabla f(x_0) \neq 0$. Tegyük fel, hogy $\mathrm{rang}(A) = 2$. Ekkor léteznek olyan $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok, hogy

$$a = A\hat{a} \quad \text{és} \quad b = A\hat{b} , \tag{16}$$

és $\lambda = f(x_0)$ kielégíti a következő egyenletet:

$$b^T \hat{b} \lambda^2 + 2(\beta - a^T \hat{b})\lambda + a^T \hat{a} - 2\alpha = 0 . \tag{17}$$

Ha $f(x)$ lokálisan pszeudolineáris legalább három olyan pontban, ahol $f(x)$ gradiense nem tűnik el, és a függvényértékek különbözőek, akkor az $\hat{a}$, $\hat{b}$ vektorokra teljesülniük kell a következő feltételeknek:

$$a = A\hat{a}\,, \quad b = A\hat{b}\,, \quad b^T\hat{b} = 0\,, \quad a^T\hat{b} = \beta \quad \text{és} \quad a^T\hat{a} = 2\alpha\,. \tag{18}$$

Bizonyítás. Mivel $\mathrm{rang}(A) = 2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathrm{Iner}(A) = (1, n-2, 1)$, ezért a 10. Tétel (ii) és (iii) állításaiból következik (16)-nak eleget tevő $\hat{a}, \hat{b} \in I\!R^n$ vektorok létezése. (16) felhasználásával kapjuk a következőt:

$$\nabla f(x_0) = \frac{Ax_0 + a - f(x_0)b}{b^T x_0 + \beta} = \frac{Ax_0 + A\hat{a} - f(x_0)A\hat{b}}{b^T x_0 + \beta} = \frac{A(x_0 + \hat{a} - f(x_0)\hat{b})}{b^T x_0 + \beta}\,.$$

A 10. Tétel szerint, ha $Ax = \nabla f(x_0)$, akkor $\nabla f(x_0)^T x = 0$, ezért

$$\big(Ax_0 + a - f(x_0)b\big)^T \big(x_0 + \hat{a} - f(x_0)\hat{b}\big) = 0\,.$$

Elvégezve a beszorzást és felhasználva az $a = A\hat{a}$, $b = A\hat{b}$ összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$b^T\hat{b}f^2(x_0) - (2b^T x_0 + 2b^T\hat{a})f(x_0) + x_0^T A x_0 + 2a^T x_0 + a^T\hat{a} = 0\,.$$

Végrehajtva az

$$x_0^T A x_0 + 2a^T x_0 = 2f(x_0)(b^T x_0 + \beta) - 2\alpha$$

helyettesítést, a

$$b^T\hat{b}f(x_0)^2 + 2(\beta - a^T\hat{b})f(x_0) + a^T\hat{a} - 2\alpha = 0$$

egyenletre jutunk, amely pontosan azt adja, hogy $\lambda = f(x_0)$ kielégíti a (17) egyenletet. Ha $f(x)$ lokálisan pszeudolineáris legalább három olyan pontban, ahol $f(x)$ gradiense nem tűnik el, és a függvényértékek különbözőek, akkor a (17) egyenletnek legalább három különböző megoldása van, ami csak úgy lehetséges, hogy valamennyi együttható 0-val egyenlő. □

A következő tétel tisztán mátrixalgebrai, de a további vizsgálatokban szükségünk lesz rá.

12. Segédtétel. Legyen az A szimmetrikus mátrix inerciája $(1, n-2, 1)$. Ekkor minden olyan $d \in I\!R^n$, $d \neq 0$ vektorhoz, mely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $d = A\hat{d}$ és $d^T\hat{d} = 0$ teljesül valamely $\hat{d} \in I\!R^n$ vektorral, található egyetlen olyan $p \in I\!R^n$ vektor, hogy

$$A = pd^T + dp^T\,,$$

továbbá p rendelkezik a következő tulajdonsággal: $p = A\hat{p}$ és $p^T\hat{p} = 0$ teljesül valamely p vektorral, és $p^T\hat{d} = d^T\hat{p} = 1$.

Bizonyítás. Legyen $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázis $I\!R^n$-ben. Tegyük fel, hogy $As_1 = \sigma_1$, $\sigma_1 < 0$ és $As_2 = \sigma_2$, $\sigma_2 > 0$. A feltevések alapján nyilvánvaló, hogy $\mathrm{image}(A) = \mathrm{Lin}\{ s_1, s_2 \}$. Rendelkezzen a $d \in \mathbb{R}^n$ vektor a megkívánt tulajdonságokkal. Ekkor $d \in \mathrm{image}(A) = \mathrm{Lin}\{ s_1, s_2 \}$, és ezért d következő előállítása egyértelmű:

$$d = \delta_1 s_1 + \delta_2 s_2 \ .$$

Mivel $d = A\hat{d}$ és $d^T\hat{d} = 0$, ezért az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\hat{d} \in \mathrm{Lin}\{ s_1, s_2 \}$, következésképpen

$$\hat{d} = \frac{\delta_1}{\sigma_1} s_1 + \frac{\delta_2}{\sigma_2} s_2 \ ,$$

és ennélfogva

$$d^T\hat{d} = \frac{\delta_1^2}{\sigma_1} + \frac{\delta_2^2}{\sigma_2} = 0 \ .$$

Mivel $d \neq 0$, ezért ez csak úgy lehet, ha $\delta_1 \neq 0$ és $\delta_2 \neq 0$. Legyen

$$p = \frac{\sigma_1}{2\delta_1} s_1 + \frac{\sigma_2}{2\delta_2} s_2 \quad \text{és} \quad \hat{p} = \frac{1}{2\delta_1} s_1 + \frac{1}{2\delta_2} s_2 \ .$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $p = A\hat{p}$,

$$p^T\hat{p} = \frac{\sigma_1}{4\delta_1^2} + \frac{\sigma_2}{4\delta_2^2} = \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\delta_1^2\delta_2^2}\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma_1} + \frac{\delta_2^2}{\sigma_2}\right) = \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\delta_1^2\delta_2^2} d^T\hat{d} = 0$$

és

$$d^T\hat{p} = \delta_1\frac{1}{2\delta_1} + \delta_2\frac{1}{2\delta_2} = 1 \quad \text{és} \quad p^T\hat{d} = \frac{\sigma_1}{2\delta_1}\frac{\delta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{2\delta_2}\frac{\delta_2}{\sigma_2} = 1 \ .$$

Most megmutatjuk, hogy $A = pd^T + dp^T$. Tekintsük az $S = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$ bázis mátrixot. S konstrukciója folytán $S^{-1} = S^T$, és így $A = pd^T + dp^T$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$S^TAS = (S^Tp)(d^TS) + (S^Td)(p^TS) \ .$$

Írjuk mindkét mátrixot azonosan particionálva, a következő módon:

$$S^TAS = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \text{ahol} \quad P = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

és

$$(S^Tp)(d^TS) + (S^Td)(p^TS) = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 2\dfrac{\sigma_1}{2\delta_1}\delta_1 & \dfrac{\sigma_1}{2\delta_1}\delta_2 + \dfrac{\sigma_2}{2\delta_2}\delta_1 \\ \dfrac{\sigma_1}{2\delta_1}\delta_2 + \dfrac{\sigma_2}{2\delta_2}\delta_1 & 2\dfrac{\sigma_2}{2\delta_2}\delta_2 \end{pmatrix} .$$

Nyilvánvaló, hogy $P = Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\sigma_1}{2\delta_1}\delta_2 + \frac{\sigma_2}{2\delta_2}\delta_1 = 0 \ .$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sigma_1}{2\delta_1}\delta_2 + \frac{\sigma_2}{2\delta_2}\delta_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\delta_1\delta_2}\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma_1} + \frac{\delta_2^2}{\sigma_2}\right) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\delta_1\delta_2} d^T\hat{d} = 0\,,$$

ami azt bizonyítja, hogy $P = Q$ és $A = pd^T + dp^T$. □

Most bebizonyítjuk a (4) típusú kvadratikus törtfüggvények Cambini-Carosi, illetve Rapcsák féle karakterizációját (lásd 6. és 7. Tételek) a globális pszeudolinearitás feltételezését lokálisra gyengítve. A bizonyítást két lépésben végezzük el, annak megfelelően, hogy a (4) függvényben szereplő A mátrixnak 1 vagy 2 a rangja.

13. Tétel. Legyen $f(x)$ (4) típusú kvadratikus törtfüggvény, és az A mátrix rangja legyen 1. Ekkor $f(x)$ akkor és csak akkor lokálisan pszeudolineáris $x_0 \in K$-ban, ahol $\nabla f(x_0) \neq 0$, ha léteznek olyan $\tilde{\alpha} \neq 0$ és $\tilde{\beta}$, valamint $\hat{\alpha} \neq 0$, $\hat{\beta}$ és $\hat{\gamma}$ konstansok, melyekre fennállnak a következő összefüggések:

$$A = \tilde{\alpha} b b^T \quad \text{és} \quad a = \tilde{\beta} b\,, \tag{19}$$

valamint

$$f(x) = \hat{\alpha} b^T x + \hat{\beta} + \frac{\hat{\gamma}}{b^T x + \beta}\,, \tag{20}$$

illetve

$$\hat{\alpha} \neq \hat{\gamma}(b^T x_0 + \beta)^2\,. \tag{21}$$

Bizonyítás. *Szükségesség.* A 10. Tétel (ii) állításának közvetlen következménye olyan $\tilde{\alpha} \neq 0$, $\tilde{\beta}$ és $\tilde{\gamma}$ konstansok létezése, melyekkel (19) fennáll. Ezeket az összefüggéseket (4)-be helyettesítve megkapjuk (20)-at, ahol

$$\hat{\alpha} = \frac{\tilde{\alpha}}{2}\,, \quad \hat{\beta} = \tilde{\beta} - \beta\frac{\tilde{\alpha}}{2} \quad \text{és} \quad \hat{\gamma} = \alpha - \beta\tilde{\beta} + \beta^2\frac{\tilde{\alpha}}{2}\,.$$

(20)-ból egyszerű számolással adódik, hogy

$$\nabla f(x) = \left(\hat{\alpha} - \frac{\hat{\gamma}}{(b^T x + \beta)^2}\right) b\,. \tag{22}$$

A $\nabla f(x_0) \neq 0$ feltétel csak úgy teljesülhet, ha (21) fennáll.

Elegendőség. Ha (21) teljesül, akkor folytonossági okokból a (20) függvény (22) gradiense x_0 egy egész környezetén különbözik 0-tól, ennélfogva teljesül a 4. Tétel Rapcsák-féle (R) feltétele, amely elegendő az x_0-beli lokális pszeudolinearitáshoz. □

14. Tétel. Legyen $f(x)$ (4) típusú kvadratikus törtfüggvény, és legyen az A mátrix rangja 2. Tegyük fel, hogy $f(x)$ lokálisan pszeudolineáris legalább három olyan különböző pontban, ahol $f(x)$ gradiense nem tűnik el, és a függvényértékek különbözőek. Ekkor létezik olyan $p \in \mathbb{R}^n$ vektor és $\pi \in \mathbb{R}$ skalár, hogy

$$f(x) = p^T x + \pi\,. \tag{23}$$

Bizonyítás. A $\mathrm{rang}(A) = 2$ feltétel esetünkben azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{Iner}(A) = (1, n-2, 1)$. A 11. Segédtétel szerint ekkor léteznek olyan $\hat{a}$, $\hat{b} \in I\!R^n$ vektorok, melyekkel teljesül (18). A 12. Segédtétel szerint ekkor létezik olyan $p \in I\!R^n$ vektor, hogy

$$A = bp^T + pb^T \ .$$

A-nak ez a felbontása a (16) és (18) feltételekkel együtt azt adja, hogy

$$a = A\hat{a} = (p^T\hat{a})b + (b^T\hat{a})p = \pi b + \beta p$$

és

$$\alpha = \frac{1}{2}a^T\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\pi b^T\hat{a} + \beta p^T\hat{a}\right) = \frac{1}{2}(\pi\beta + \beta\pi) = \pi\beta \ ,$$

ahol $\pi = p^T\hat{a}$. Ezeket az összefüggéseket (4)-be helyettesítve megkapjuk (23)-at. □

Irodalom

1. R. Cambini and L. Carosi, On generalized linearity of quadratic functions, *Journal of Global Optimization*, 30 (2004) 235–251.
2. R. W. Cottle, Manifestations of the Schur complement, *Linear Algebra Appl.*, 8 (1974) 189–211.
3. Frenk, J. B. G. and S. Schaible, Fractional programming, *Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Chapter 8, eds. Hadjisavvas, N., Komlosi, S. and S. Schaible, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2005, 335–386.
4. E. V. Haynsworth, Determination of the inertia of a partitioned hermitian matrix, *Linear Algebra Appl.*, 1 (1968) 73-81.
5. S. Komlósi, First and second order characterization of pseudolinear functions, *European Journal of Operational Research*, 67 (1993) 278–286.
6. S. Komlósi, On pseudoconvex functions, *Acta. Sci. Math.* (Szeged), 57 (1993) 569–586.
7. Komlósi, S. *Az optimalizáláselmélet alapja*, Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2001.
8. Martos, B. Hiperbolikus programozás, *MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei*, 5 (1960) 383-406.
9. B. Martos, Hyperbolic Programming, *Naval Research Logistic Quarterly*, 11 (1964) 135–155.
10. B. Martos, *Nonlinear Programming: Theory and Methods*, North Holland, Amsterdam, 1975.
11. T. Rapcsák, On pseudolinear functions, *European Journal of Operational Research*, 50 (1991) 353–360.
12. T. Rapcsák, On pseudolinearity of quadratic fractional programming, *Optimization Letters*, 1 (2007) 193-200.
13. T. Rapcsák and M. Újvári, Some results on pseudolinear quadratic functions, *CEJOR*, 16 (2008) 415–424.

14. S. Schaible and T. Ibaraki, Fractional programming, *European Journal of Operational Research*, 12 (1983) 325–338.
15. S. Schaible, Fractional Programming, in: *Handbook of Global Optimization*, R. Horst and P. Pardalos (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 495–608.
16. M. Újvári, Simplex-type algorithm for optimizing a pseudolinear quadratic fractional function over a polytope, *Pu.M.A.*, 18 (2007) 189–202.
17. Simonovits, A., Martos Béla (1920-2007), *Szigma*, 38 (2007) 75–77.
18. Rapcsák Tamás (1947-2008), (szerkesztőségi megemlékezés) *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 26 (2009) 1–14.

ON PSEUDOLINEAR FRACTIONAL FUNCTIONS

The aim of the paper is to present a local approach called "the implicit function approach" in characterizing pseudolinearity in case of quadratic fractional functions. The class of functions investigating in the paper has already been intensively studied by several authors, including Cambini-Carosi and Rapcsák. It is shown in the paper that results known from the literature can be obtained under weaker hypothesis (local pseudolinearity) on the fractional function under consideration.

ABSZORPCIÓS KÉPESSÉGEK ÉS INNOVÁCIÓ – EGY SZABADALMI VERSENY MODELLJE [1]

SEBESTYÉN TAMÁS
PTE KTK

Tanulmányunkban egy szabadalmi versenyt modellezünk, amelynek során a korábbi megközelítésekkel szemben figyelembe vesszük az abszorpciós képességek szerepét, vagyis, hogy egy vállalat K+F tevékenységének hatékonysága függ a már felhalmozott tudástól, azaz a múltban végzett K+F tevékenység mértékétől. A bemutatásra kerülő duopol modellt annak bonyolultsága miatt nem oldjuk meg analitikusan, hanem számítógépes szimuláció segítségével elemezzük. A kapott eredmények árnyalják a szabadalmi versennyel kapcsolatos korábbi eredményeket. A következtetések felhívják a figyelmet arra, hogy a korábbi modellek által tárgyalt, az innováció megvalósításától való távolságból származó kezdeti lépéselőny mellett az abszorpciós képességek figyelembe vétele esetén megjelenik a vállalatok közötti, ,,dinamikusnak" nevezhető lépéselőny is, amely az abszorpciós képességek különbségéből fakad. Így a kezdeti lépéshátrányban lévő vállalat számára lehetségessé válik a szabadalom elnyerése, ha dinamikus lépéselőnye kellően nagy, vagyis abszorpciós képességeinek szintje elegendő mértékben meghaladja versenytársáét.

Kulcsszavak: *szabadalmi verseny, abszorpciós képesség, innováció, járadékfelélés*

1 Bevezetés

A vállalatok kutatás-fejlesztési tevékenysége gyakran tekinthető egyfajta versenynek valamely jól definiált cél elérése érdekében. Különösen igaz ez olyan esetekben, ahol a piacot néhány nagy vállalat uralja és valamennyien alaposan ismerik a legújabb technológiákat, kutatási eredményeket, ezen túlmenően pedig képesek felmérni a technológia fejlődésének lehetséges irányait. Bár ezek a vállalatok együttműködhetnek, ilyen szituációkban nem ritka, hogy több vállalat ugyanazt (vagy igen hasonló) innovációt igyekszik párhuzamosan megvalósítani, miközben tisztában vannak azzal, hogy versenytársaik is ugyanazzal a problémával foglalkoznak.

A fenti sémába illik az ún. szabadalmi versenyek (*patent race*) fogalma, amelyek esetében az innováció megvalósításával egyfajta monopolista járadékra tesz szert a győztes vállalat. Természetesen nem szükséges, hogy a győztes által realizált ,,kifizetés" szabadalom által védett legyen, a monopoljáradék származhat pusztán az elsőbbségből is, bár kétségtelen, hogy ekkor

[1] Beérkezett: 2008. december 5. E-mail: `sebestyent@ktk.pte.hu`.

rövidebb ideig jelent profittöbbletet. Az ilyen szituációk első modelljei Loury (1979) illetve Dasgupta és Stiglitz (1980) nevéhez fűződnek.

A szabadalmi versennyel foglalkozó korai irodalom főként az egyensúlyi helyzetek komparatív statikus elemzésére koncentrált (Dasgupta és Stiglitz, 1980; Dasgupta, 1986), vagy a versenyző vállalatok között fennálló kezdeti aszimmetriák hatására (Gilbert és Newberry, 1982). Ezek a modellek ugyan kezelik a technológiai bizonytalanságot, vagyis figyelembe veszik, hogy adott K+F ráfordítás bizonytalan mértékű előrelépést jelenthet csak az innovációs folyamatban, ugyanakkor nem veszik figyelembe a dinamikus bizonytalanságot, vagyis hogy az innováció időigényes tevékenység, több perióduson húzódik át, s közben a korábban meghozott K+F döntések módosíthatók, figyelembe véve a vállalatok versenyben elfoglalt relatív pozícióját (Zizzo, 2002).

Csak az innovációs folyamat dinamikájára koncentrálnak Fudenberg et al. (1983) illetve Harris és Vickers (1985) modelljei, miközben a technológiai haladás ezekben az esetekben determinisztikus. Vagyis megjelenik a dinamikus, de eltűnik a technológiai bizonytalanság.

Grossman és Sharpio (1987), valamint Harris és Vickers (1987) modelljei mindkét bizonytalansági tényezőt integrálják: az előbbi kétlépéses innovációs folyamatot vizsgál, s így az utóbbi speciális eseteként tekinthető.

A dinamikus bizonytalanságot figyelmen kívül hagyó modellek közös jellemzője, hogy a szabadalmi versenyben részt vevő vállalatok K+F ráfordításaikat a verseny kezdetén „egyszer-s-mindenkorra” meghatározzák, s nincsen módjuk később ezt megváltoztatni, annak ellenére, hogy az innovációs folyamat többperiódusú is lehet (lásd pl.: Reinganum, 1981).

Grishagin és szerzőtársai (2001) azonban felhívják a figyelmet arra, hogy a K+F versenyben résztvevő felek általában keveset tudnak a riválisok folyamatban lévő kutatási programjairól, amíg valaki meg nem kapja a szabadalmat, vagy piacra nem viszi az új, vagy új technológiával készült terméket, esetleg magát a technológiát. Így a korábbi döntések relatív pozíción alapuló felülvizsgálata értelmét veszti, hiszen nem ismertek a relatív pozíciók.

Valamennyi modell figyelembe veszi, hogy a vállalatok különbözhetnek a verseny kezdetén elfoglalt pozíciójukat tekintve abból a szempontból, hogy mennyire állnak közel a célhoz, azaz az innováció megvalósításához: ez az eltérés jelentős különbségekhez vezethet a verseny lefolyását illetően. Harris és Vickers (1985) kiemelik, hogy a vállalatok abban is különbözhetnek, hogy milyen hatékony a K+F tevékenységük, azaz adott ráfordítással milyen mértékű előrehaladást érhetnek el az innováció megvalósításának irányában.

Egyetlen fenti modell sem tér azonban ki arra, hogy ez a különbség nem csupán a vállalatok egyedi jellemzőiből fakadhat, hanem származhat magából a K+F tevékenységből is, a tudásfelhalmozás hatásaként. Erre a jelenségre először Cohen és Levinthal (1989) hívta fel a figyelmet, és abszorpciós képességként hivatkoznak rá az irodalomban.[2] Abszorpciós képességen egy vállalatnak azt a képességét értjük, hogy a kívülről vagy belülről érkező

[2] Az angol nyelvű irodalom az *absorptive capacities* kifejezést használja. Magyarul szerencsésebbnek tartjuk az abszorpciós képesség kifejezést, elválasztva ezt a fajta készséget a kapacitás fogalmának materiálisabb jellegétől.

új információt, tudást mennyire képes felismerni, ezt mennyiben képes a már meglévő tudásbázisba integrálni, illetve, hogy az így bővülő tudásbázist mennyire képes új, piacképes termékek és szolgáltatások kifejlesztésében felhasználni. Cohen és Levinthal (1989) az abszorpciós képességek tekintetében arra hívják fel a figyelmet, hogy e képességek nagysága a korábban végzett K+F tevékenységtől függ: azaz egy vállalat abszorpciós képességei éppen a K+F révén halmozhatók fel. Az abszorpciós képességek jelentősége tehát az, hogy minél előrébb áll egy vállalat a K+F lépcsőfokain, ez irányú tevékenysége annál hatékonyabbá válik. Egy egységnyi K+F ráfordítás tudásbázist növelő hatása tehát egyre jelentősebb lesz.

Dolgozatunkban az abszorpciós képességeknek ezt a szerepét építjük be egy szabadalmi verseny modelljébe. A vizsgálathoz Grishagin és szerzőtársai (2001) modelljét vesszük alapul, és azt módosítjuk a szükséges mértékben. Így a dolgozatban több helyütt is hivatkozunk az ezzel való hasonlóságra, illetve különbözőségre.

A modell két vállalat versenyét vizsgálja, amelyek meghatározott nagyságú monopolista járadékért versenyeznek. Grishagin és szerzőtársai (2001) elveit követve a vállalatok a verseny kezdetén hoznak döntést a követendő több periódusos stratégiáról, majd ezt már nem módosítják, azaz nem veszik figyelembe relatív pozíciójukat a versenyben. A dolgozat célja, hogy a bemutatott stratégiai játék Nash-egyensúlyi helyzeteit megkeressük és ezek alapján következtetéseket vonjunk le a verseny kimenetelét illetően.

A bemutatott modell sok megszorító feltételezést tartalmaz, ezek részben az alapul szolgáló modellből „örökölt" tulajdonságok, amelyeknek feloldására a dolgozat végén teszünk javaslatot.

A dolgozat felépítése a következő. A második részben a modell rövid ismertetésére kerül sor, a harmadik rész a modell szimulációjának elveit mutatja be, a negyedik és ötödik rész tartalmazza a szimuláció eredményeit, a hatodik rész pedig összegzi a dolgozat megállapításait.

2 A modell

A piacon két vállalat versenyez egyfajta monopoljáradékért, amelyet valamely innováció megvalósítása esetén érhetnek el. Az innováció megvalósításához több perióduson keresztül végzett K+F tevékenységre van szükség. Tudjuk, hogy az innovációs versenyben győztes vállalat V nagyságú járadékra tesz szert. Az is ismert, hogy az innováció megvalósításához N nagyságú tudást kell a vállalatoknak felhalmozniuk. A vállalatok által periódusonként generált új tudás a K+F ráfordítások periódusonkénti konkrét nagyságától, és azok időbeli sorrendjétől is függ.[3]

A modell az új tudás létrehozásának dinamikáján alapul. Az új tudás létrehozásának modellezésénél az innovációval foglalkozó irodalomban elter-

[3]Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy sem Grishagin és szerzőtársai (2001) modellje, sem a jelen dolgozatban vizsgált modell nem tartalmazza a technológiai bizonytalanságot, vagyis a K+F folyamat determinisztikus. A sztochasztikus elemek természetesen beépíthetők a modellbe, ez egy lehetséges és fontos továbbfejlesztési irány lehet.

jedt ún. tudás-termelési függvény megközelítést alkalmazzuk, mely szerint a tudás keletkezése egyfajta termelési folyamat, ahol bizonyos inputok (pénzbeli, humán erőforrások, korábban megszerzett tudás, stb.) speciális „technológia" révén kombinálódva alakulnak outputtá, azaz új tudássá (Griliches, 1989). Fontos kiemelnünk, hogy lényeges különbség van K+F ráfordítás és K+F tevékenység között, ami a tudás-termelési függvény koncepciójával könnyen átlátható. A K+F ráfordítás a tudás-termelési folyamat inputja, míg a K+F tevékenység magát a folyamatot jelenti.

A vállalaton belüli tudás kvantitatív megragadása komoly nehézségekbe ütközik, hiszen az jórészt az egyénekben, vállalati folyamatokban, szervezeti struktúrákban rejlik, s csak egy része kodifikált, azaz közvetlenül mérhető. A dolgozatban vizsgált modell szempontjából valamennyi, az adott innováció megvalósítása során létrejövő tudás (információ) lényeges eleme a vállalat adott időpontig felhalmozott tudásbázisának. Cowan és Jonard (é.n.) nyomán a tudást, amely a kutatás-fejlesztési tevékenység eredményeképpen létrejön, a modellben diszkrét „tényekként", azaz valamilyen explicit állítás formájában megfogalmazható tudományos vagy egyéb ismeretekként kezeljük. Ennek értelmében a vállalati tudás ilyen tények halmazaként definiálható, és nagysága e halmaz számosságával mérhető.[4]

Ez a definíció jól illeszkedik a tudás hagyományos értelmezési keretébe. Általánosnak tekinthető a hierarchikusnak is nevezett adat-információ-tudás megkülönböztetés, ahol az információ újdonságértékkel bíró adat (tény), a tudás pedig információk strukturált halmaza (pl. De Carvalho és szerzőtársai, 2006).[5] Vagyis a vállalat által folyamatosan „gyűjtött" tények és információk valamilyen struktúrába rendeződve, egymással összekapcsolódva alkotják a tudást. Ez természetesen magában foglalja azt is, hogy ugyanazon az információs bázison eltérő tudás jöhet létre, ugyanakkor eltérő információs bázisokon is létrejöhet azonos (hasonló) tudás.

Figyelembe véve a fentieket, könnyen átlátható a tudás-elemek (tények, információk) hatása a vállalat tudására és az innovációs tevékenységre. Az ilyen tények „gyűjtése" eredményeként a vállalat ismeretei összekapcsolódnak, egyre szélesebb hálózatba (struktúrába) rendeződnek, az ismeretek közötti kapcsolatok, asszociációk száma növekszik, amely így a tudás bővülésének igazi forrása. A vállalati K+F tevékenység az ilyen ismeretek (tények, állítások) halmazát bővíti a később részletezendő módon, következésképpen növeli a vállalati tudást. Az így létrejövő tudás a vállalatot egyre közelebb viszi az innováció megvalósításához, végül amikor az ismert tények száma eléri N-

[4]Természetesen a tudás definíciója ettől a megközelítéstől eltérhet, mint ahogy például a szervezeti tanulási folyamatokkal foglalkozó irodalom fontos adalékokkal szolgál arra vonatkozóan, hogy az egyéni és a vállalaton kívülről származó információk milyen kognitív folyamatok révén transzformálódnak vállalati tudássá, és ez a tudás milyen dimenziókkal és jellemzőkkel rendelkezik. A tudás e dolgozatban használt definíciója azonban kellőképpen átfogó ahhoz, hogy a vizsgált kontextusban kényelmesen hagyatkozhassunk rá, mint a vállalati tudás közelítő változójára. A vállalaton belüli kognitív folyamatokról alapos áttekintést ad pl. Nooteboom (2004), vagy Cohen és Levinthal (1990).

[5]Ebben a megközelítésben az általunk használt tudás-elemek tulajdonképpen a tényeket és az információkat jelentik: ténynek tekinthetünk minden, már a vállalat birtokában lévő ismeretet (állítást) és információ az új tény, ismeret. Ezek állnak össze tudássá.

et, az ismeretek „kritikus szintje" lehetővé teszi az innováció megvalósítását. A dolgozatban a tudás és tudásbázis kifejezéseket a fenti értelemben, szinonimákként használjuk.[6]

A vállalati tudás fenti definíciója mellett két kérdést kell megválaszolnunk. Az egyik az, hogy minden, a vállalat számára ismertté váló tény azonos értékű-e, vagy van, amelyik többet és van, amelyik kevesebbet ér? A dolgozatban alkalmazott modell esetében a legcélszerűbb megoldásnak az tűnik, ha feltételezzük, hogy a tudás- egységek (tények) egyenértékűek. Ez egyfelől következik az információs bázis és a tudás kapcsán elmondottakból: mivel eltérő információs bázison (tényhalmazon) is létrejöhet azonos tudás és azonos információs bázison (tényhalmazon) is létrejöhet eltérő tudás. Mivel azonban a tudás-elemek struktúráját, kontextusát nem vizsgáljuk, kézenfekvő, hogy egyenértékűeknek tekintjük az elemeket. Van azonban még egy ok, ami miatt ezeket az elemeket egyenértékűeknek tekinthetjük. A tudásbázisba korántsem csak azok az ismeretek tartoznak, amelyek szorosan kötődnek az innovációs folyamathoz. Sőt, éppen abban rejlik a tudásbázis „ereje", hogy számos elsőre irrelevánsnak tűnő ismeretet is tartalmaz, azonban a tudáselemek közötti kapcsolódási pontok számának növekedésével új asszociációk, különös ötletek révén az ilyen ismeretek is hasznos részévé válhatnak az innovációs folyamatnak. Ebből a szempontból a tudásbázis részét képező tények közötti kvantitatív különbségtétel elhagyható.[7]

A másik kérdés, hogy miként határozható meg N, vagyis azon ismeretek száma, amelyek szükségesek az innováció megvalósításához. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban azzal a megközelítéssel élhetünk, hogy valamennyi innováció esetén jól azonosíthatók azok az ismeretek, amelyek szükségesek voltak az adott innováció létrejöttéhez. Számos ilyen, általában nagyobb léptékű innovációkhoz kapcsolódó ismeret-halmazt mutat be például Mokyr (1990). Ezeknek valamennyi eleme jól azonosítható: milyen ismeretekre, tényekre kell „rájönni" ahhoz, hogy mindezek egy új termékké, technológiai eljárássá álljanak össze. Egyszerű példával élve: mit kell ismerni a természet törvényeiből ahhoz, hogy egy szélmalom megépíthető legyen? Milyen alkatrészekre van szükség és ezeket miként kell összeilleszteni, valamint az alkatrészek elkészítéséhez milyen ismeretekre van szükség? Nyilván az ilyen ismerethalmazok azonosítása utólagosan meglehetősen egyszerű, problémásabb azonban a jövőre vonatkozóan. Ezt a problémát azzal oldhatjuk fel, hogyha figyelembe vesszük, hogy a dolgozatban vizsgált szabadalmi versenyek esetében a vállalatok nem technológiai áttörést jelentő találmányokon dolgoznak, mint pl. a gőzgép, sokkal inkább apróbb, inkrementális fejlesztéseken. Ebben az esetben a szükséges ismeretek köre előre is pontosabban definiálható. Sőt, fontos kiemelni, hogy ezek a K+F folyamatok éppen azért ölthetik a modellben bemutatott verseny formáját, mert a vállalatok tisztában vannak azzal,

---

[6] A tudásbázis kifejezést azért használjuk, mivel a dolgozatban bemutatott modell esetében a korábban felhalmozott ismeretek lényegesen hozzájárulnak a további tudás-felhalmozási folyamathoz. Így nem lényegtelen, hogy a K+F tevékenység milyen tudásbázison zajlik.

[7] A tudás sokszínűsége (heterogenitása) és az innováció kapcsolatáról lásd pl. Knott (2003), vagy a technológiai haladás evolúciós megközelítéseit (pl.: Ziman, 2003).

hogy mit kell elérniük és ezt a célt miként érhetik el. Természetesen nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy a probléma és a megoldáshoz vezető út ,,jól-definiáltsága" úgy csökken, ahogy a fejlesztéstől az alapkutatás felé haladunk a K+F tevékenységek széles skáláján.

A vállalatok feladata, hogy a verseny kezdetén eldöntsék, hogy milyen K+F stratégiát válasszanak, azaz meg kell határozniuk egy K+F költségsorozatot. Egy ilyen általános stratégiát az alábbi módon jelölhetünk:

$$S = (c_1, c_2, \ldots, c_T) \; , \tag{1}$$

ahol c_t $(t \in \{ 1, 2, \ldots, T \}$ a t-edik időszak K+F ráfordításait jelöli, T pedig az innovációs tevékenység utolsó periódusa.[8] Az egyszerűbb elemzés érdekében feltesszük, hogy mindkét vállalat csupán három innovációs intenzitás közül választhat, nevezetesen semmilyen, alacsony és magas K+F aktivitást választhat mindegyik periódusban. Ezek költségvonzatai rendre 0, 1 és 2, vagyis igaz, hogy $c_t \in \{ 0, 1, 2 \}$ minden t-re.

A vállalatok által választott K+F intenzitás befolyásolja a tudás bővülését. Minél több erőforrást áldoz a vállalat fejlesztésre, annál több tudást generál, vagyis annál hamarabb érheti el az innováció megvalósításához szükséges tudásmennyiséget. Grishagin és szerzőtársai (2001) modelljétől eltérően azonban a jelen dolgozatban a vállalatnál felhalmozódó tudás abszorpciós képességekre gyakorolt hatását is figyelembe vesszük, vagyis feltételezzük, hogy adott befektetéssel (c_t) annál magasabb pótlólagos tudást lehet elérni, minél nagyobb a vállalat számára már rendelkezésre álló tudásbázis. Ezt az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$\alpha_t - \alpha_{t-1} = c_t \mu_t \; , \tag{2}$$

ahol α_t a t-edik periódusban a vállalat számára rendelkezésre álló tudás nagysága. A μ_t szorzótényező azt fejezi ki, hogy a pótlólagos tudás nem pusztán a befektetéstől függ, hanem a befektetés ,,hozadéka" időben változhat. Modellünk fő feltevése, hogy ez a szorzótényező annál nagyobb, minél magasabb a már meglévő tudásbázis. A felhalmozott tudás tehát nem csupán egyre közelebb juttatja a vállalatot az innováció megvalósításához, hanem a K+F tevékenység hatékonysága is javul. A tudásbázis ilyen hatékonyság-növelő hatása gyökerezhet abban, hogy a K+F munka folyamán olyan ismeretek is felhalmozódnak, ami új, a korábbiaknál hatékonyabb és a K+F tevékenységet közvetlenül érintő munkaszervezési eljárásokban, technológiákban, eszközökben realizálódik. Ezen kívül talán a legkézenfekvőbb arra gondolni, hogy a tudásbázis növekedésével a tudásbázis elemei (tények) közötti lehetséges kapcsolódási pontok gyorsuló ütemben nőnek. Ez egyre szélesebb teret enged az asszociációkon alapuló újításnak, új ismeretek felhalmozásának, ami

[8] Fontos kiemelni, hogy T csak akkor véges, ha ún. befejező stratégiákat vizsgálunk. Léteznek olyan stratégiák, amelyek mellett T végtelen, ezek azonban (egy kivétellel) nem releváns stratégiák (bizonyítását lásd később), így az elemzést véges T-re korlátozhatjuk. Az, hogy a befejező stratégiák véges T-vel jellemezhetőek, a modell determinisztikus jellegéből következik.

egyszerűen felgyorsítja a tudás-akkumulációs folyamatot: azonos idő alatt nagyobb előrehaladás érhető el nagyabb tudásbázisról indulva. (Cohen és Levinthal, 1989). A fenti megfontolások alapján μ_t-re az alábbi explicit összefüggést írjuk:

$$\mu_t = 1 + (\alpha_{t-1})^\gamma \,, \tag{3}$$

ahol a γ paraméter ($\gamma \geq 0$) a tudásbázisnak a K+F tevékenység hatékonyságára gyakorolt hatását jelöli az új tudás generálásában. Ha $\gamma > 1$, akkor a K+F ráfordítások hatékonysága növekvő ütemben növekszik a tudásbázis bővülésével, ha $\gamma < 1$, akkor ez az ütem csökkenő. Ha $\gamma = 1$, akkor a tudásbázis bővülésének minden egysége azonos mértékben növeli a K+F tevékenység hatékonyságát.[9] Fontos azonban kiemelni, hogy a paraméter elsődlegesen nem a K+F ráfordítások csökkenő vagy növekvő hozadékát méri, hanem a tudásbázis hatását a K+F hatékonyságára. E megfontolás alapján a paramétert a tudás *belső hozadékának* nevezhetjük.

Külön kiemelendő a nem kizárt $\gamma = 0$ eset, mivel ekkor modellünk azonos Grishagin és szerzőtársai (2001) modelljével. Ilyenkor α_{t-1} értékétől függetlenül μ_t minden esetben 2, így $\alpha_t - \alpha_{t-1} \in \{0, 2, 4\}$, ami egy egyszerű átskálázástól eltekintve ekvivalens az ott leírt lehetőségekkel.

A (3) képletben szereplő 1-es biztosítja, hogy $\mu_t \geq 1$ fennálljon minden pozitív α_t-re. Felhasználva (3)-at, a t-edik periódus tudásbázisa a vállalatnál az alábbi módon alakul:

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + c_t \lfloor 1 + (\alpha_{t-1})^\gamma \rfloor \,. \tag{4}$$

A fenti összefüggést tekinthetjük a tudás termelési függvényének: az újonnan létrejövő tudás két inputtényező kombinációján alapul: egyrészt a vállalat már meglévő tudásán (α_{t-1}), másrészt a pénzbeli ráfordításokon (c_t). Kvázi harmadik tényezőként figyelembe vehetjük a γ paramétert, azaz az abszorpciós képességeket is, ám ez vállalat-specifikus adottság, nem döntési változó.

Fontos kitérnünk azonban egy, a tudás definíciója és a fenti összefüggés összeegyeztethetőségével kapcsolatos problémára: a tudást úgy definiáljuk, mint diszkrét tények halmazát, amelynek számossága a vállalati tudás közelítő változója. E definíció értelmében α_t csak egész értékeket vehet fel, ezt a (4) összefüggés azonban csak γ egész értékei mellett biztosítja. Hogy a γ paraméter szélesebben értelmezhető legyen, a (4) formula segítségével kapott α_t értékek háromféleképpen módosíthatók. Egyrészt számolhatunk a (4) szerint kapott értékek egész részével, másrészt egész számokra kerekíthetjük a kapott értéket, végül kerekíthetünk szisztematikusan felfelé is. Az előbbi megoldás azt a meggyőződést tükrözheti, hogy a résztudás nem tudás, vagyis

[9] Érdekes eset lehet, ha megengedjük, hogy γ negatív értékeket is felvegyen. Ez a tudásfelhalmozás csökkenő hozadékát jelentené: a tudásbázis folyamatos növekedése ellenére a K+F ráfordítások csökkenő hozadéka érvényesül – adott ráfordítás egyre kisebb és kisebb növekményt generál a tudásbázisban. Ez abban az esetben releváns, ha feltesszük, hogy a tudás-akkumulációs folyamatban idővel a csökkenő hozadék tendenciája érvényesül. Mivel azonban a dolgozat fókuszában az abszorpciós képességek, vagyis a tudásbázis hatékonyságot növelő szerepe áll, ezt a lehetőséget nem vizsgáljuk.

a valamely periódusban ,,kicsírázó", de konkrét ténnyé nem alakuló tudás-kezdemények nem számítanak a további tudás-felhalmozás szempontjából. Az utóbbi megoldás ezzel szemben minden tudás-kezdeményt kész tényként ismer el. A középső lehetőség egyfajta köztes megoldás, itt érvelhetünk úgy, hogy bizonyos tudás-kezdemények ténnyé konvertálódnak, mások nem. Akármelyik megoldást is választjuk, a kapott eredmények kvalitatív módon nem különböznek a (4) formula által adott megoldástól, így ugyan a tudás definíciója miatt a módosítás szükséges, de ez nem von le semmit a formula használhatóságából.[10]

Mivel (4) a vállalati tudásbázis alakulását elsőrendű differencia-egyenletként írja le, szükséges egy kezdeti érték meghatározása. Mivel a kezdeti periódusban feltételezésünk szerint még nem áll a vállalat rendelkezésére korábbi tudás, azt írhatjuk, hogy $\alpha_0 = 0$, amiből az első periódus tudásmennyiségére (4)-ből következik, hogy:[11]

$$\alpha_1 = c_1 \ , \tag{5}$$

vagyis az első periódusban felhalmozott tudásmennyiség egyszerűen az első periódus K+F ráfordításaival egyenlő.

Minden $S = (c_1, c_2, \ldots, c_T)$ stratégiához tartozik egy T záróperiódus, ami egyben a stratégia időtartama, ,,hossza" is, illetve egy α_T zárótudás. Ezen felül egyértelműen meghatározható egy stratégia teljes költsége:[12]

$$C_S = \sum_{t=1}^{T} c_t \ . \tag{6}$$

Először Grishagin és szerzőtársai (2001) nyomán megmutatjuk, hogy egy vállalat számára egy kivétellel csak az ún. befejező stratégiák relevánsak, és ez az egy kivétel a nulla erőfeszítés stratégiája. Befejező stratégiának nevezzük azokat a stratégiákat, amelyek révén a vállalat véges T idő alatt eléri a szükséges N nagyságú tudást, azaz megvalósítja az innovációt.

Mivel definíció szerint a nem-befejező stratégia nem vezet eredményre, vagyis a vállalat nem tudja megvalósítani az innovációt, az adott stratégia kifizetése $-C_S$ lesz, ami független a másik vállalat stratégiájától. A nem-befejező stratégiák közül speciális eset a zéró erőfeszítés stratégiája, amely azt jelenti, hogy a vállalat nem vesz részt a versenyben, vagyis az $S = (0, 0, \ldots, 0)$ stratégiát választja. Ezt a stratégiát $S(0)$-lal jelöljük, és a továbbiakban null-stratégiaként hivatkozunk rá. Nyilvánvaló, hogy $S(0)$ kifizetése nulla, hiszen

[10] A vállalati tudásszint időbeli alakulása (tetszőleges K+F stratégia esetén) nem mutat szignifikáns eltérést a (4) formula segítségével illetve az egyszerű kerekítés alkalmazásával kapott eredmények között. Értelemszerűen a felfelé és lefelé történő egész számra kerekítés szisztematikusan rendre magasabb és alacsonyabb periódusonkénti tudásszinteket eredményez, azonban a tudásszint alakulására kapott idősorok minőségileg azonosak.

[11] A $\gamma = 0$ esetet ugyan nem zárjuk ki, azonban fontos kiemelni, hogy a (4) összefüggés nem értelmezhető, ha a kezdeti tudást nullának választjuk. A kezdeti tudás konkrét nagysága azonban nem befolyásolja a játék kimenetelét, csupán annak vállalatok közötti eltérése.

[12] A jövőbeli kifizetések diszkontálásától a modellben eltekintünk.

ebben az esetben $C_S = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy az $S(0)$ stratégia dominálja az összes többi nem-befejező stratégiát, vagyis $S(0)$-on kívül csak befejező stratégiák lehetnek relevánsak a vállalat számára.

Nyilvánvaló, hogy a null-stratégiát leszámítva a vállalat számára nem relevánsak azon stratégiák sem, amelyek tartalmaznak nullát. Ekkor ugyanis mindig van olyan stratégia, amely ugyanakkora költséggel, de rövidebb idő alatt éri el az innováció megvalósítását, így a vállalat mérlegelés nélkül a rövidebb stratégiát választja.

Grishagin és szerzőtársai (2001) tovább szűkítik a releváns stratégiák számát azzal, hogy megmutatják, hogy minden olyan befejező stratégiát, amely a szükségesnél (tehát N-nél) nagyobb tudást eredményez, dominál egy olyan stratégia, amely ugyanennyi idő alatt csupán a szükséges tudást biztosítja. Ennek oka, hogy ott a tudás növekménye megegyezik a befektetéssel, így a befejező stratégia költsége csökkenthető, ha az egyik periódusban a befektetés 1-re csökken, és a stratégia még mindig befejeződik a T-edik periódusban (miközben a V járadék változatlan). Jelen dolgozat modelljében az innovációhoz szükséges N és a befejező periódusra elért α_T vállalati tudásbázis legfeljebb csak véletlenül egyezhet meg, így a domináns stratégiák keresésének ilyen módja értelmetlen.

Sőt, modellünkben valamennyi elképzelhető befejező stratégiát figyelembe kell venni, azaz nincs mód domináns stratégiák további keresésével a vállalat számára releváns stratégiák halmazát tovább szűkíteni. Ennek bizonyításához tekintsük a következő példát.

Legyen három szóbajöhető stratégia a következő:

$$\begin{aligned} S_A &= (2,1,1) \\ S_B &= (1,2,1) \\ S_C &= (1,1,2)\,. \end{aligned}$$

A korábban bemutatott összefüggések alapján a vállalat tudásbázisa a harmadik periódus végére a különböző stratégiák esetén $\alpha_0 = 1$ kezdeti tudással:[13]

$$\begin{aligned} \alpha_3^A &= 7 + 5^\gamma + (6 + 5^\gamma)^\gamma \\ \alpha_3^B &= 6 + 2\cdot 3^\gamma + (5 + 2\cdot 3^\gamma)^\gamma \\ \alpha_3^C &= 6 + 3^\gamma + 2\cdot(4 + 3^\gamma)^\gamma\,. \end{aligned}$$

Látható, hogy a végső tudás a γ paraméter nagyságától függ. A három stratégiához tartozó végső tudás alakulását ábrázolja γ függvényében az *1. ábra* ($\gamma \in [0,2]$).[14]

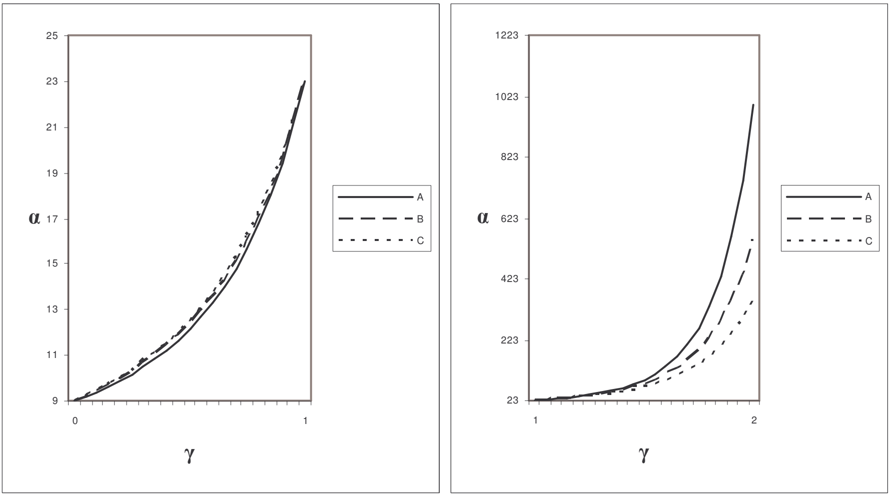
Az ábrán jól látszik, hogy az α_T értékeket jelző görbék $\gamma = 1$ értéknél metszik egymást. Amennyiben $\gamma < 1$, úgy az a stratégia jelent nagyobb

[13] A példához azért választottuk a nullánál nagyobb kezdeti tudásszintet, mert ha $\alpha_0 = 0$, akkor a (4) összefüggés alapján az első, majd értelemszerűen a további periódusok tudása nem határozható meg a $\gamma = 0$ esetre, mivel ekkor nulla nulladik hatványát kellene képeznünk. A példa esetén azonban fontosnak tartottuk, hogy a $\gamma = 0$ eset is értelmezhető legyen (lásd később).

[14] Az áttekinthetőség érdekében a vízszintes skálát különválasztottuk, hogy a görbék közötti különbségek a $0 \leq \gamma \leq 1$ tartományon is észrevehetőek legyenek.

végső tudást, amelyben a nagyobb K+F ráfordítás később történik. Ha $\gamma > 1$, akkor a korai magasabb ráfordítások eredményeznek magasabb végső tudást, míg $\gamma = 1$ esetén a végső tudás szempontjából irreleváns, hogy melyik periódusban magasabb a ráfordítás.[15] Jelen modell tehát speciális esetként tartalmazza azt a lehetőséget, hogy a vállalat számára közömbös, hogy a K+F ráfordítások milyen sorrendben következnek. Megjegyzendő azonban, hogy a modell két ilyen specifikus esetet is tartalmaz. Az egyik a most vázolt $\gamma = 1$, a másik pedig a korábban bemutatott $\gamma = 0$ eset. Mindkét paraméter-érték mellett a vállalat számára közömbös a stratégiák sorrendje, azonban $\gamma = 0$ esetén nincsen hatása a már felhalmozott tudásnak, vagyis figyelmen kívül hagyjuk az abszorpciós képességeket (ez a Grishagin-modell esete), míg $\gamma = 1$ esetén nem szűnik meg a tudásakkumuláció hatása a K+F tevékenység hatékonyságára, csupán arról van szó, hogy a tudásbázis mindig a K+F ráfordításokkal egyenes arányban nő.

A stratégiai játék kifizetései attól függenek, hogy melyik vállalat éri el előbb az innováció megvalósításához szükséges N nagyságú tudást. A győztes vállalat kifizetése $V - C_{S,winner}$ lesz (V a győztes vállalat által realizált, és a szabadalom által biztosított monopolista járadék nagysága), míg a vesztesé $-C_{S,looser}$.[16] Ha ugyanabban a periódusban valósítják meg az innovációt, akkor a szabadalmat az a vállalat kapja, amelyik végső tudása magasabb. Ha a végső tudásszint is azonos, vagyis ugyanazt a stratégiát választották, akkor mindkét vállalat a monopolista járadék felét kapja.



1. ábra. A végső tudásszint alakulása γ függvényében ($\alpha_0 = 1$)

[15] Bizonyítható, hogy $\gamma = 1$ esetén α_T minden olyan stratégiában állandó, amelyekre C_S illetve T azonos. A bizonyítást az 1. Függelék tartalmazza.

[16] Természetesen a vállalatok a kifizetések esetében is jelenértéket számíthatnak, amelytől most eltekintünk. (Praktikusan a diszkont-kamatláb 0.)

Felvethető, hogy a vállalatok a szabadalmi verseny folyamán igyekeznek figyelemmel kísérni a versenytársak tevékenységét és az így szerzett információk alapján ,,menet közben" módosíthatják stratégiáikat. Jelen dolgozatban azonban, Grishagin és szerzőtársai (2001) feltételezésére alapozva, ezt a lehetőséget nem vesszük figyelembe. Feltevésünk, miként az alapul szolgáló modellnél is az, hogy a vállalatok (kifejezetten a vizsgált duopol szituációkban), igyekeznek K+F programjaikat titokban tartani, hiszen a verseny megnyerése szempontjából ez áll érdekükben. A szabadalmi verseny egylépéses játék formájában történő modellezése így válik lehetővé: ugyan a verseny több perióduson át zajlik, maga a játék egylépéses, hiszen a vállalatoknak nincsen lehetőségük a versenyben elfoglalt relatív pozíciójuk értékelésére és így stratégiájuk megváltoztatására.[17]

Jogos felvetés lehet továbbá az is, hogy a tudás felhalmozása a szabadalmi versenyben vesztes vállalat számára sem marad hozadék nélkül, vagyis a megszerzett tudás a tervezési időszak végén valamilyen értékkel bírhat. Vörös (2006) modellje szerint ez az érték jelentősen befolyásolhatja az adott vállalat tudás-akkumulációs stratégiáját: a magasabb jövőérték a tudás-felhalmozást intenzívebbé teszi a tervezési időszak vége felé. A jelen kontextusban az, hogy a felhalmozott tudás mennyit ér a verseny befejezését követően a vesztes vállalatnak, két dologtól függ: egyrészt a szabadalmi védelem fokától, másrészt pedig a kutatási projekt jellegétől. Gyenge szabadalmi védelem mellett a felhalmozott tudás a vesztes számára is kiaknázható erőforrást jelent, továbbá egy általánosabb K+F projekt által generált tudásbázis könnyebben felhasználható más területeken, míg egy specifikus projekté kevésbé. A dolgozat modellje nem tartalmazza a tudásnak ezt a jövőbeli értékét, azonban néhány paraméter beépítésével a fenti megfontolások figyelembe vehetőek.

3 Szimuláció

Mivel a felvázolt stratégiai játék analitikus kezelése nehézkesnek tűnik, ezért numerikus szimulációval vizsgáljuk meg, hogy a paraméterek különböző értékei esetén a modell hogyan működik.[18] Célunk a szimulációval az, hogy megkeressük a fent bemutatott játék Nash-egyensúlyi helyzeteit, miközben a modell N, γ és V paramétereit változtatjuk. A Nash-egyensúlyi helyzeteket ebben a játékban azok a stratégia-kombinációk alkotják, amelyek esetében, adottnak feltételezve a másik játékos által követett stratégiát, mindkét játékos a lehető legmagasabb profitot éri el. Kevert stratégiájú (*mixed-strategy*) Nash-egyensúly esetében a vállalatok a meghatározott stratégiák közül olyan

[17] Tegyük hozzá, hogy elviekben a vállalatok változtathatnának stratégiájukon, azonban nincs olyan információjuk, amire az ilyen változtatást alapozhatnák, vagyis a stratégia-váltás véletlenszerű lenne. Továbbá a stratégia-váltást csak véletlenszerű sokként értelmezhetnénk, hiszen ha nem ez lenne a helyzet, a váltást okozó információt már a játék kezdetén ismernék a vállalatok és eszerint hoznák meg döntésüket.

[18] Az analitikus kezelés nehézségeit az adja, hogy a modell paramétereinek függvényében nem írható fel zárt képlet a leghosszabb vagy legrövidebb stratégia hosszára, sem az egyes stratégiák végső tudására. Lásd a 2. Függeléket.

valószínűséggel választanak, hogy az egyes kifizetések várható értékei közömbös relációba kerülnek, figyelembe véve (ismerve) a másik vállalat által követett stratégiát (valószínűségeket).

Mivel numerikus szimulációról van szó, nyilvánvalóan nem fedhetjük le a paraméterek összes elképzelhető kombinációját, mindazonáltal igyekeztünk egy releváns tartományban a lehető legtöbb eshetőséget megvizsgálni. A vizsgálható paraméter-kombinációknak korlátot szabtak a számítástechnikai kapacitások is, mivel N növelésével a szóbajöhető stratégiák halmaza növekvő ütemben bővül. A szimulációhoz a három paraméter esetében a következő tartományokat vizsgáltuk:

$$0 \leq \gamma \leq 2$$
$$0 \leq N \leq 20$$
$$0 \leq V \leq 100\ .$$

A γ paraméter esetében a választást az indokolja, hogy így a vizsgálat egyenlő arányban tartalmaz növekvő és csökkenő hozadékú eseteket, míg feltételezhető, hogy γ értékét tovább növelve csupán kvantitatív és nem kvalitatív változások mutathatók ki a kapott eredményekben. Az innováció megvalósításához szükséges tudás (N) esetében a felső határt a szimuláció időigénye szabta meg. A győztes innovátor monopolista járadéka (V) tekintetében nincsenek ilyen kapacitás-korlátok, a maximális értéket úgy határoztuk meg, hogy a legköltségesebb stratégiák esetén is számottevő profit keletkezzen V magasabb értékeire. A γ paraméter esetében a lépésközt 0,05-nek választottuk, N esetében ez értelemszerűen 1 volt, míg V-nél is minden egész értékre elvégeztük a szimulációt a fenti tartományon belül.

Az egyszerűség érdekében először azt az esetet vizsgáltuk meg, amikor a vállalatok abszorpciós képességei (γ paraméterek) azonosak, továbbá a kezdeti tudás szintjében (a_0) sincs különbség. E korlátozó feltevéseket az 5. pontban feloldjuk.

Fontosnak tartjuk kiemelni, hogy a szimulációkkal a célunk nem pontos, számszerű eredmények bemutatása, hanem a vizsgált modellből adódó kvalitatív, tendenciaszerű megfigyelések és következtetések ismertetése. A hangsúly tehát a tendenciákon és nem a számszerű eredményeken van.

A 3. Függelék tartalmazza a használt szimulációs algoritmus rövid leírását.

4 Eredmények

Az előző pontban ismertetett paraméter-tartományon elvégezve a szimulációt a következő általános eredményeket kaptuk. Tetszőlegesen kiválasztott (N, γ) pár esetén mindig egyértelműen létezik egy olyan V érték, amelynél kisebb monopolista járadék esetén mindkét fél számára a K+F versenyen történő kívülmaradás lesz az optimális stratégia, tehát egyik vállalat sem vállalakozik K+F tevékenységre. Ezt a kitüntetett értéket $V_{\min}$-nel jelöljük. Egyértelműen létezik továbbá egy olyan V érték minden tetszőleges (N, γ) pár esetén, amelynél magasabb monopolista járadék mellett mindkét vállalat a maximális erőfeszítés stratégiáját választja, vagyis egy olyan S_k stratégiát, amelyben

$c_i = 2$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ esetén. Ezt a kitüntetett értéket $V_{\max}$-szal jelöljük.

A két kitüntetett érték között, vagyis $V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$ teljesülése esetén adott (N, γ) pár mellett több egyensúlyi stratégia-pár is létezhet, illetve előfordulhat olyan eset is, hogy csak kevert stratégiájú egyensúlyi helyzetek léteznek. Fontos kiemelni, hogy $V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$ mellett bármely egyensúlyi stratégia-pár olyan kombinációt takar, amelyben az egyik vállalat nem vesz részt a K+F versenyben, míg a másik igen.[19] A játék szimmetriájánál fogva az így kapott egyensúlyi stratégiák párosak, tehát ha (S^*, S_0) egyensúlyi stratégia-pár, akkor (S_0, S^*) is az.

A bevezetett két kritikus értékre, $V_{\min}$-re és $V_{\max}$-ra explicit összefüggést a paraméterek függvényében nem tudunk felírni. A szimuláció eredményeiből azonban nagy biztonsággal levonható az a következtetés, hogy mind $V_{\min}$, mind $V_{\max}$ általában növekszik, de biztos, hogy nem csökken, ha N növekszik, illetve, hogy mindkét érték általában csökken, de biztos, hogy nem nő, ha γ értéke emelkedik.

Az általunk használt modell tehát megerősíti Grishagin és szerzőtársai (2001) eredményeit, azok alapvető mondanivalójában. Az egyensúlyi stratégiák jellemzői attól függnek, hogy adott N és γ érték mellett mekkora a vállalatok által elsajátítható monopolista járadék, vagyis V. Alacsony V érték esetén az innovációhoz szükséges költségek nem térülnek meg, így nem érdemes belekezdeni a fejlesztésbe, vagyis az egyensúlyi stratégia mindkét vállalat számára az innovációs versenyből való kimaradás (null-stratégia).

Ha a monopoljáradék eléri az adott N és γ értékek melletti maximális hosszúságú stratégia összköltségét (melyet $C_{\min}$-nel jelölünk), a vállalatok számára érdemes lehet részt venni a versenyben. Így tehát $V_{\min}$-re egy egyszerű összefüggést kaphatunk:

$$V_{\min} = C_{\min}(N, \gamma) ,$$

kiemelve, hogy a leghosszabb stratégia összköltsége N-től és γ-tól is függ.[20] A korábban elmondottak alapján tudjuk, hogy $\partial C_{\min}/\partial N \geq 0$ és $\partial C_{\min}/\partial \gamma \leq 0$, következésképpen $\partial V_{\min}/\partial N \geq 0$ és $\partial V_{\min}/\partial \gamma \leq 0$.

Ha $V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$, akkor a monopoljáradék csak egy vállalat számára teszi lehetővé pozitív profit realizálását. Amennyiben azonos stratégiát választanak (leszámítva a null-stratégiát), a járadék megfeleződése azt eredményezi, hogy mindketten veszteséget könyvelhetnek el. Emiatt csak azok a stratégiák lehetnek egyensúlyiak, amelyekben az egyik vállalat nem vesz részt a versenyben, hiszen így ő maga nem lesz veszteséges, míg versenytársa elkerüli a veszteséget (nulla kifizetéssel).

Az eddig leírt „átmeneti" állapot végét az a pont jelenti, amely mellett már mindkét vállalat számára lehetségessé válik a pozitív profit elérése. Ez akkor következik be, amikor a monopoljáradék értéke meghaladja a legkölt-

[19] Ez alól egyetlen kivétel az $N = 1$ eset bármely γ esetén $V = 2$ értéknél. Ekkor egyensúlyt jelent, ha mindkét vállalat az $S = (1)$ stratégiát választja.

[20] $C_{\min}$ értékére tetszőleges N és γ mellett nem adható zárt képlet.

ségesebb stratégia kétszeresét, vagyis:

$$V_{\max} = 2C_{\max}(N, \gamma) \ .$$

Ennek oka, hogy ekkora járadék mellett már mindkét vállalat számára érdemes belekezdeni az innováció megvalósításába, mivel ha egyszerre valósítják is meg azt, mindenképpen pozitív profitra tehetnek szert. A korábban elmondottak szerint igaz, hogy $\partial V_{\max}/\partial N \geq 0$ és $\partial V_{\max}/\partial\gamma \leq 0$.

Az eredmények továbbá azt mutatják, hogy amikor V értéke meghaladja a kritikus $V_{\max}$ értéket, akkor már mindkét vállalat a lehető leggyorsabban igyekszik elérni az innováció megvalósítását, vagyis a legköltségesebb (de legrövidebb) stratégiát választják.

Grishagin és szerzőtársai (2001) eredményeivel összhangban tehát azt látjuk, hogy az innovációs verseny győztesének járó monopolista járadék növekedése egyre erősebb versenyt generál a vállalatok között, miközben a költségek növekedésével fokozatosan csökken az elsajátítható profit nagysága. Így a járadék-elmélet azon állítása is igazolható modellünkben, hogy a verseny intenzitása növekedésével párhuzamosan a vállalatok hajlamosak a járadék értékének felélésére csupán a járadék megszerzése érdekében (lásd például: Posner, 1975; Fudenberg és Tirole, 1987; Baye és Hoppe, 2003). A továbbiakban részletesebben kitérünk az egyes paraméterek szerepére.

Az innováció megvalósításához szükséges tudás nagysága (N)

N változásának hatása abban rejlik, hogy a vállalatnak a nagyobb szükséges tudás miatt magasabb költséget kell vállalni, ha meg kívánja valósítani az innovációt. A magasabb költség vállalása csak akkor lesz ésszerű, ha sikeres K+F tevékenység eredményeképpen megfelelő mértékű monopoljáradék sajátítható el. Logikus tehát, ha N emelkedésével $V_{\min}$ is növekszik, vagyis bármely vállalat csak akkor fog bele az innovációba, ha a várható monopolista járadék legalábbis eléri az adott stratégia költségszintjét, azaz $V \geq C_S$. Mivel azonban N növekedésével C_S is nő minden befejező stratégia esetén, $V_{\min}$-nek értelemszerűen szintén növekednie kell.

Hasonló a helyzet $V_{\max}$ esetében is, a növekvő szükséges tudás növeli a legrövidebb stratégia költségét is, ezáltal magasabb monopolista járadékra van szükség, hogy a legköltségesebb stratégia kétszeresét elérje.

A monopolista járadék nagysága (V)

A korábbiakban részletesen megvizsgáltuk a monopolista járadék szerepét. Nagysága tulajdonképpen ösztönzést jelent a vállalatoknak, hogy belefogjanak az innováció megvalósításába. Jelentősége abban áll, hogy növekedése fokozza a versenyt a vállalatok között. Ez nyilvánvaló, ha megfigyeljük, hogy miként viselkednek a modellezett szereplők $V < V_{\min}$ és $V > V_{\max}$ esetén. Azonban a $V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$ eseteket vizsgálva is látható, hogy ugyan ekkor több tiszta egyensúlyi stratégia létezhet, de ahogy ebben a tartományban V növekszik, úgy az egyensúlyi stratégiák mind ,,agresszívabbak” lesznek, azaz egyre rövidebbek, ám egyre költségesebbek. Vagyis az innováció megvalósításával járó monopolista járadék növekedése a vállalatok közötti versenyt fokozza és ezáltal a járadék nagy részének feléléséhez vezethet. A magas járadék arra ösztönzi a vállalatokat, hogy minél gyorsabban, egyúttal mind magasabb költségeket vállalva jussanak el az innováció megvalósításához.

A tudás belső hozadéka (γ)

Tulajdonképpen a γ paraméter az, ami több technikai változtatás mellett lényegében megkülönbözteti modellünket Grishagin és szerzőtársai (2001) modelljétől: itt testesül meg az abszorpciós képességek hatása. Minél nagyobb γ értéke, a már felhalmozott tudás annál jelentősebb mértékben járul hozzá a pótlólagos tudás előállításához, vagyis az abszorpciós képességek annál jelentősebb szerepet játszanak. A szimuláció eredményeiből az derül ki, hogy γ növekedésével mind $V_{\min}$, mind $V_{\max}$ csökken, ami annak a következménye, hogy magasabb γ értékek mellett adott N hamarabb elérhető, így $C_{\min}$ és $C_{\max}$ is csökken, csökkentve a kritikus V értékeket. Azt mondhatjuk tehát, hogy az abszorpciós képességek növekedése a verseny erősödéséhez vezet. Minél erősebben befolyásolja a már rendelkezésre álló tudás (korábban elvégzett K+F) a K+F tevékenység hatékonyságát, annál kisebb monopolista járadék elegendő (adott N mellett), hogy mindkét vállalat részt vegyen az innovációs versenyben és hogy a lehető leggyorsabb stratégiákat alkalmazzák.

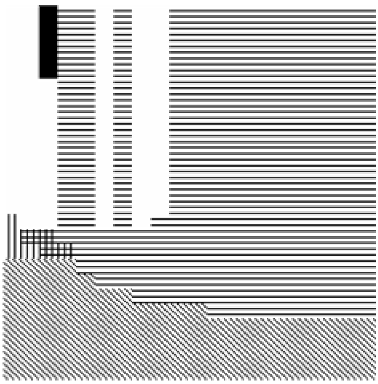
A γ paraméter növekedése azt is jelenti, hogy a kezdeti intenzív K+F tevékenység lehetővé tenné a vállalatok számára, hogy később, a nagy tudásbázis hatékonysági előnyeit kihasználva kisebb intenzitással érjenek el nagyobb léptékű haladást, így költséget takaríthatnának meg. A szimuláció eredményei ugyanakkor azt mutatják, hogy magas szintű járadék esetén a vállalatok nem élnek ezzel a lehetőséggel, hanem a legköltségesebb, leggyorsabb stratégiákat választják. Vagyis az abszorpciós képességek által biztosított költség-megtakarítás áldozatul esik az erős versenynek.

5 További szimulációk

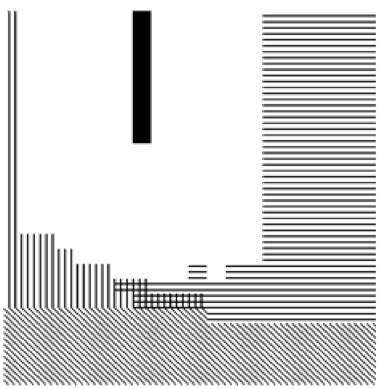
Az előző pontban a szimulációt egy szűk feltételi halmaz mentén vizsgáltuk, azonban fontos következtetéseket vonhattunk le. A továbbiakban kicsit kiszélesítjük a szimuláció tartományát és megvizsgáljuk, hogy milyen eredményekre vezet, ha a szabadalmi verseny két vállalata (A és B) különböző szintű abszorpciós képességgel rendelkezik, azaz $\gamma^A \neq \gamma^B$, valamint ha az egyik vállalat bizonyos előnnyel indul a versenyben, azaz $a_0^A \neq a_0^B$.

Különböző belső hozadék a tudás-felhalmozásban

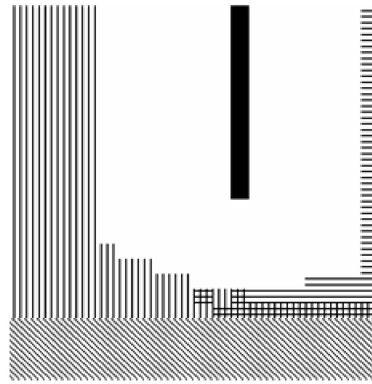
Realisztikusnak tűnik a feltevés, hogy a szabadalmi versenyben résztvevő két vállalat nem azonos γ érték mellett működik, vagyis az egyik hatékonyabb a tudás felhalmozásában, mint a másik, azaz magasabb szintűek az abszorpciós képességei.[21] A szimulációt a korábban használt lépésközökkel valamennyi $(\gamma^A; \gamma^B)$ párra elvégeztük. A futtatások közül csak néhány szemléltető esetet mutatunk itt be, alátámasztandó a levont következtetéseket, azok azonban a teljes körű eredményeken alapulnak.



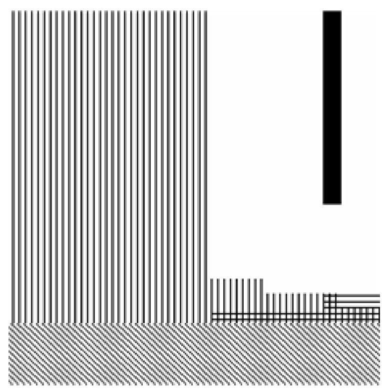
2.a ábra. $\gamma^A = 0.3$



2.b ábra. $\gamma^A = 0.8$



2.c ábra. $\gamma^A = 1.3$



2.d ábra. $\gamma^A = 1.8$

A *2. ábra* mutatja a szimuláció eredményét $N = 20$ és négy különböző γ^A paraméter-érték esetén. Az ábrákon vízszintesen balról jobbra haladva γ^B a $[0.1, 2]$ tartományban növekszik, lentről felfelé pedig V növekszik 0-tól 25-ig.[22] Az ábrán fekete szín jelöli azokat a (V, γ^B) kombinációkat,

[21] Felvethető, hogy ugyan a vállalatok eltérő abszorpciós képességekkel rendelkeznek, de egyik sem ismeri pontosan a másik vállalat ilyen képességeinek szintjét. Ekkor logikus lehet feltételezni, hogy mindegyik vállalat a sajátjáéval azonosnak tekinti a másik vállalat γ értékét. Ez a feltevés azonban a korábban már bemutatott eredményekre vezet, így külön elemezni szükségtelen. Érdekes lehet megvizsgálni azonban, hogy mi történik akkor, ha bizonyos költségek vállalása mellett a vállalatok képesek pontosan felmérni a versenytárs abszorpciós képességeinek szintjét. A modell ilyen irányú kiterjesztése azonban már meghaladja e tanulmány kereteit.

[22] A szimulációk során V értéke a $[0, 100]$ intervallumon mozgott, azonban a 25 fölötti

amelyek esetén mindkét vállalat a leggyorsabb stratégiát választja, átlós csíkozás esetén egyik vállalat sem kezd bele az innováció megvalósításába (null-stratégiák). A függőlegesen csíkozott tartomány olyan paraméter-kombinációkat jelöl, amikor csak az A vállalat valósítja meg az innovációt, a vízszintes csíkozás esetén pedig csak a B vállalat. A rácsos mezőkben mindkét vállalatnak ugyanakkora esélye van a szabadalom elnyerésére, tehát egyik sem marad kívül a versenyen, de egyszerre csak egy vállalat valósítja meg az innovációt: ha valamelyik vállalat befejező stratégiát választ, akkor a másik számára a versenyből való kimaradás az optimális. A fehér területek mentén nincsen Nash-egyensúlyi stratégia.

Az ábrákról jól látszik, hogy a vállalatok azonos abszorpciós képességei mellett kapott eredmények most csupán speciális esetként jelennek meg egy bővebb kontextusban. Nyilvánvaló továbbá, hogy az eltérő abszorpciós képességek jelentősen befolyásolják a szabadalmi verseny kimenetelét.

Alacsony szabadalmi kifizetések (V) esetén a versenyből való kimaradás az optimális mindkét vállalat számára, akárcsak a korábban bemutatott esetben. Magasabb V esetén azonban, ha a két vállalat abszorpciós képességei szignifikánsan különböznek, akkor csak az egyik vállalat, mégpedig a magasabb szintű abszorpciós képességekkel rendelkező számára optimális az innováció megvalósítása, alacsonyabb szintű képességekkel mindig a versenyből való kimaradás a kifizetődő. Mindegyik esetben található egy rövid tartomány, amikor mindkét vállalat számára érdemes lehet részt venni a versenyben (ez a tartomány $\gamma^B = \gamma^A$ körül található), azonban egyszerre csak egy valósítja meg az innovációt. Az, hogy mindkét vállalat megvalósítsa az innovációt, csupán akkor fordulhat elő, ha az abszorpciós képességek szintje a két vállalatnál megegyezik. Ennek oka az, hogy ha az abszorpciós képességek szintje nem egyezik meg, akkor az egyik vállalat fokozatos lépéshátrányba kerül a másikkal szemben. Ez a lépéshátrány nem teljesen azonos a következő pontban tárgyalt kezdeti lépéshátránnyal, de hatása ugyanaz: a hátrány itt nem a verseny kezdetén jelentkezik, hanem fokozatosan alakul ki, azonban *előre ismert*, akárcsak vállalati tudásban meglévő kezdeti különbség esetén. A hátrány kialakulásának fokozatossága miatt ezt nevezhetjük *dinamikus lépéshátránynak*. Abban a tartományban, ahol mindkét vállalat beléphet a versenybe (négyzetrácsos területek), ez a dinamikus lépéshátrány nem jelentős.

További, igen fontos következtetés, ami ugyan az ábráról nem látszik, de a szimulációs eredmények tartalmazzák, hogy a járadék-felélő magatartás is csupán az azonos abszorpciós képességek esetén jelentkezik. Ha ezek a képességek nem azonosak, és mivel feltételezésünk szerint a különbség a versenytársak számára ismert, akkor az előbbiekben ismertetett „lépéshátrány-hatás" nem teszi szükségessé, hogy a fokozatosan lépéselőnybe kerülő vállalat a leggyorsabb stratégiák felé mozduljon, ahogy a szabadalmi díj növekszik. A legmagasabb V értékek esetén is az innovációt megvalósító vállalat optimális stratégiája legfeljebb egy darab kettest tartalmaz, vagyis az innováció meg-

---

értékekre kapott eredmények semmiben nem különböznek az ábrák felső részein láthatóktól, így helytakarékosságból ezt a részt az ábráról leválasztottuk.

valósítása lassú, azonban a szabadalommal járó monopolista járadék jelentős része realizálható a győztes vállalat által.

Eltérő kezdeti tudásszintek – „lépéselőny"

Az eddigi elemzés nem tért ki arra az esetre, hogy mi lehet a fenti játék kimenetele akkor, ha valamelyik játékos az innovációs versenyben előnnyel rendelkezik, azaz ellenfeléhez képest valamivel közelebb áll az innováció megvalósításához a játék kezdetén. Modellünkben ezt a lehetőséget egyszerűen valamely játékos a_0 kezdeti tudásának megváltoztatásával érhetjük el (természetesen úgy, hogy $a_0^A \neq a_0^B$). A szimulációkat ezekre az esetekre is elvégeztük, az eredményeket a *3-6. ábrák* tartalmazzák. A szimulációk során az A vállalat kezdeti tudását vettük nagyobbnak, a 3. ábra azokat az eseteket mutatja, amikor $a_0^A = 1$, a 4. ábránál $a_0^A = 2$, majd az 5. ábra esetén $a_0^A = 5$, végül pedig a 6. ábra $a_0^A = 10$ kezdeti tudás esetén mutatja a szimuláció eredményeit. A B vállalat kezdeti tudásszintjét a példaként kiemelt esetekben nulla, az innováció megvalósításához szükséges tudásszint pedig továbbra is 20.[23]

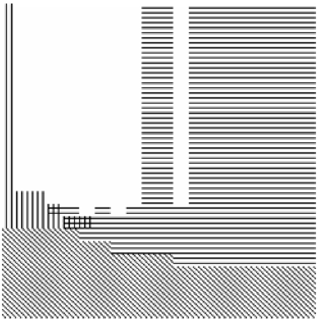
Az ábrák jelölései megegyeznek a korábbival, balról jobbra haladva valamennyin γ^B értéke növekszik a $(0.1, 2)$ tartományban, minden a_0^A érték esetén különböző táblázat tartozik különböző γ^A értékekhez.

A 3. ábrákon azt látjuk, hogy ugyan az A vállalatnak lépéselőnye van a B vállalattal szemben, a B vállalatnak is esélye van a szabadalom elnyerésére (vízszintesen csíkozott területek), mégpedig ha abszorpciós képességei kellően magas szintűek. A 3.a ábra például azt mutatja, hogy az A vállalat lépéselőnye ellenére, ha a B vállalat abszorpciós képességei jelentősen meghaladják az A vállalatét, akkor a B vállalat a lépéshátrány ellenére is biztosan elnyeri a szabadalmat (hozzátéve persze, hogy kellően magas szabadalmi díj esetén). Ahogy az A vállalat abszorpciós képességei növekednek, úgy marad egyre kisebb tere a B vállalatnak a győzelemre. A 3.d ábrán látható, hogy amennyiben az A vállalat γ értéke igen magas (1.8), a B vállalat számára már semmilyen körülmények között nem lesz optimális az innováció megvalósítása.

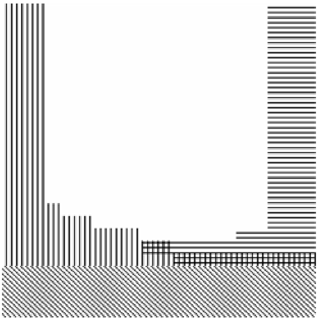
Ha a szimulációt nagyobb kezdeti tudás-különbségre végezzük el, hasonló eredményeket kapunk. Amennyiben az A vállalat jelentősebb előnnyel rendelkezik, a B vállalat számára már kevesebb lehetőség marad a szabadalmi verseny megnyerésére. Az így kapott eredményeket tartalmazzák a 4-6. ábrák. A 6. ábrák azt mutatják, hogy egy csekély tartományt leszámítva ekkor a lépéshátrányból induló B vállalatnak a vizsgált paramétertartományon nincsen esélye a szabadalom elnyerésére.[24]

[23] Ismét hangsúlyozzuk, hogy a szimulációkat valamennyi szóbajöhető $(a_0^A; a_0^B)$ párra elvégeztük. A bemutatott esetek szemléltető jelleggel ezek közül lettek kiválasztva.

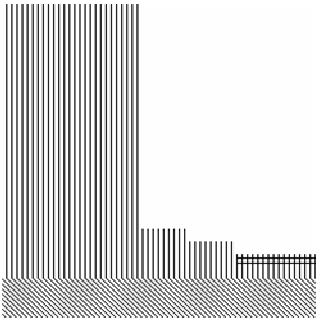
[24] Nyilván, ha kellően magas y^B paraméterekre is elvégeztük volna a szimulációt, arra az eredményre jutottunk volna, hogy a_0^A magas értékei mellett is létezik elegendően magas γ^B érték, amelyre a B vállalat számára a szabadalom elnyerése lehetséges, alapvető következtetéseinket azonban ez nem befolyásolja.



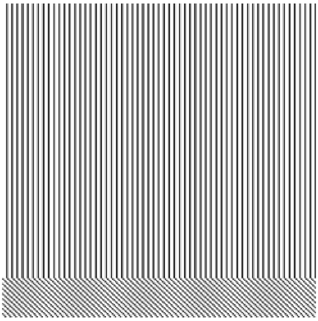
3.a ábra. $a^A = 1$, $\gamma^A = 0.3$



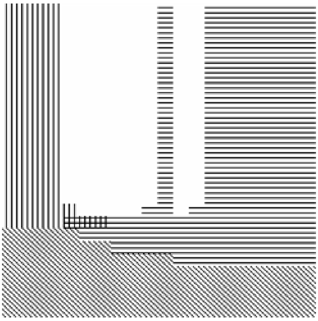
3.b ábra. $a^A = 1$, $\gamma^A = 0.8$



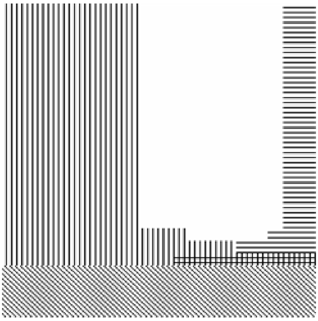
3.c ábra. $a^A = 1$, $\gamma^A = 1.3$



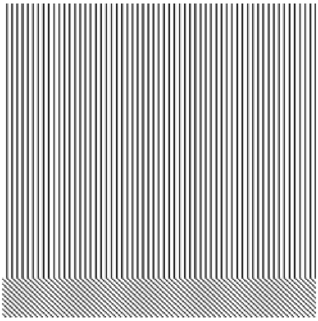
3.d ábra. $a^A = 1$, $\gamma^A = 1.8$



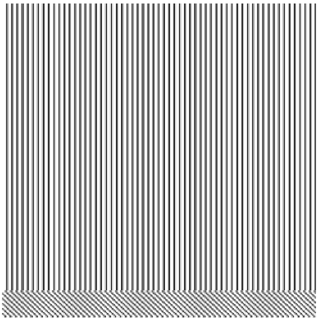
4.a ábra. $a^A = 2$, $\gamma^A = 0.3$



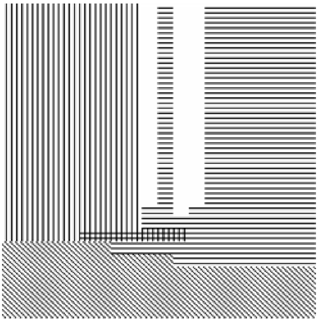
4.b ábra. $a^A = 2$, $\gamma^A = 0.8$



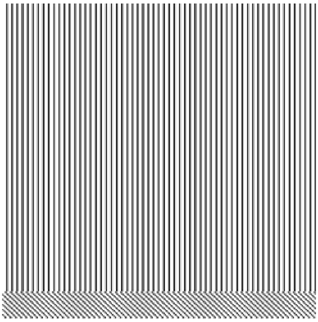
4.c ábra. $a^A = 2$, $\gamma^A = 1.3$



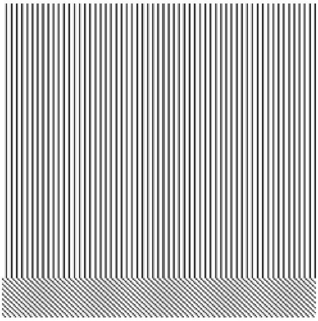
4.d ábra. $a^A = 2$, $\gamma^A = 1.8$



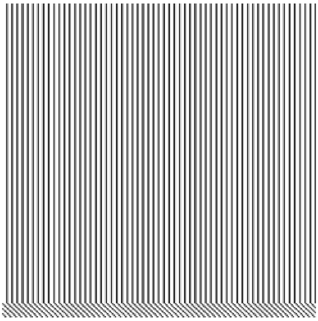
5.a ábra. $a^A = 5$, $\gamma^A = 0.3$



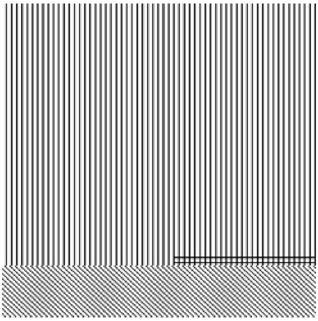
5.c ábra. $a^A = 5$, $\gamma^A = 1.3$



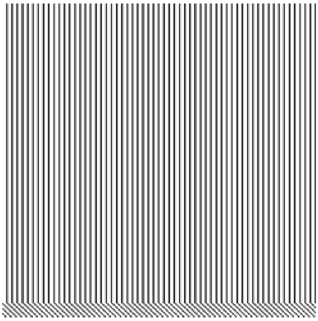
5.b ábra. $a^A = 5$, $\gamma^A = 0.8$



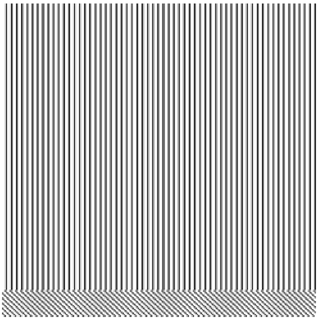
5.d ábra. $a^A = 5$, $\gamma^A = 1.8$



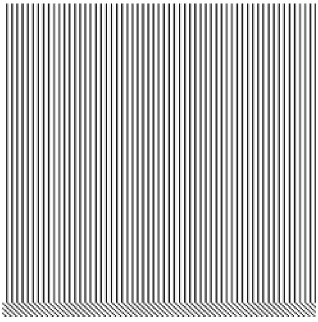
6.a ábra. $a^A = 10$, $\gamma^A = 0.3$



6.c ábra. $a^A = 10$, $\gamma^A = 1.3$



6.b ábra. $a^A = 10$, $\gamma^A = 0.8$



6.d ábra. $a^A = 10$, $\gamma^A = 1.8$

A kapott eredmények oka, hogy a kezdeti lépéshátrányban lévő vállalat előnyben lehet az abszorpciós képességek terén, vagyis ugyanazt a tudást rövidebb idő alatt halmozhatja fel. Így lehetségessé válik számára, hogy „behozza" a játék kezdetén meglévő lemaradását. A lépéshátrányból induló vállalat győzelmi esélyét az a tény teszi lehetővé, hogy a vállalatok abszorpciós képességei feltételezésünk szerint ismertek. Könnyű belátni, hogy ha a vállalatok nem ismerik egymás ilyen képességeit és azzal a feltételezéssel élnek, hogy a másik vállalat azonos abszorpciós képességekkel rendelkezik, akkor mindig a lépéselőnyben lévő vállalat nyeri el a szabadalmat. A hipotézist megerősítendő elvégzett ilyen szimulációk is azt mutatják, hogy ekkor a vegyes-stratégiájú és a csak null-stratégiát tartalmazó egyensúlyi helyzetek mellett csak az a vállalat jut el a szabadalom megvalósításához, amelyiknek kezdeti tudása magasabb. Ilyenkor ha a magasabb abszorpciós képességű vállalat van lépéshátrányban, akkor mivel feltételezi a másik vállalatról, hogy abszorpciós képességeinek szintje megegyezik a sajátjával, és mivel a lépéshátrány számára ismert, ezért nem lesz érdemes belekezdenie a kutatásfejlesztésbe, hiszen a lépéshátrányt feltételezetten nem képes leküzdeni.

Az aszimmetrikus kiindulási helyzet elemzése révén kapott eredmények jelentős kiegészítést tartalmaznak Grishagin és szerzőtársai (2001) eredményeihez képest. Az ott bemutatott modell aszimmetrikus kiterjesztése azt az eredményt mutatta, hogy a kezdeti lépéselőnyben lévő vállalat a lehető leggyorsabb stratégiával megvalósítja az innovációt, míg a hátrányban lévő vállalat semmilyen esetben nem nyerheti el a szabadalmat. Hasonló következtetésre jutnak Harris és Vickers (1985), valamint Fudenberg és szerzőtársai (1983) is. Eredményeink annyiban árnyalják ezeket a következtetéseket, hogy amennyiben figyelembe vesszük az abszorpciós képességek hatását, úgy a kezdeti lépéselőny nem feltétlenül vezet az innováció megvalósításához. A lépéshátrányból induló vállalat magasabb szintű abszorpciós képességei révén megelőzheti versenytársát és elnyerheti a szabadalmat.

Grishagin és szerzőtársai (2001) valamint Fudenberg és Tirole (1987) a szabadalomból eredő monopolista járadék felélésére hívják fel a figyelmet az aszimmetrikus esetben is. Vagyis, hogy hiába van lépéselőnyben valamelyik vállalat, a versenytárs jelenléte azt eredményezi, hogy a lehető leggyorsabb és így legköltségesebb stratégiával jut el az innováció megvalósításához, ami így a szabadalmi díj jelentős részének felélését eredményezi.

Az aszimmetrikus esetre végzett szimuláció során kapott eredményeink ezt a következtetést némileg árnyalják. A győztes vállalat által alkalmazott stratégiák akkor vezetnek a monopolista járadék feléléséhez, ha a két vállalat kezdeti paraméterei közel esnek egymáshoz. Minél nagyobb a különbség a kezdeti tudásszintben és az abszorpciós képességekben, annál hosszabb stratégiákat alkalmaznak a vállalatok, mivel a verseny annál kisebb. Ennek következtében a monopolista járadék nagyobb része marad a vállalatoknál, ha ezek a különbségek nagyok.

6 Következtetések és továbbfejlesztési irányok

Dolgozatunkban egy olyan stratégiai játékot modelleztünk, amelyben a vállalatok valamely innováció által biztosított monopolista járadékért versenyeznek. A verseny kezdetén meghatározzák K+F stratégiájukat, azonban a verseny során nem tudják megfigyelni relatív pozíciójukat a versenytárssal szemben. A modell újítása a korábbi hasonló modellekhez képest, hogy figyelembe veszi az abszorpciós képességek szerepét, vagyis, hogy a K+F tevékenység hatékonysága a felhalmozott tudás függvényében növekszik.

Összefoglalásképpen két fontos következtetés adódik. Egyfelől az abszorpciós képességek beépítése a szabadalmi verseny modelljébe megerősíti Grishagin és szerzőtársai (2001) eredményeit, vagyis azt, hogy a szabadalommal elnyert monopoljáradék növekedése a verseny erősítésén keresztül a járadék feléléséhez vezet. A szimuláció ugyanakkor rámutat arra, hogy az abszorpciós képességeknek is van hatásuk a játék kimenetelére, mégpedig a versenyhelyzet erősítése révén. Minél jelentősebb az abszorpciós képességek szerepe a K+F folyamatban, annál élesebb verseny bontakozik ki a monopoljáradék megszerzése érdekében. A vállalatok hajlandóak az abszorpciós képességek dinamikus költségcsökkentő hatását alárendelni a verseny biztos megnyerésének.

Amennyiben a szabadalmi versenyben résztvevő vállalatok eltérő abszorpciós képességekkel rendelkeznek, úgy az alacsonyabb szintű abszorpciós képességekkel jellemezhető vállalat rendszerint kihullik a versenyből, vagyis nem kezd bele az innováció megvalósításába. A kimaradás valószínűsége együtt növekszik az abszorpciós képességek közötti különbséggel.

Különösen fontos eredményekre vezetett az aszimmetrikus kezdeti pozíciók vizsgálata. A kapott eredményeket úgy foglalhatjuk össze, hogy az abszorpciós képességek szerepét is figyelembe véve kétfajta lépéshátrányt különböztethetünk meg. Egyfelől lépéshátrányt jelent az innovációtól vett abszolút távolság (kezdeti tudásszintek) különbsége, másfelől megjelenik egy dinamikus lépéshátrány, amely az abszorpciós képességek különbségéből fakad: alacsonyabb abszorpciós képességek mellett a kezdetben abszolút lépéselőnyben lévő vállalat előnye elveszhet.

Így fontos kiegészítés a korábbi modellekhez képest, hogy az abszorpciós képességek beépítése lehetővé teszi, hogy a kezdeti lépéshátrányban lévő vállalat is megvalósítsa az innovációt, feltéve, hogy dinamikus lépéselőnye képes ellensúlyozni a kezdeti lépéshátrányt.

A dolgozatban vizsgált modell azonban korántsem teljes, fontos továbbfejlesztési irányok vázolhatók fel. Egyrészt nem tartalmaz diszkontfaktort, ami a dinamikus megközelítésből fakadóan árnyalhatná az eredményeket. Ezzel összefüggésben érdemes kiemelni Harris és Vickers (1985) kitételét, miszerint az innovációtól való kezdeti távolság nem csak a tudásszintek közti különbséget jelenti, hanem azt is, hogy az egyes vállalatok hogyan értékelik a szabadalmi díjat. A szabadalmi díj vagy monopolista járadék eltérő értékelése kifejeződésre juthat eltérő diszkontrátákban is. Fontos lehet továbbá megvizsgálni, hogy mi történik akkor, ha a K+F tevékenység költségei más arányban adottak: $c_t \in \{0, 1, 2\}$ helyett pl. $c_t \in \{0, 1, 3\}$, illetőleg, hogy milyen eredményekre vezet, ha a vállalatok eltérő költségstruktúrával rendelkeznek ilyen szempontból. A szimuláció segítségével viszonylag könnyen kezelhető a technológiai bizonytalanság, ami egy sztochasztikus modellt feltételez, továbbá a tudás tervezési horizonton túli hasznosításának lehetősége is beépíthető a modellbe.

1. Függelék

Bizonyítandó, hogy $\gamma = 1$ esetén, adott C_S és T mellett α_T minden olyan stratégia esetén megegyezik, amelynek összköltsége C_S, hossza pedig T.

Először bizonyítsuk, hogy a stratégia két egymást követő elemének (két periódus költségének) felcserélése azonos α_T-t eredményez. Legyen a két felcserélt elem c_k és c_{k-1}, vagyis a két stratégia:

$$(F1)\qquad \begin{aligned} S &= (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k, \ldots, c_T) \\ S' &= (c_1, c_2, \ldots, c'_{k-1}, c'_k, \ldots, c_T) \end{aligned}$$

Az S' stratégia releváns elemeire a felcserélés miatt nyilvánvalóan érvényes, hogy: $c'_k = c_{k-1}$ és $c'_{k-1} = c_k$. Ekkor az új tudásszintek α'_k és α'_{k-1}. Nyilvánvaló, hogy $\alpha'_i = \alpha_i$ minden $i \leq k-2$ esetén, illetve, hogy $c'_i = c_i$ minden $i \neq k, k-1$ esetén.

A fentiek ismeretében írjuk fel α_k-t és α'_k-t, felhasználva, hogy $\gamma = 1$:

$$(F2)\qquad \begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_{k-1} + c_k(1 + \alpha_{k-1}) \\ \alpha'_k &= \alpha'_{k-1} + c'_k(1 + \alpha'_{k-1}) \end{aligned}$$

Felírva a fenti összefüggéseket α_{k-1}-re és α'_{k-1}-re is és ezeket behelyettesítve (F2)-be, átrendezés után adódik, hogy

$$(F3)\qquad \begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_{k-2} + \alpha_{k-2}(c_{k-1} + c_k) + (c_{k-1} + c_k) + c_{k-1}c_k + \alpha_{k-2}c_{k-1}c_k \\ \alpha'_k &= \alpha'_{k-2} + \alpha'_{k-2}(c'_{k-1} + c'_k) + (c'_{k-1} + c'_k) + c'_{k-1}c'_k + \alpha'_{k-2}c'_{k-1}c'_k \end{aligned}$$

A zárójelekben lévő kifejezések a két különböző felírás esetén azonosak, mivel bennük a stratégia két felcserélt elemének összege, illetve szorzata szerepel. Mivel ezeket az elemeket csak felcseréltük, de nem változtattuk meg, így nyilvánvaló, hogy $c_{k-1} + c_k = c'_{k-1} + c'_k$ és $c_{k-1}c_k = c'_{k-1}c'_k$. Beláttuk továbbá, hogy $\alpha'_{k-2} = \alpha_{k-2}$. Így bizonyított, hogy $\alpha_k = \alpha'_k$.

Ebből az eredményből következik, hogy $\alpha'_i = \alpha_i$ minden $i > k$ esetén is, mivel minden $c'_i = c_i$ $i > k$ esetén. Vagyis $\alpha'_i = \alpha_i$ minden $i \geq k$. Mivel $k \leq T$ szükségszerűen teljesül, ezért bizonyított, hogy két tetszőleges elem felcserélése $\gamma = 1$ esetén változatlanul hagyja α_T-t. Az S' stratégia két újabb, tetszőleges egymást követő elemének felcserélésével előállítható S'' stratégia, amelyre $\alpha''_T = \alpha'_T = \alpha_T$, majd ezt a módszert folytatva minden olyan stratégia, amelyben C_S és T adott nagyságú. Így tehát belátható, hogy valamennyi ilyen stratégia esetében α_T állandó. $\square$

2. Függelék

Ahhoz, hogy a játék analitikusan kezelhető legyen, szükséges, hogy zárt formulákat fogalmazzunk meg egy adott stratégia végső tudásszintjére és hosszára.

A végső tudásszint ismeretéhez a (4) differencia-egyenlet megoldása szükséges, amely a paraméterek és a stratégia költség-elemeinek felhasználásával írja fel α_t értékét tetszőleges t-re. A (4) egyenletből azonban az következik, hogy bármely α_t esetében szükséges ismernünk a t-edik periódusig viselt költségek nagyságát és *sorrendjét*. Ebből pedig az következik, hogy zárt formula nem írható fel α_t-re. Ennélfogva általános képletet nem adhatunk sem egy stratégia végső tudására α_T, sem hosszára (T), azokat csak a stratégiában szereplő költség-elemek sorrendjének ismeretében számíthatjuk ki.

A leghosszabb ($c_t = 1$, $\forall t$) és legrövidebb ($c_t = 2$, $\forall t$) stratégiák esetén rendre az

$$\alpha_t = 1 + \alpha_{t-1} + (\alpha_{t-1})^\gamma \ , \tag{F4}$$

illetve az

$$\alpha_t = 2 + \alpha_{t-1} + 2(\alpha_{t-1})^\gamma \tag{F5}$$

nemlineáris, nem egész kitevőjű differenciaegyenleteket kellene megoldani, hogy zárt képletet kapjunk α_t-re és a további nagyságokra. Ezen egyenletek megoldására a szerző nem ismer megfelelő algoritmust. □

3. Függelék

A szimulációs algoritmus logikai lépései a következők.

- A szimuláció első lépéseként a paraméterek meghatározására (beolvasására) kerül sor. A monopoljáradék nagysága (V), az innováció megvalósításához szükséges tudás nagyságának (N), valamint mindkét vállalat esetében a kezdeti tudás (α_0^1, α_0^2) és az abszorpciós paraméter (γ^1, γ^2) megadása szükséges.

- A megadott paraméterek alapján mindkét vállalat esetében kiszámítható a leghosszabb releváns stratégia (vagyis a csupa 1-est tartalmazó stratégia) hossza (T).

- Ezek után lehetséges az összes T hosszúságú stratégia felírása. Ez azt jelenti, hogy valamennyi olyan különböző stratégiát felsorolunk, amelynek hossza T és nem tartalmaz nullát.

- Ezeket a stratégiákat „csonkoljuk”, azaz olyan stratégiákat képzünk belőlük, amelyek nem hosszabbak a szükségesnél. Ez azt jelenti, hogy a fenti lépésben generált stratégiákat csak addig a periódusig vesszük figyelembe, amíg a stratégia megvalósításával generált tudás eléri N-et.

- Az így kapott stratégiahalmazból kiszűrjük a redundáns stratégiákat, hozzáadjuk a null-stratégiát, így megkapjuk a vállalatok számára releváns stratégiák halmazát.
- Minden így kapott stratégiára kiszámíthatjuk a stratégia költségét, végső tudásszintjét és hosszát, mindkét vállalat esetében.
- Az így kapott adatokból kialakíthatjuk mindkét játékos kifizetési mátrixát. A mátrixban szereplő adatok egyszerűen a vállalat profitját tartalmazzák, figyelembe véve a választott stratégiákat. A kifizetések a dolgozatban definiált módon alakulnak.
- A két vállalat kifizetési mátrixának ismeretében mindkét vállalat reakció-függvényét is felírhatjuk, vagyis hogy a versenytárs adott stratégiája esetén az adott vállalat számára melyik stratégia az optimális választás.
- Az így kapott reakció-függvények segítségével lehetővé válik a Nash-egyensúlyi stratégia-párok meghatározása. Ehhez csupán azt kell megvizsgálni, hogy a lehetséges stratégia-párok esetében a vállalatok reakciófüggvényének értéke megegyezik-e az aktuális stratégiával.
- A szimuláció ezek után kimeneti adatként megadja az egyensúlyi stratégia-párok számát, az egyensúlyi stratégiákban a vállalatok stratégiájának jellegét (melyik vállalat és hány egyensúlyi stratégia-párban nyer, az adott stratégia gyors vagy lassú, stb), azok hosszát és egy külön táblában magukat a stratégiákat is kilistázza, a részletes elemzés lehetőségét fenntartva.

A dolgozatban bemutatott szimuláció a fenti algoritmust ismételte meg különböző paraméter-értékek esetén.

Irodalom

1. Baye, M. R., Hoppe, H. C. (2003): The strategic equivalence of rent-seeking, innovation, and patent-race games. *Games and Economic Behavior*, 44(2), pp. 217–226.
2. De Carvalho, A. J., Saur-Amaral, I., Marques, M. J. (2006): Cooperation Networks and Regional Development – Case of Multisectoral Partnership for Innovation. In: Cooke, P., Piccaluga, A. (eds.) *Regional Development in the Knowledge Economy.* Routledge.
3. Cohen, W. M., Levinthal, D. A. (1989): Innovation and Learning: The Two Faces of R&D. *Economic Journal*, 99(397), pp. 569–596.
4. Cohen, W. M., Levinthal, D. A. (1990): Absorptive Capacity: A New Perspective on Learning and Innovation. *Administrative Science Quarterly*, 35, pp. 128–152.
5. Cowan, R., Jonard, N. (é.n.): Knowledge Portfolios and the Organization of Innovation Networks. *Academy of Management Review,* in press.
6. Dasgupta, P. (1986): The Theory of Technological Competition. In: J. E. Stiglitz and F. Mathewson (Editors), *New Developments in the Analysis of Market Structures*, (MIT Press, Cambridge, MA).

7. Dasgupta, P., Stiglitz, J. (1980): Uncertainty, Industrial Structure and the Speed of R&D. *Bell Journal of Economics*, 90, pp. 266–293.
8. Fudenberg, D., Gilbert, R., Stiglitz, J., Tirole, J. (1983): Preemption, leapfrogging and competition in patent races. *European Economic Review*, 22(1), pp. 3–31.
9. Fudenberg, D., Tirole, J. (1987): Understanding Rent Dissipation: On the Use of Game Theory in Industrial Organization. *American Economic Review*, 77(2), pp. 176–183.
10. Gilbert, R., Newberry, D. (1982): Preemptive Patenting and the persistence of Monopoly. *American Economic Review*, 72, pp. 514–526.
11. Griliches, Z. (1989): Patents: Recent Trends and Puzzles. *Brookings Papers on Economic Activity, Microeconomics*, pp. 291–330.
12. Grishagin, V. A., Sergeyev, Y. D., Silipo, D. B. (2001): Firms' R&D decisions under incomplete information. *European Journal of Operational Research*, 129(2), pp. 414–433.
13. Grossman, G. M., Shapiro, C. (1987): Dynamic R&D Competition. *Economic Journal*, 97(386), pp. 372–387.
14. Harris, C. Vickers, J. (1985): Perfect Equilibrium in a Model of a Race. *Review of Economic Studies*, 52(2), pp. 193–209.
15. Harris, C., Vickers, J. (1987): Racing with Uncertainty. *Review of Economic Studies*, 54(1), pp. 1–21.
16. Knott, A. M. (2003): Persistent heterogeneity and sustainable innovation. *Strategic Management Journal*, 24(8), pp. 687–705.
17. Loury, G. C. (1979): Market Structure and Innovation. *Quarterly Journal of Economics*, 93, pp. 395–410.
18. Mokyr, J. (1990): The Lever of Riches: *Technological Creativity and Economic Progress*. Oxford University Press.
19. Nooteboom, B. (2004): *Inter-Firm Collaboration, Learning and Networks: an Integrated Approach*. Routledge, New York.
20. Posner, R. A. (1975): The social cost of monopoly and regulation. *Journal of Political Economy*, 83(3), pp. 807–828.
21. Reinganum, J. F. (1981): Dynamic games of innovation. *Journal of Economic Theory*, 25(1), pp. 21–41.
22. Vörös, J. (2006): The Dynamics of Price, Quality and Productivity Improvement Decisions. *European Journal of Operational Research*, 170(3), pp. 809–823.
23. Ziman, J. (2003, ed.): *Technological Innovation as an Evolutionary Process*. Cambridge University Press.
24. Zizzo, D. J. (2002): Racing with uncertainty: a patent race experiment. *International Journal of Industrial Organization*, 20(6), pp. 877–902.

ABSORPTIVE CAPACITY AND INNOVATION – A PATENT RACE MODEL

In this paper we model a patent race where, in contrast to previous studies, the role of absorptive capacity is incorporated. This means that the efficiency of a firm's innovative activity depends on previously accumulated knowledge, that is, its past R&D activity. The presented model, due to its complexity, is not solved analytically, but analysed through computer simulations. Our results complement previous findings about patent races. The results emphasise that including absorptive capacity in the model, not only the initial distance from the innovation plays a differential role between firms but a second kind of difference emerges, called "dynamic lead" in the paper. This dynamic lead stems from different absorptive capacities. In this setting, a firm which is initially farther away from the innovation can win the patent race if its absorptive capacity is sufficiently higher than that of its rival's.

A DIVATHOZ CSATLAKOZÓ FOGYASZTÓK HASZNOSSÁGI FÜGGVÉNYEI[1]

KOVÁCS KÁRMEN
PTE KTK

Tanulmányom célja a divatterméket fogyasztó egyénekre vonatkozó néhány hasznossági függvény bemutatása. Elsősorban a hasznossági függvényeket alkotó komponensekre, és az azok közötti összefüggésekre összpontosítok, vagyis arra, hogy milyen tényezők és hogyan befolyásolják a divathoz történő csatlakozás élvezetét. Nem célom tehát a függvény analízis, sokkal inkább rámutatni néhány, a hasznosság mértékét befolyásoló tényezőre, valamint meglátásom szerint a divattermékek fogyasztására hatást gyakorló, de a hasznossági függvényekből hiányzó releváns elemre.

1 Bevezető

A divatnak alapvetően a kvalitatív vonatkozásait kutatják. Nagyon fontosnak tartom azonban a divatjavak fogyasztásának *kvantitatív szempont*ból történő vizsgálatát is, minthogy ezáltal a verbálisan megfogalmazott elméleti összefüggések jobban megérthetők, valamint hozzásegíthet új összefüggések felismeréséhez, következtetések levonásához. A gazdasági szakirodalomban a divatnak többféle matematikai modelljét alkották meg, ezek azonban empirikus tesztelésük nehézsége és hiánya miatt nagyrészt megmaradtak az elmélet szintjén. Az alábbiakban azokkal a kvantitatív vonatkozásokkal foglalkozom, amelyek a divatot adaptáló egyén *fogyasztói hasznosság*ára vonatkoznak.

Az egyén által egy divattermék fogyasztásából nyert hasznosságérzet, illetve élvezet a hasznossági függvényen keresztül ragadható meg. Minthogy az egyént divathoz való csatlakozásában erősen befolyásolják érzelmei (Cho – Lee, 2005; O'Shaughnessy – O'Shaughnessy, 2003; Mahajan – Wind, 2002; Kovács, 2006), valamint a divattermékek és a divatmárkák a szimbolikus fogyasztás eszközei (Kovács, 2005ab), *a divatjavakból nem, vagy nem csak funkcionális hasznosság, hanem szimbolikus hasznosság is származik*; létezik tehát a racionális hasznosságukon túl egy másodlagos hasznosság is (Hámori, 1999). A *szimbolikus hasznosság közgazdasági alapja* az, hogy

- *a divatjavak klubjavaknak tekinthetők* – vagyis a közjavak és a magánjavak között átmeneti kategóriát képeznek, amelyek a fogyasztók alacsony száma mellett nem versenyzők, de versenyzővé válnak azok számának növekedésével (Buchanan, 1965; Adams – McCormick, 1987),

[1]Beérkezett: 2008. október 9. E-mail: karmen@ktk.pte.hu.

- *a divat dinamikája* pedig *leírható a klubok elméletével*, amelynek alapgondolata, hogy az egyénnek egy jószág fogyasztásából származó elégedettségét az ugyanazon jószágot fogyasztó emberek száma határozza meg (Adams – McCormick, 1992).

A termékhez kapcsolódó szimbolikus hasznosságot Vázquez – Del Río – Iglesias (2002) megfogható termékjellemzőkből (pl. stílus, szín) származónak, valamint pszichológiai és társas szükségleteket kielégítőnek véli.

E tanulmányomban ismertetek néhány spekulatív, *divatadaptációra vonatkozó fogyasztói hasznosság függvényt*. Annak ellenére, hogy ezek a függvények alapvetően elméleti jelentőségűek (gyakorlati alkalmazhatóságuk nehézségekbe ütközik), rámutatnak a divat fogyasztói magatartásának és a divatnak mint kollektív fogyasztásnak a felszín alatt meghúzódó, bonyolult, a kínálati oldal szereplői számára ugyanakkor releváns összefüggéseire. Közös jellemzőjük, hogy *a társadalmi hatások valamilyen aspektusból és valamilyen formában megtalálhatók bennük*. Ennek hátterében az áll, hogy a divat egyfajta csoport- vagy tömegfogyasztást jelent, valamint hogy a divatjavak fogyasztásának élvezetét jelentős mértékben befolyásolják az interperszonális viszonyok.

A divatban egyidejűleg érvényesül két kulcsfontosságú szerepet játszó interperszonális hatás; az egyik meghatározója az elkülönülés, a másiké pedig az összetartás iránti igény (Simmel, 2001; Bianchi, 2002; Sassatelli, 2000). A fogyasztók részéről megnyilvánuló elkülönülés iránti igényt *sznob hatás*nak, a konformitásra törekvést pedig *bandwagon hatás*nak nevezik. A sznob hatás egyrészt felbukkanhat akkor, amikor új presztízs terméket vezetnek be a piacra, és az azt elsőként adaptálók a fogyasztók korlátozott számából következően kívánnak előnyre szert tenni. Másrészt pedig, felmerülhet, ha a státusra érzékeny fogyasztók azért, és akkor utasítanak el egy terméket, mert, illetve amint az emberek többsége fogyasztja azt (Vigneron – Johnson, 1999). A bandwagon hatás a sznob hatás ellentéte, ennek következtében terjed el a divat az egyes fogyasztói szegmensekben, illetve a társadalomban. A divatciklus elején a sznob hatás érvényesül, a fogyasztók alacsony száma mellett éri el maximumát. Amint azonban a fogyasztók száma elér egy elegendően nagy kritikus értéket, a jószág kívánatosabbá válik; minél többen csatlakoznak a divathoz, annál nagyobb lesz a fogyasztók körében a konformitás, azaz a bandwagon hatás megnyilvánulása, következésképpen a divatciklus végén éri el maximumát (Corneo – Jeanne, 1997). Empirikus vizsgálatokkal is alátámasztották, hogy a divatinnovátorok részéről elsősorban sznob hatás érvényesül, és hogy a divatkövetők a konformitás iránti igényük miatt utánozzák a divatot már korábban adaptálókat, azaz részükről bandwagon hatás nyilvánul meg (Cholachatpinyo et al., 2002ab).

Megfigyelhető továbbá, hogy *az ár, illetve a költség komponens mindegyik függvényben hasznosság csökkentő tényezőként szerepel*. Eszerint nem veszik figyelembe azt, hogy a divatinnovátorok számára a magas ár presztízsértéket jelenthet (Groth – McDaniel, 1993; Stearns – Borna, 2005) – ezt empirikus kutatásom is megerősíti (Kovács, 2009) –, vagyis hogy a divattermék ára nem feltétlenül csökkenti a hasznosságot. Az ár komponenst ennek alapján célszerűnek tartom $(-1)^s$ tényezővel megszorozni, ahol s bináris változó: $s = 1$, ha az ár motiválja a divattermék megvásárlását, azaz növeli a fogyasztó hasznosságát, és $s = 0$ ellenkező esetben, amikor a normál javakéhoz hasonlóan értékeli a divatadaptáló a termék árát, így az csökkenti hasznosságát. A $(-1)^s$ tényező alkalmazásával a függvény sokkal jobban kifejezi a divattermék fogyasztása mögött meghúzódó (különböző) fogyasztói preferenciákat, és ezáltal pontosabb értéket kaphatunk az egyének által élvezett hasznosság mértékéről.

2 A divatot adaptáló fogyasztó hasznossági függvénye

Frijters (1998) modellje azon alapul, hogy a divatjavak státusjavaknak tekinthetők, és státus értéküket fogyasztóik átlagos státusa határozza meg. A modell a következőképpen írja le az i egyén x divatjószág vásárlásával kapcsolatos hasznossági függvényét:

$$U_i[x_i, y_i - x_i p(t)] = g[y_i - x_i p(t)] + x_i \gamma \int_t^T S_{x,t}\, dt\,, \tag{1}$$

- ahol x_i bináris változó, amelynek értéke 1, ha az i egyén megvásárolja a divatjószágot, és 0, ha nem,
- $S_{x,t}$ a t időpontban x divatjószágot birtokló egyének átlagos státusával egyenlő,
- γ a státus jelentőségét jelző paraméter, $0 < \gamma < 1$,
- $p(t)$ a divatjószág t időpontbeli ára,
- y_i az i egyén jövedelme.

Az (1) alapján a fogyasztó hasznossága egyrészt függ a fogyasztó jövedelmének és a divattermék adott időpontbeli árának különbségétől, azaz a reziduális jövedelmétől. Feltételezzük, hogy a $g(\cdot)$ folytonos és konkáv. Ez utóbbi tulajdonság biztosítja, hogy a divattermék mint státusjószág relatív értéke a jövedelem növekedésével emelkedik; azaz a státust biztosító adott divattermék akkor nyújt nagyobb fogyasztói hasznosságot, ha magasabb a jövedelem. A modell szerint ugyanis a divatciklus elején, amikor magas a divattermék ára, azt kevesen, a magas jövedelműek tudják megvásárolni és így a jószág státus értéke is magas lesz. Amint azonban mind többen csatlakoznak a divathoz, és a termék ára csökken, az alacsonyabb jövedelműek is fogyasztókká válnak, és így a jószág státus értéke is egyre kisebb lesz (Frijters, 1998).

A fogyasztói hasznossági függvény másik összetevője a státusra vonatkozik: minél fontosabb a státus az egyén számára, valamint minél magasabb a divatjószág adott időpontbeli fogyasztóinak átlagos státusa, annál nagyobb az egyén hasznossága. E tényezők függvénybe történő beépítését Frijters (1998) arra a megfigyelésére alapozza, hogy az egyén által egy divatjószág fitogtatásával szerzett státus a divatjószágot fogyasztók egy része által már élvezett személyes státusból származik. A divatos termékekkel tehát „tulajdonképpen *társadalmi státusunkat* vásároljuk meg" (Hámori, 1998 110. o.). Empirikus vizsgálatok támasztják alá, hogy a státus szerepének még számos technológiai innováció (pl. telekommunikációs eszközök) vásárlása esetében is szignifikáns szerepe van (Leung – Wei, 1998). Amíg a függvény első, pénzügyi jellegű komponense az egyén szintjére vonatkozik, addig a másodikban a társadalmi hatások, illetve szimbolikus tartalmú tényezők is benne rejlenek.

Fontosnak tartom felismerni és kiemelni azt, hogy *ebben a hasznossági függvényben nem szerepel maga a divattermék, tehát ezen összefüggés alapján a releváns termékjellemzők (az árat kivéve) nincsenek hatással a fogyasztó által élvezett hasznosságra*; ezt nagymértékű gyengeségnek találom. A fogyasztók ugyanis a vásárlási döntéshozatal során a divattermék tulajdonságait is értékelik, például az újdonságot jelentő stílusjellemzőket (Kovács, 2007), valamint a racionális megfontoláson alapuló minőséget; ezek a tényezők is befolyásolják a divathoz történő csatlakozásból eredő hasznosságérzetet, illetve élvezetet. Empirikus kutatásom eredményei szerint a divattermékek tulajdonságai a fogyasztók számára fontosabbak is, mint az, hogy mások milyen hatást gyakorolnak rájuk (Kovács, 2009). Így célszerűnek tartom kiegészíteni a függvényt additív módon egy

$$x_i \sum_{z=1}^{n} w_{i,z} c_{i,z}$$

komponenssel, ahol

- $c_{i,z}$ az i fogyasztónak a divattermék z-edik tulajdonságára vonatkozó preferencia szintje, $c_{i,z} \in (-\infty, +\infty)$. Ha az i egyén számára a divattermék z-edik tulajdonsága vonzó, akkor a $c_{i,z}$ pozitív, ha viszont nem kívánatos, akkor negatív értéket vesz fel, a közömbösséget a 0 fejezi ki.
- $w_{i,z}$ az egyes terméktulajdonságokhoz tartozó súlyok, amelyek azok fontosságát jelentik az i fogyasztó számára, és $\sum_{z=1}^{n} w_{i,z} = 1$.

Minél inkább tetszik tehát az i fogyasztónak a divattermék z-edik tulajdonsága, valamint minél fontosabb az számára, annál nagyobb az általa élvezett hasznosság. Ha azonban a jószág egyes tulajdonságait negatívan értékeli, akkor az csökkentőleg hat hasznosságérzetére, különösen, ha nagy jelentőséget tulajdonít nekik.

Corneo és Jeanne (1999) modelljében, amelyet a helyválasztás alapján interpretál – tökéletes informáltságot feltételezve, minden egyén két típus valamelyikébe sorolható: a „kívánatosba" („desirable type") vagy a „nem kívánatosba" („undesirable type"). Az i egyén hasznossági függvénye:

$$u_i = y_i + (1 - l_i)\left(\frac{\pi_0}{i\theta} - c_0\right) + l_i\left(\frac{\pi_1}{i\theta} - c_1\right) , \qquad (2)$$

- ahol y_i a fogyasztó jövedelme,
- π_j a „kívánatos" egyének aránya a $j \in \{0, 1\}$ helyen,
- θ szigorúan pozitív ízlés paraméter,
- c_j a j helyre történő eljutás költsége,
- l_i az egyén helyválasztása, amely dummy változó, értéke 0, ha a 0 helyre megy és 1, ha az 1-re.

Minden egyén a két hely közül csak az egyikbe megy. A „kívánatos" egyének pozitív, a „nem kívánatos" egyének negatív externáliaként hatnak a helyválasztás során. Minél magasabb a választott helyen a „kívánatos" egyének aránya – ceteris paribus, annál nagyobb a hasznosság (Corneo – Jeanne, 1999). *Ez valójában azt jelenti, hogy a divatnak mint kollektív magatartásnak meghatározó szerepe van abban, hogy az egyén számára mekkora élvezetet nyújt egy divattermék fogyasztása.* A fogyasztó adott helyre történő eljutásának költsége csökkenti a hasznosságot, a jövedelme pedig növeli.

A hasznossági függvény megítélésem szerint olyan *szolgáltatások* igénybe vételét interpretálja jól, ahol másokkal egy helyen történő, érzelmekre (is) irányuló fogyasztás történik és fontos az atmoszféra. A legjobb példák a („divatos") vendéglátóhelyek, idegenforgalmi célpontok, valamint a szórakoztatóipar helyei és rendezvényei. Ezekben az esetekben egyfajta funkcionális vagy racionális hasznosságon túli *élmény fogyasztás*ról van szó, amelyre a szolgáltatási környezet részét képező többi igénybe vevő is nagymértékben hatással van.

Empirikus adatok is alátámasztják, hogy például az éttermekben – különösen a vacsoránál – a vendégek számára fontos szerepe van a többi vendégnek, olyannyira, hogy még hajlandóak is többet fizetni a „trendi" társasággal egy időben történő étkezésért (Andersson – Mossberg, 2004). Az Európában is elterjedt amerikai Starbucks kávéházlánc egységeit pedig nemcsak a jó kávé, hanem a társaság érzéséért keresik fel az emberek (Schultz, 2004).

Nakayama – Nakamura (2004) a divatot *társadalmi interakciók*at – sznob hatást és bandwagon hatást – magában foglaló jelenségnek tekinti. Az általuk kifejlesztett fogyasztói hasznosság függvény elsősorban annak vizsgálatára alkalmazható, hogyan befolyásolják a divatciklus különböző időpontjaiban a divathoz csatlakozó egyének hasznosságát a társadalmi hatások. Modelljükben a divatot az egyének bináris választásának összegeként határozzák meg. Az 1-es alternatíva jelentse a divat adaptálását, a 2-es pedig annak nem adaptálását. Mindegyik alternatívának van hasznossága, V_1, illetve V_2. Ha V_1 nagyobb, mint V_2, akkor az 1-es alternatívát választja az egyén, amely azt jelenti, hogy csatlakozik a divathoz. Feltételezzük, hogy a divat nem adaptálásának hasznossága zérus, azaz $V_2 = 0$. Ebből az következik, hogy a divathoz történő csatlakozás hasznossága nem negatív, vagyis $V_1 \geq 0$. A divatadaptálásra vonatkozó hasznossági függvény

$$V_1 = -p + \beta x(1-x)^\alpha \ , \tag{3}$$

- ahol p az általános költség ($-\infty < p < +\infty$), amely a gazdasági és a pszichológiai költség összegének és magának a divat attraktivitásának a különbsége (sztenderd egységre váltva),
- x a divatadaptációs ráta ($0 \leq x \leq 1$), vagyis a divathoz csatlakozottak és a népesség számának az aránya,
- α és β konstans paraméterek, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$,
- α paraméter a sznob hatás relatív erőssége a bandwagon hatásra,
- β paraméter a társadalmi interakció erőssége.

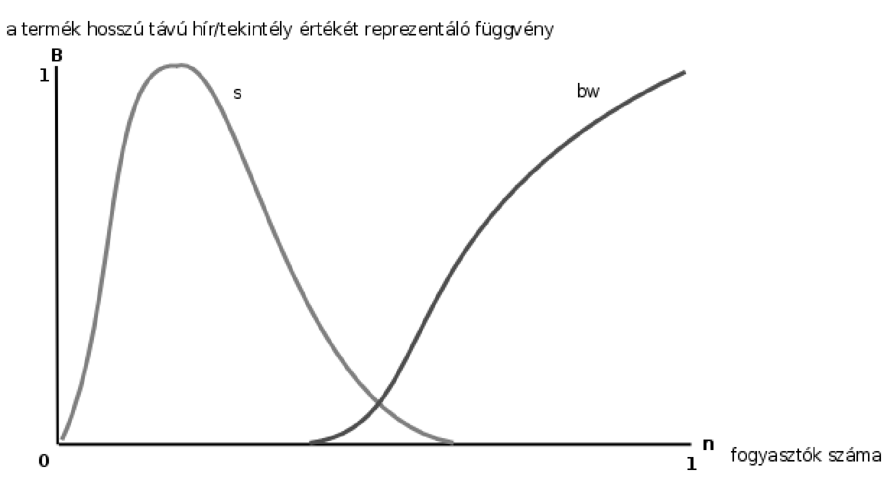
Az α paraméterként való értelmezését nem tartom helyesnek, mert a divat-életciklus folyamán mind a sznob hatás, mind a bandwagon hatás erőssége, valamint azok nagyságának egymáshoz való viszonya változik. *Így nem helyénvaló minden fogyasztó esetén, akik a divat-életciklus különböző időpontjaiban csatlakoznak a divathoz, ugyanazon α érték alkalmazása.* Az α értéke tehát az x divatadaptációs ráta növekedésével (amely valójában a divatterjedést jelenti) együtt változik. Az α-t így sokkal inkább változóként lenne célszerű a függvényben szerepeltetni, mert véleményem szerint paraméterként nagymértékben torzítja a hasznossági függvény értékét. Az α nagysága a következőképpen értelmezhető:

- ha $\alpha = 0$, csak bandwagon hatás érvényesül,
- ha $0 < \alpha < 1$, bandwagon hatás $>$ sznob hatás,
- ha $\alpha = 1$, bandwagon hatás $=$ sznob hatás,
- ha $\alpha > 1$, bandwagon hatás $<$ sznob hatás.

A bandwagon (bw) és a sznob (s) hatás erőssége a divat elterjedése folyamán makro vagy társadalmi szinten az *1. ábra* szerint alakul. (Az ábrán n mutatja a fogyasztók számát a $(0, 1)$ folytonos intervallumon, amely valójában a divatadaptációs rátát jelöli; a vízszintes tengely tehát a divat életciklusával van összefüggésben. $B(\cdot)$ a $[0, 1]$ intervallumon definiált, a termék hosszú távú hír vagy tekintély értékét reprezentáló függvény; a sznob és a bandwagon hatás erősségét fejezi ki – a divathoz csatlakozott fogyasztók számának, illetve arányának függvényében. A sznob hatás a divatot adaptálók viszonylag alacsony aránya mellett éri el maximumát, a divatterméket fogyasztók számával együtt növekvő bandwagon hatás pedig a divatciklus végén.) *A divatciklus elején az α értéke nagyobb 1-nél. A sznob hatás maximumának elérését követően folyamatosan csökken az α értéke az x divatadaptációs ráta növekedésével, minthogy a sznob hatás gyengül, a bandwagon hatás pedig erősödik amint mind többen és többen adaptálják az új divatot. Végül, ha elterjedt a divat, α nullává válik.* Az azonban elsősorban a termékkategóriának, a divat stílusjegyeinek, valamint a fogyasztók interperszonális kapcsolatainak és magatartásának a függvénye, hogy

- az α milyen ütemben csökken a divatciklus során,
- milyen x értéknél éri el maximumát az α,
- milyen x értéknél válik egyenlővé a sznob és a bandwagon hatás, valamint hogy
- milyen maximális értéket vehet fel az α.

Az $x(1-x)^{\alpha}$ kifejezés értékéről a fentiek alapján így megállapítható, hogy minél nagyobb az α értéke, és ezzel párhuzamosan minél kisebb x értéke, annál kisebb; továbbá $x = 0$-nál zérus értéket vesz fel, $x = 1$-nél pedig nem értelmezhető a hatvány. Az előbbi összefüggés azt jelenti, hogy minél erősebb a sznob hatás érvényesülése a bandwagon hatáshoz képest, annál kisebb a divatot adaptáló fogyasztó hasznossága – ceteris paribus. Ebből az a következtetés vonható le, hogy ez a hasznossági függvény a divatkövetőkre épül, minthogy ők bandwagon hatásra csatlakoznak a divathoz, továbbá pedig a divatinnovátorok részéről érvényesül az erős sznob hatás, akik számára pont az jelenti a hasznosság növekedését, ha ki tudnak tűnni mások közül. *Ilyen módon tehát a divatinnovátorok hasznossági függvényének értékét torzítja az α tényező.* Az x divatadaptációs ráta két lehetséges szélső értékének értelmezése is szükséges. Ha $x = 0$, akkor a szorzat értéke is 0, azaz a társadalmi hatások nem járulnak hozzá az egyén által élvezett hasznossághoz, mivel ez esetben valójában még nem is jött létre a divat, hiszen nincsenek divatoló fogyasztók. Ha viszont $x = 1$, akkor $\alpha = 0$, és így a hatvány nem értelmezhető; ez azt jelenti, hogy a divat (teljesen) elterjedt, csak bandwagon hatás érvényesül, az elérte maximumát, azaz a divat megsemmisítette önmagát.



1. ábra. A sznob és a bandwagon hatás Corneo – Jeanne, 1997 p. 338 alapján

Fontosnak tartom kiemelni a hasznossági függvény egyes tényezői közti viszonyokat, illetve azok hatását a hasznosság értékének alakulására. Ha (valamennyire is) attraktív az egyén számára maga a divat, illetve a divattermék, akkor az attraktivitási tényező értékéről feltételezem, hogy nagyobb, mint 0. Ebben az esetben, ha a hasznossági függvény értéke pozitív, akkor az egyén csatlakozik a divathoz, azaz megvásárolja a divatjószágot. Ha viszont a hasznossági függvény negatív értéket venne fel, akkor inkább nem adaptálja a divatot, azaz $V_2 = 0$ lesz, mert az magasabb hasznosságot jelent számára. Ha azonban az attraktivitási komponens értéke kisebb 0-nál, azaz nem vonzó számára maga a divat, akkor még ha egyéni szempontjából nem adaptálná is a divatot, mivel $-p < 0$, előfordulhat, hogy csatlakozik a divathoz, mivel lehet, hogy a hasznossági függvény értéke pozitív lesz, ha a társadalmi hatás elegendően nagy, hogy ellensúlyozza az egyéni szint hasznosságot csökkentő hatását:

$$|-p| < \beta x(1-x)^{\alpha} \ . \tag{4}$$

Ez leginkább akkor fordulhat elő, ha az egyén számára nagyon fontos, hogy beilleszkedjen egy csoportba, így például a tinédzsereknél a kortárs csoporthatás erőteljes érvényesülésekor vagy a tiszteletből fakadó utánzás során. Az egyéni szint tényezőivel kapcsolatban megállapítható, hogy ha a gazdasági és pszichológiai költség összege kisebb, mint az egyén számára a divat attraktivitása, akkor ez növeli a fogyasztó hasznosságát.

Miller – McIntyre – Mantrala (1993) dinamikus divatadaptációs modelljében azt feltételezi, hogy a társadalomban mindenki mindenkire hatást gyakorol. Az egyén által elfogadott és alkalmazott stílus információt közvetít az egyénről a társadalom többi tagja felé. Azok az emberek, akikre az egyén pozitív hatással van, szintén csatlakozni akarnak az új stílushoz. Ez a stílusváltoztatás aztán másokat is befolyásol, és a folyamat továbbgyűrűzik. Ily módon dinamikus a divat folyamata, a döntéshozatal paraméterei pedig egyénenként különbözőek.

A modell képes kezelni ugyanannak a terméknek egyidejűleg több tulajdonságát; az egyszerűsítés érdekében feltételezzük, hogy az egyén x tulajdonságnak egy bizonyos szintjét választja egy folyamatos, egydimenziós térből, amelynek mindkét végén fizikai korlátok vannak. (A továbbiakban egy meghatározott x választására Miller – McIntyre – Mantrala (1993) alapján „stílus" választásként hivatkozom.) Az egyén célja minden egyes időperiódusban olyan x_t-t választani, amellyel maximalizálja hasznosságát. Egy adott t időperiódusban a választott stílus mindig a társadalom többi tagja által az előző, $t-1$ periódusban adaptált stílus függvénye. Így az i egyén adaptációja a t-edik periódusban

$$x_{i,t} = f(\mathbf{X}_{t-1}) \tag{5}$$

ahol $\mathbf{X}_{t-1} = (x_{1,t-1}, \ldots, x_{n,t-1})$ az n tagú társadalom $t-1$ periódusbeli adaptációjának oszlopvektora (Miller – McIntyre – Mantrala, 1993).

Az egyént a társadalom többi tagja szelektíven befolyásolja. Az i egyénhez illő stílust a t-edik periódusban, azaz $x_{a,i,t}$-t, a pozitív referenciájú egyének előző periódusban választott stílusainak súlyozott átlaga határozza meg. A társadalom azon tagjai esetében, akikre az egyén jelentős figyelmet fordít, nagy súlyokat alkalmazunk, a súlyok nem lehetnek negatívak, és összegük egy. Az egyén önmagának 0 súlyt határoz meg, mert a szelektív hatás társadalmilag származtatott. Az $x_{r,i,t}$ az i egyénhez a t-edik periódusban nem hozzáillő stílus, analóg módon származtatható. A szelektív hatás két vektorra történő elkülönítése mutatja az értékelt egyénekhez fűződő attrakció szintjét, és az ellenszenves egyénektől való távolságtartás szintjét. Így minden $i = 1, \ldots, n$-re

$$x_{a,i,t} = \phi_i \mathbf{X}_{t-1} \tag{6}$$

$$x_{r,i,t} = \alpha_i \mathbf{X}_{t-1} \tag{7}$$

ahol ϕ_i az i egyén esetén a másokra vonatkozó értékelt súlyok sorvektora, és α_i az i egyén esetén a másokra vonatkozó nem méltányolt súlyok sorvektora (Miller – McIntyre – Mantrala, 1993).

A fentiek alapján Miller – McIntyre – Mantrala (1993) a divatterméket fogyasztó egyén hasznossági függvényét az alábbi kvadratikus formában fejezi ki:

$$U_i(x_{i,t}) = -c_{a,i}(x_{i,t} - x_{a,i,t})^2 + c_{r,i}(x_{i,t} - x_{r,i,t})^2 - c_{c,i}(x_{i,t} - x_{i,t-1})^2 \ , \tag{8}$$

- ahol $x_{i,t}$ az i egyén által a t periódusban választott stílus,
- $x_{a,i,t}$ az i egyénhez illő stílus a t-edik periódusban,
- $x_{r,i,t}$ az i egyénhez nem hozzáillő stílus a t-edik periódusban,
- $c_{a,i}$ az i egyén attraktivitása a pozitívan értékelt csoportokhoz, $c_{a,i} > 0$,
- $c_{r,i}$ az i egyén távolságtartási igénye az ellenszenves csoporttól (a $c_{a,i}$ és a $c_{r,i}$ általában nem azonos mértékű), $c_{r,i} > 0$,
- $c_{c,i}$ az i egyén változással szembeni attitűdje, $c_{c,i} > 0$.

A (8) függvény első komponense úgy értelmezhető, hogy *minél inkább eltér az i egyén által választott stílus a szerinte hozzáillőtől, annál alacsonyabb a fogyasztó szimbolikus hasznossága. A második komponens szerint minél inkább eltér az i egyén stílusa a nem hozzáillő stílustól, annál nagyobb az élvezett hasznosság. A harmadik komponens pedig azt jelenti, hogy minél nagyobb stílusváltoztatást hajt végre az i egyén a $t-1$-edik periódusról a t-edik periódusra, annál alacsonyabb a hasznossága*; vagyis az egyént változást nem kedvelő természetűnek tételezi fel a modell.

Miller – McIntyre – Mantrala (1993) által kidolgozott szimbolikus hasznossági függvénynek a középpontjában tehát a divattermék tulajdonságai és az egyénnek a többi fogyasztóhoz, valamint azok stílusválasztásához való viszonya áll. A függvényt teljes egészében az egyén értékítélete határozza meg, hiszen minden egyes paraméter és változó a fogyasztó preferenciáitól függ. Összességében a modell a divathoz történő csatlakozás központi elemeire épül, továbbá a fogyasztói érzelmekre, az elkülönülés és a konformitás iránti igényre és arra, hogy a divattermék stílusjellemzői okozzák a fogyasztói élvezetet. A (fizikai értelemben vett) divattermékek (tehát nem a szolgáltatások) stílus választását írja le jól, amikor – a társadalmi környezet számára – jól látható fogyasztás történik, tehát például a ruhák vagy az autók esetében. Pénzügyi jellegű tényezők mint az ár és a jövedelem nem szerepelnek a modellben.[2]

3 A hasznossági függvények összevetése

Az ismertetett hasznossági függvényekben (*1. táblázat*) közös, hogy a *társadalmi hatás* valamilyen formában szerepel bennük. Miller – McIntyre – Mantrala (1993) modellje az egyetlen, amelyben e hatások nemcsak makro, hanem mikro szinten is megjelennek, hiszen a társadalom minden tagjához való viszony (külön-külön) beépül a függvénybe. A bandwagon és a sznob hatás Nakayama – Nakamura (2004) és Miller – McIntyre – Mantrala (1993) függvényében egyértelműen jelen van, Frijtersnél (1998) viszont másoknak az egyén hasznosságára gyakorolt befolyása a divatterméket fogyasztók átlagos státusa alapján érvényesül. Corneo – Jeanne (1999) modelljében a konformitás iránti igény áll annak hátterében, hogy az egyén számára ,,kívánatos" fogyasztók aránya van hatással a hasznosságra.

A divatra, a *divattermék tulajdonságai*ra vonatkozó tényezők Frijters (1998) függvénye kivételével mindegyik modellbe beépülnek. Corneo – Jeanne (1999) függvényében a divathoz való viszonyulás az ízlés paraméteren, Nakayama – Nakamura-nál (2004) pedig a divat attraktivitáson keresztül jelenik meg – igaz pontosabb meghatározásuk nélkül. Miller – McIntyre – Mantrala (1993) modelljében van a legnagyobb szerepe a divattermékek tulajdonságainak, hiszen az egyén célja minden egyes időperiódusban a termékjellemzők olyan szintjét választani, amellyel maximalizálhatja hasznosságát – figyelembe véve másokhoz, és azok stílusválasztásához való viszonyát. A függvény az egyén által választott, az egyénhez illő és nem hozzáillő stílusok közötti összefüggéseken alapul.

Pénzügyi komponens Miller – McIntyre – Mantrala (1993) függvényén kívül mindegyikben megjelenik. Frijtersnél (1998) az ár a jövedelemmel és a divat jószág státus értékével összefüggésben jelenik meg. Corneo – Jeanne (1999) függvényébe érdekes módon a fogyasztás helyére történő eljutás költsége épül be, és nem pedig a divatos terméknek vagy szolgáltatásnak az ára. Nakayama – Nakamura-nál (2004) a gazdasági költségen kívül, pszichológiai költség is megjelenik, sajnos azonban ennek konkrétabb meghatározására sincsenek utalások. Ismételten hangsúlyozom azt – amire már a Bevezetőben is kitértem, hogy mindegyik függvényben hasznosság csökkentő tényezőként szerepel az ár, illetve a költség komponens. Az általam javasolt, az árhoz multiplikatív módon kapcsolódó $(-1)^s$ tényező függvénybe történő beépítésével azonban lehetőség van az árat hasznosság növelő tényezőként értékelő fogyasztók preferenciáinak figyelembe vételére is, amelynek következtében pontosabban leírható és mérhető a fogyasztói hasznosság.

---

[2] Miller – McIntyre – Mantrala (1993) modelljének részletes bemutatását, elemzését és általam történő továbbfejlesztését lásd Kovács, 2005c.

A hasznossági függvény kidolgozói	A modell alapja	Társadalmi hatás szintje	Társadalmi hatás jellege	Divattermék megjelenésének formája	Pénzügyi komponens
Frijters (1998)	a divatjavak státusjavak	makro	státus	–	divattermék ára, fogyasztó jövedelme
Corneo–Jeanne (1999)	a divat kollektív magatartás	makro	bandwagon hatás, fogyasztói arány	ízlés	elérés költsége, fogyasztó jövedelme
Nakayama–Nakamura (2004)	társadalmi interakciók	makro	bandwagon és sznob hatás	attraktivitás	gazdasági és pszichológiai költség
Miller–McIntyre–Mantrala (1993)	egyének egymásra gyakorolt hatása, stílus választás	makro és mikro	mások stílus választása, bandwagon és sznob hatás	termékjellemzők egy szintje	–

1. táblázat. A divathoz csatlakozó fogyasztók hasznossági függvényeinek összehasonlítása

Az egyes modellek sajátosságaira összpontosítva kiemelendők az alábbiak. Frijters (1998) függvényének egy termék tulajdonság(ok)ra vonatkozó komponenssel történő kiegészítése szükséges, mivel az egyének divattermékekkel kapcsolatos vásárlási döntését, illetve fogyasztásából eredő élvezetét a társadalmi hatásokon és a jövedelmen kívül a termékjellemzők is nagymértékben befolyásolják. Corneo – Jeanne (1999) modellje nem alkalmas a divat terjedésének vagy egy adott időpontbeli állapotának magyarázatára, elemzésére, sokkal inkább annak vizsgálatára, hogy két divat illetve jelen esetben két ,,trendi" hely közül melyiket választja az egyén, ha azon emberek arányára összpontosít, akikkel azonosulni szeretne. Nakayama – Nakamura (2004) által kidolgozott függvény arra mutathat rá, hogy a divatterjedés, a divatciklus folyamán a társadalmi hatások változó erőssége és egymáshoz való viszonya hogyan befolyásolja a fogyasztói hasznosságot. Az egyén által élvezett hasznosságra tehát nagymértékben hatással van az, hogy a divatciklus mely időpontjában csatlakozik a divathoz, mivel a sznob és a bandwagon hatás erőssége és aránya a divatterjedés során változik. Fontos hangsúlyozni továbbá, hogy Nakayama – Nakamura (2004) hasznossági függvénye a divatkövetők fogyasztói magatartására épül. Végül, Miller – McIntyre – Mantrala (1993) szimbolikus hasznossági függvénye dinamikus, vagyis a fogyasztók stílus választása a többi egyén előző periódusbeli stílus választása alapján történik.

4 Összegzés

Tanulmányomban a divatterméket fogyasztók hasznossági függvényeit vizsgáltam, az őket alkotó tényezők és a köztük fennálló összefüggések alapján. Mindegyik hasznossági függvény arra épül, hogy a divatjavak fogyasztásából nem, vagy nem csak funkcionális hasznosság, hanem szimbolikus hasznosság is származik. Közös bennük, hogy a divathoz történő csatlakozást befolyásoló társadalmi hatások valamilyen szempontból megtalálhatók bennük, ugyanakkor azonban az ár komponens mindenütt hasznosság csökkentő tényezőként szerepel, figyelmen kívül marad tehát, hogy a magas ár presztízsértéket jelenthet. Az ismertetett hasznossági függvények mindegyike esetében ugyanakkor más-más, a divattermék fogyasztásának élvezetére hatást gyakorló tényező van a középpontban, és így eltérő jellegű divattermékek, valamint vizsgálati, elemzési célokra alkalmazhatók.

Irodalom

1. Adams, R. D. – McCormick, K. (1987): Private Goods, Club Goods, and Public Goods as a Continuum. *Review of Social Economy*, Vol. 45. No. 2. pp. 192–199.
2. Adams, R. D. – McCormick, K. (1992): Fashion Dynamics and the Economic Theory of Clubs. *Review of Social Economy*, Vol. 50. No. 1. pp. 24–39.
3. Andersson, T. D. – Mossberg, L. (2004): The Dining Experience: Do Restaurants Satisfy Customer Needs? *Food Service Technology*, Vol. 4. No. 4. pp. 171–177.
4. Bianchi, M. (2002): Novelty, Preferences, and Fashion: When Goods are Unsettling. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 47. No. 1. pp. 1–18.
5. Buchanan, J. M. (1965): An Economic Theory of Clubs. *Economica*, Vol. 32. No. 125. pp. 371–384.
6. Cho, H. – Lee, J. (2005): Development of a Macroscopic Model on Recent Fashion Trends on the Basis of Consumer Emotion. *International Journal of Consumer Studies*, Vol. 29. No. 1. pp. 17–33.
7. Cholachatpinyo, A. et al. (2002a): A Conceptual Model of the Fashion Process – Part 1.: The Fashion Transformation Process Model. *Journal of Fashion Marketing and Management*, Vol. 6. No. 1. pp. 11–23.
8. Cholachatpinyo, A. et al. (2002b): A Conceptual Model of the Fashion Process – Part 2.: An Empirical Investigation of the Micro-Subjective Level. *Journal of Fashion Marketing and Management*, Vol. 6. No. 1. pp. 24–34.
9. Corneo, G. – Jeanne, O. (1997): Snobs, Bandwagons, and the Origin of Social Customs in Consumer Behavior. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 32. No. 3. pp. 333–347.
10. Corneo, G. – Jeanne, O. (1999): Segmented Communication and Fashionable Behavior. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 39. No. 4. pp. 371–385.
11. Frijters, P. (1998): A Model of Fashions and Status. *Economic Modelling*, Vol. 15. No. 4. pp. 501–517.
12. Groth, J. C. – McDaniel, S. W. (1993): The Exclusive Value Principle: The Basis for Prestige Pricing. *Journal of Consumer Marketing*, Vol. 10. No. 1. pp. 10–16.
13. Hámori Balázs (1998): *Érzelemgazdaságtan: A közgazdasági elemzés kiterjesztése.* Budapest: Kossuth Kiadó.
14. Hámori Balázs (1999): A hivalkodás konformizmusa: a klubjavak sajátos viselkedéséről. *Társadalom és Gazdaság*, Vol. 21. No. 2. pp. 82–101.

15. Kovács Kármen (2005a): Divattermékek és divatmárkák, mint a szimbolikus fogyasztás eszközei I. *Marketing & Menedzsment*, Vol. 39. No. 4-5. pp. 72–81.
16. Kovács Kármen (2005b): Divattermékek és divatmárkák, mint a szimbolikus fogyasztás eszközei II. *Marketing & Menedzsment*, Vol. 39. No. 6. pp. 33–42.
17. Kovács Kármen (2005c): A divatadaptáció dinamikus modellezése. *Vezetéstudomány*, Vol. 36. No. 12. pp. 44–54.
18. Kovács Kármen (2006): Érzelmi hatások a divatjavak fogyasztásában. *Vezetéstudomány*, Vol. 37. No. 7-8. pp. 65–71.
19. Kovács Kármen (2007): A termékinnovációk egy speciális esete: az új divattermékek. *Marketing & Menedzsment*, 41. évf. 3. sz. pp. 78–90.
20. Kovács Kármen (2009): A divatterjedés és a divattermékek fogyasztását befolyásoló tényezők empirikus vizsgálata a hazai fiatalok körében. *Marketing & Menedzsment*. 43. évf. 1. sz. pp. 62–72.
21. Leung, L. – Wei, R. (1998): The gratifications of pager use: sociability, information-seeking, entertainment, utility, and fashion and status. *Telematics and Informatics*, Vol. 15. No. 4. pp. 253–264.
22. Mahajan, V. – Wind, Y. (2002): Got Emotional Product Positioning? *Marketing Management*, Vol. 11. No. 3. pp. 36–41.
23. Miller, C. M. – McIntyre, S. H. – Mantrala, M. K. (1993): Toward Formalizing Fashion Theory. *Journal of Marketing Research*, Vol. 30. No. 2. pp. 142–157.
24. Nakayama, S. – Nakamura, Y. (2004): A Fashion Model with Social Interaction. *Physica A*, Vol. 337. No. 3-4. pp. 625–634.
25. O'Shaughnessy, J. – O'Shaughnessy, N. J. (2003): *The Marketing Power of Emotion.* New York: Oxford University Press.
26. Sassatelli, R. (2000): From Value to Consumption. A Socialtheoretical Perspective on Simmel's Philosophie des Geldes. *Acta Sociologica*, Vol. 43. No. 3. pp. 207–218.
27. Schultz, H. (2004): *Sztárkávéház: a Starbucks története, csészéről csészére.* Budapest: HVG Kiadó.
28. Simmel, G. (2001): A divat. In: *Válogatott társadalomelméleti tanulmányok.* Budapest: Novissima Kiadó. pp. 180–200.
29. Stearns, J. M. – Borna, S. (2005): Beyond Prestige Pricing: Coverage of Counter-Intuitive Demand in Marketing Education. *Marketing Education Review*, Vol. 15. No. 3. pp. 65–71.
30. Vázquez, R. – Del Río, A. B. – Iglesias, V. (2002): Consumer-based Brand Equity: Development and Validation of a Measurement Instrument. *Journal of Marketing Management*, Vol. 18. No. 1/2. pp. 27–48.
31. Vigneron, F. – Johnson, L. W. (1999): A Review and a Conceptual Framework of Prestige-Seeking Consumer Behavior. [elektronikus formátum] *Academy of Marketing Science Review*, Vol. 1999. No. 1. http://www.amsreview.org/articles/vigneron01-1999.pdf pp. 1–15.

UTILITY FUNCTIONS OF FASHION ADOPTERS

In this paper I present some utility functions refer to consumers of fashion good. I primarily focus on the components of utility functions and the connections between

them, in other words, what factors and how they influence the enjoyment of fashion adoption. My purpose is not a function analysis, but to point out some factors that have an effect on the degree of utility, furthermore such relevant factors that are missing from the utility functions but in my opinion they have an effect on the consumption of fashion goods.

ANONIM ÉS SEMLEGES TÁRSADALMI VÁLASZTÁSI FÜGGVÉNYEK[1]

BEDNAY DEZSŐ – OLLÁR MARIANN
Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Dolgozatunkban azt a tételt bizonyítjuk, amely szerint (a szereplők részéről szigorú lineáris rendezéseket feltételezve) anonim és semleges társadalmi választási függvény pontosan akkor létezik, ha $M \neq \sum \alpha_i n_i$, ahol M az alternatívák száma, N a szavazók száma, n_i N nem 1 osztója és $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Ezt felhasználva belátjuk, hogy társadalmi sorrendi függvény pontosan akkor adható, ha M kisebb, mint N legkisebb prímosztója. Bemutatjuk a tétel néhány érdekes következményét és megmutatjuk, hogy létezés esetén Borda- és Condorcet-konzisztens függvény is adható. Végül összevetjük a társadalmi sorrendi függvényekkel szembeni elvárásainkat az Arrow-tétel feltételrendszerével.

1 Bevezetés

A társadalmi választások elméletében központi szerepet töltenek be az olyan tételek, amelyek bizonyos feltételnek megfelelő társadalmi választási függvények exisztenciájával kapcsolatosak. A most bizonyítandó tételben két feltételt veszünk figyelembe. Az egyik az anonimitás, ami egyfajta egyenlő bánásmódot követel meg a szereplőket tekintve. Szeretnénk, ha egy társadalmi választási függvény minden szavazót egyenlően kezelne. A másik pedig a semlegesség, ami hasonlót jelent az alternatívákra nézve. El szeretnénk kerülni egy olyan kiválasztási szabályt, amelyben bizonyos alternatívák kitüntetettek a végeredmény szempontjából. Az állítást egy feladatként megtaláltuk Moulinnál (Moulin, 1988), ahol vázlatosan a bizonyításról is szó esik. A most következő részletes bizonyításban igyekszünk kiemelni a lényegi elemeket. Majd a tétel egyszerű, de érdekes következményeit mutatjuk be, többek között, hogy mikor létezik társadalmi sorrendi függvény, és hogy létezés esetén Borda-konzisztens és Condorcet-konzisztens függvényeket is adhatunk. Végül a társadalmi sorrendi függvényekre vonatkozó állítás feltételeit hasonlítjuk össze az Arrow-tétel feltételeivel.

2 A tétel és bizonyítása

Először tisztázzuk pontosan a fogalmakat, feltételeket és elvárásokat. N szereplő mindegyike M számú alternatíva halmazán képes egy egyértelmű rangsort felállítani. Jelölje az alternatívák halmazát A, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$. A

[1]Beérkezett: 2008. május 7. E-mail: `omariann@gmail.com`.

lehetséges rangsorok halmaza legyen S, az i-edik szereplő sorrendje: p_i . Az egész társadalom profiljainak halmaza pedig legyen

$$\mathcal{P} = \{(p_1, p_2, \ldots, p_N) : (p_1, p_2, \ldots, p_N) \in S^N\}.$$

Egy profilt ezentúl egy természetes elemű P mátrixszal reprezentálunk, ahol az oszlopokban a szereplők által felállított sorrend található. Az i-edik oszlopban álló számok tehát az i-edik szereplő alternatívasorrendjét jelentik, csak most például $P = \begin{bmatrix} a_{20} & a_{14} & \cdots \\ a_4 & a_{17} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ helyett $P = \begin{bmatrix} 20 & 14 & \ldots \\ 4 & 17 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ -ot írunk. Olyan függvényeket szeretnénk vizsgálni, amelyek az egyéni sorrendeket egy társadalmi választássá vagy sorrenddé transzformálják.

2.1. Definíció. *Társadalmi választási függvénynek nevezünk egy $f : \mathcal{P} \to A$ függvényt.*

2.1. Definíció. *Társadalmi-sorrend függvénynek nevezünk egy $F : \mathcal{P} \to S$ függvényt.*

Mindkettőtől elvárjuk, hogy adott N és M esetén minden lehetséges profil az értelmezési tartományukba essen. Ha a kettőt összefoglalóan szeretnénk említeni, akkor majd társadalmi függvényként hivatkozunk rájuk.

A két vizsgálati szempontunk a bevezetőben is említett szavazók közötti anonimitás és az alternatívák közötti semlegesség. Anonimitás alatt olyasmit értünk, hogy a szavazás kimenetele nem függ attól, hogy pontosan kikhez is tartoznak a beérkezett szavazatok (a leadott sorrendek). Tehát olyan eljárásokat keresünk, amelyek a szavazatokat egyenrangúan kezelik; ha az emberek sorrendjei egymás között felcserélődnek, az a szavazás kimenetelén nem változtat. Ezzel a tulajdonsággal például a képviselőválasztás esetén alkalmazott egyszerű többségi szavazás rendelkezik, hiszen mindegy, hogy kik szavaztak K jelöltre, csak az számít, hogy összesen hányan. Ugyanakkor a futball Európa-bajnokság helyszínét eldöntő bizottságban holtverseny esetén az elnök szavazata dönt, ő semmiképpen sem tekinthető a többiekkel egyenrangúnak ilyen esetekben.

Az alternatívák közötti semlegességgel az alternatívák egyenrangúságát szeretnénk megfogni. Egy szavazási vagy kiválasztási eljárás során nem szeretnénk, ha előfordulhatna az az esetet, hogy miután minden szavazó értékelésében pontosan megcserélődött a K és L alternatíva helye (más nem történt), a kialakult sorrend mégsem változik. A képviselőválasztás a legtöbb esetben ezt a kritériumot is teljesíti, hiszen mindegy, hogy melyik jelölt pontosan kicsoda; az nyer, aki a legtöbb szavazatot kapja. Viszont a műkorcsolyaversenyek kvalifikációs rendszere nem teljesíti a semlegességet, hiszen a versenyzők bejutása teljesítményükön kívül az országok korábban szerzett kvótáitól is függ.

Nézzük hogyan definiáljuk pontosan ezeket a fogalmakat.

2.3. Definíció. *Egy f társadalmi választási függvényt anonimnak nevezünk, ha minden a szereplők halmazán, azaz az $\{1, 2, ..., N\}$ halmazon vett π per-*

mutáció esetén

$$f\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = f\left(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, \ldots, p_{\pi(N)}\right).$$

Hasonlóan egy F társadalmi-sorrendi függvény anonim, ha

$$F\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = F\left(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, \ldots, p_{\pi(N)}\right).$$

2.4. Definíció. *Egy f társadalmi választási függvényt az alternatívákra nézve semlegesnek nevezünk, ha $f\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = a_i$ esetén, a p_i sorrendeken vett σ permutáció elvégzése után*

$$f\left(\sigma(p_1), \sigma(p_2), \ldots, \sigma(p_N)\right) = a_{\sigma(i)}.$$

Hasonlóan egy F társadalmi-sorrend függvény az alternatívákra nézve semleges, ha $F\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = s$ esetén, a p_i sorrendeken vett σ permutáció elvégzése után

$$F\left(\sigma(p_1), \sigma(p_2), \ldots, \sigma(p_N)\right) = \sigma(s).$$

Ha mátrix formában adott profilokban gondolkozunk, akkor az anonimitás nem jelent mást mint, hogy néhány oszlop felcserélése nem változtatja meg az eredményt. A semlegességet pedig képzelhetjük úgy, hogy ha K és L helyezései mindenki szerint hirtelen felcserélődnek, és semmi más nem történik, akkor az eredményben betöltött szerepeik is cserélődjenek ki. Vagy más megközelítésben úgy is, hogy K és L csak nevet cseréltek.

Felvezetésként a fő tétel előtt két egyszerűen belátható állítást bizonyítunk. Ezeket csak a könnyebb érthetőség kedvéért mutatjuk meg, és azért hogy szokjuk a bizonyítás menetét.

2.5. Állítás. $M = N(\neq 1)$ *esetén nem létezik anonim és semleges társadalmi választási függvény.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyításához induljunk ki a következő profilból:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & M \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M-1 & M & 1 & \ldots & M-2 \\ M & 1 & 2 & \ldots & M-1 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy létezik f választási függvény, mely teljesíti a két feltételt, és $f(P) = a_i$. A P oszlopain végezzük el a $\sigma = (1, 2, \ldots, M)$ permutációt. Ekkor a következő profilt kapjuk:

$$\sigma(P) = \left(\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_N)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ 4 & 5 & 6 & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M & 1 & 2 & \ldots & M-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & M \end{bmatrix}$$

Ekkor f semlegessége miatt $f(\sigma(P)) = a_{\sigma(i)}$, viszont látszik, hogy az oszlopok eggyel el vannak csúsztatva, így az anonimitás miatt $f(\sigma(P)) = f(P) = a_i$, ami csak $M = 1$ esetben fordulhat elő. $\square$

2.6. Állítás. *Ha M és N nem relatív prímek, akkor nem létezik anonim és semleges társadalmi választási függvény.*

Bizonyítás. Mivel M és N nem relatív prímek, így létezik d, 1-nél nagyobb közös osztójuk. A tetszőlegesen választott d segítségével vegyünk egy lehetséges P profilt, amely a következő $d \times d$ -s blokkokból áll elő:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & d \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d-1 & d & 1 & \dots & d-2 \\ d & 1 & 2 & \dots & d-1 \end{bmatrix}.$$

Vegyük azt a P, természetesen $M \times N$ -es profilt, amely a következőképpen épül fel:

$$P = \begin{bmatrix} D & D & \dots & D \\ D+[d] & D+[d] & \dots & D+[d] \\ D+[2d] & D+[2d] & \dots & D+[2d] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D+[(m-1)d] & D+[(m-1)d] & \dots & D+[(m-1)d] \end{bmatrix},$$

ahol m nem más, mint M/d. Tegyük most is fel, hogy létezik olyan f választási függvény, amely teljesíti az anonimitást, semleges és $f(P) = a_i$. A P oszlopain végezzük el a $\sigma = (1, 2, \dots, d)(d+1, d+2, \dots, 2d) \dots ((m-1)d+1, (m-1)d+2, \dots, md)$ permutációt. Itt is látszik, hogy a σ elvégzésekor az oszlopok felcserélődnek (mindegyikből az utána következő adódik, a blokkbeli utolsókból pedig az elsők). Így az anonimitás miatt továbbra is $f(\sigma(P)) = a_i$. Viszont a semlegesség miatt $f(\sigma(P)) = a_{\sigma(i)}$, ami csak $d = 1$ esetben fordulna elő, ez viszont ellentmond d választásának. $\square$

Reménykedhetnénk hogy minden más esetben (tehát amikor M és N relatív prímek) már találunk anonim és semleges f-et, de a következő egyszerű példa rámutat egy másik problémára. Vegyük 6 szavazó és 5 alternatíva esetén a következő profilt:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az anonimitási és semlegességi elvárásoknak semelyik alternatíva hozzárendelésével sem tudunk eleget tenni, holott a 6 és az 5 relatív prímek. Az itt megjelenő probléma vezet a következő tételhez.

2.7. Tétel. *Anonim és semleges társadalmi választási függvény pontosan akkor létezik, ha* $M \neq \sum \alpha_i n_i$, *ahol* n_i N 1*-nél nagyobb osztója és* $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás. Először nézzük azt az irányt, amikor azt kell megmutatnunk, hogy ha M előáll ilyen alakban, akkor nem létezik ilyen f függvény. A bizonyítás az előzőekhez nagyon hasonló. Megint indirekt tegyük fel, hogy létezik f, és $f(P) = a_i$, ahol a megfelelő P ellenpélda profil megalkotásához először definiáljuk a következő $n_i \times n_i$ -s mátrixokat:

$$N_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n_i \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_i & 1 & \dots & n_i - 1 \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, k)\ .$$

Ezekből pedig építsük fel P-t:

$$\begin{bmatrix}
N_1 & N_1 & \dots \\
N_1 + [n_1] & N_1 + [n_1] & \dots \\
N_1 + [2n_1] & N_1 + [2n_1] & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots \\
N_1 + [(\alpha_1 - 1)n_1] & N_1 + [(\alpha_1 - 1)n_1] & \dots \\
N_2 + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [\alpha_1 n_1] & \dots \\
N_2 + [n_2] + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [n_2] + [\alpha_1 n_1] & \dots \\
N_2 + [2n_2] + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [2n_2] + [\alpha_1 n_1] & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots \\
N_2 + [(\alpha_2 - 1)n_2] + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [(\alpha_2 - 1)n_2] + [\alpha_1 n_1] & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots \\
N_k + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots \\
N_k + [n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots \\
N_k + [2n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [2n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots \\
N_k + [(\alpha_k - 1)n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [(\alpha_k - 1)n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots
\end{bmatrix}$$

Persze ezek az $n_i \times n_i$ -s blokkok nem pontosan egymás alá kerülnek, viszont mindegyiket jobbra tudjuk másolni annyiszor, hogy az oszlopok száma végül N-et adjon. Végezzük el a szokásos $\sigma = (1, 2, \dots, n_1)(n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, 2n_1), \dots, ((\alpha_1 - 1)n_1 + 1, (\alpha_1 - 1)n_1 + 2, \dots, \alpha_1 n_1) \dots\dots ((\alpha_k - 1)n_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i + 1, (\alpha_k - 1)n_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i + 2, \dots, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i)$ permutációt. Ekkor megint az történik, hogy minden oszlopból az utána következő oszlop lesz, a blokkbeli utolsókból pedig az elsők. Így az anonimitás miatt újra teljesülnie kell, hogy $f(\sigma(P)) = a_i$, a semlegesség miatt pedig $f(\sigma(P)) = a_{\sigma(i)}$, ami ellentmondás, hiszen σ permutáció nem tartalmaz egyelemű ciklust.

Ezután nézzük azt az irányt, amikor az alternatívák száma nem áll elő az emberek számának 1-nél nagyobb osztóinak természetes számokkal vett lineáris kombinációjaként, vagyis $M \neq \sum \alpha_i n_i$. Az ilyen esetekben konkrét példát mutatunk a megfelelő f konstruálására. Először minden alternatívához rendeljünk hozzá egy M elemű vektort, melynek első koordinátája jelentse azt, hogy hány ember tette ezt a bizonyos alternatívát az első helyre, a második koordináta azt, hogy hányan tették a második helyre, és így tovább, az utolsó, M-edik koordináta legyen az a szám, ahányan az utolsó helyre tették. Ezt a vektort nevezzük ezentúl helyezésvektornak.

Az így kapott M darab vektor között biztosan van 2 különböző, hiszen, ha mind egyforma lenne, akkor az első helyen álló koordinátákat összeadva meg kellene kapnunk az emberek számát, N-et, ez pedig azt is jelentené, hogy N osztható volt M-mel, ami ellentmond a feltételeknek, (kivéve, ha $M = 1$, de ebben az esetben már készen is lennénk). Rendezzük ezeket a vektorokat valahogyan sorba. Például most a lexikografikus rendezés szerint. A feltétel miatt az sem lehetséges, hogy minden egyforma vektorokból álló csoportban a vektorok száma előállna N 1-nél nagyobb osztóinak természetes lineáris kombinációjaként (hiszen ekkor az helyezésvektorok száma, M ilyen előállítások összege lenne). Most vegyük az első olyan csoportot, amelynek száma nem áll elő ilyen lineáris kombinációként. Az ehhez a csoporthoz tartozó alternatívákat tartsuk meg, a többit felejtsük el. Így biztosan csökkentettük az alternatívák számát (hiszen nem miden helyezésvektor volt egyforma), és szintén egy olyan esethez jutottunk, ahol az alternatívák száma nem áll elő az emberek 1-nél nagyobb osztóinak kombinációjaként. Az eredeti sorrendeket alapul véve most is készítsük el minden bennmaradt alternatívához a megfelelő helyezésvektorokat. Az eljárást tovább folytatva véges lépésben jutunk egy olyan esethez, amikor már csak egyetlen alternatíva marad benn. Legyen ez az alternatíva a függvény értéke.

Ez az f anonim, hiszen két ember szavazatainak kicserélése nem változtatja meg azt, hogy hányan szavaztak az i-edik alternatívára, így a helyezésvektorok sem változnak meg.

Ráadásul f semleges is, hiszen ha két alternatíva helyezései rendre felcserélődnek, akkor a két alternatívához tartozó helyezésvektorok is kicserélődnek, más pedig nem történik. Tehát a két vektor átveszi egymás szerepét. Például ha eddig a függvényérték az egyik alternatíva volt, most az első lépésben kiadott vektorcsoport ugyanaz marad, csak a másik alternatíva helyezésvektora szerepel itt az első alternatíva vektora helyén. Pontosan ugyanez történik a következő lépésekben is. Így a végén a másik alternatíva lesz a függvényérték. □

3 Következmények

Ebben a részben bemutatunk néhány első hallásra furcsának tűnő következményt, amelyek a tétel ismeretében mégis könnyen láthatók.

3.1. Következmény. *Ha az emberek száma osztható* 6*-tal, akkor nem* *tudunk anonim és semleges f-et adni, kivéve azt az esetet, amikor $M = 1$ (ez viszont nem túl érdekes).*

Ebben az esetben a fenti tétel azt mondja, hogy semmilyen olyan alternatívaszám esetén nincs anonim és semleges f, ahol M előáll 3 és 2 természetes lineáris kombinációjaként. Viszont minden 1-nél nagyobb természetes szám ilyen. Érdekes lehet még megjegyezni, hogy ha N olyan, hogy semmilyen $M \neq 1$-re sem tudnak dönteni, akkor N osztható 6-tal (hiszen ekkor sem 2-re sem 3-ra nem tudnak dönteni, ami azt jelenti, hogy N osztható 2-vel és 3-mal is).

3.2. Következmény. *Ha az emberek száma prímhatvány ($N = p^k$, ahol p prím), akkor pontosan azokban az esetben tudunk anonim és semleges f-et előállítani, amikor N és M relatív prímek.*

A tétel szerint $M \neq \sum \alpha_i p^i$ esetben adhatunk anonim és semleges f-et, ráadásul ekkor M nem osztható p-vel, vagyis M és N relatív prímek.

3.3. Következmény. *Ha az emberek száma nem prímhatvány és $N \leq M$, akkor nincs anonim és semleges f társadalmi választási függvény. (M-re jobb becslés is adható. Ha N két legkisebb prímosztója p_1 és p_2 ($p_1 < p_2$) akkor $(p_1 - 1)p_2 \leq M$-re már nincs f.)*

Mivel N nem prímhatvány, így van 2 különböző prímosztója p_1 és p_2. A

$$0, p_1, 2p_1, \ldots, (p_2 - 1)p_1$$

számok mindegyike különböző maradékot ad p_2-vel osztva, hisz p_1 és p_2 relatív prímek. Tehát bármely $(p_2 - 1)p_1$-nél nagyobb szám kirakható p_2 és p_1 természetes lineáris kombinációjaként. Választhatjuk p_1-et és p_2-t N két legkisebb prímosztójának, és már készen is vagyunk.

A társadalmi-sorrend függvényekre vonatkozó állítást egy rövid meggondolással kapjuk a társadalmi választási függvényekre vonatkozó tételből.

3.4. Állítás. *Anonim és semleges F társadalmi sorrendi függvény pontosan akkor létezik, ha az alternatívák száma kisebb, mint az emberek számának legkisebb nem 1 osztója.*

Bizonyítás. Először nézzük azt az irányt, amikor legalább annyi alternatíva van, mint N legkisebb nem 1 osztója. Ez a legkisebb osztó legyen d. Tegyük fel indirekt, hogy F létezik, és $F(P) = s \in S$. Nézzünk egy ellenpélda P profilt a következő módon.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & d \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d-1 & d & 1 & \ldots & d-2 \\ d & 1 & 2 & \ldots & d-1 \end{bmatrix}$$

Építsük ebből fel P-t méghozzá úgy, hogy annyiszor írjuk egymás mellé D-t, hogy meglegyen az N oszlop. A $d+1, d+2, \ldots, M$ alternatívákat pedig leírjuk minden oszlopba ebben a sorrendben a D mátrixok alá. Ha ezen P profilon elvégezzük a $\sigma = (1, 2, \ldots, d)$ permutációt, akkor megint minden oszlopból az utána következő lesz, így az anonimitás miatt $F(\sigma(P)) = s$. A semlegesség miatt viszont $F(\sigma(P)) = \sigma(s)$, ami ellentmondás, mert $d \neq 1$.

A másik irány esetén az alternatívák száma kisebb, mint az emberek számának legkisebb nem 1 osztója, azaz $M < d$. A társadalmi sorrend megállapításához használjuk a következő eljárást. Azt már láttuk, hogy ilyen esetben társadalmi választási függvény (f) konstruálható. Nézzük meg, hogy mit ad egy $f(P)$. Ezt az alternatívát írjuk első helyre, és töröljük a sorrendekből. Most a megmaradt $(M-1) \times N$-es profilra alkalmazzunk egy f-et. Ezt megtehetjük, hiszen $M < d$ miatt $M - 1 < d$, és így $M - 1$ sem áll elő N osztóinak természetes lineáris kombinációjaként. Amelyik alternatívát az új f adja, azt írjuk a második helyre. Így tovább haladva építsük fel s vektort. Az így kapott F társadalmi sorrendi függvény láthatóan anonim és semleges a választási függvények tulajdonságai miatt. □

3.5. Megjegyzés. *Ha az alternatívák vagy a szavazók száma végtelen (és egyik sem 1), akkor nem létezik sem f társadalmi választási, sem pedig F társadalmi sorrendi függvény.*

Nézzük azt az esetet, amikor az alternatívák száma végtelen. Ha az emberek száma N, akkor vegyünk egy olyan P profilt, amiben a következő $N \times N$-es mátrixok következnek sorra:

$$P_i = \begin{bmatrix} 1+iN & 2+iN & \ldots & N+iN \\ 2+iN & 3+iN & \ldots & 1+iN \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N+iN & 1+iN & \ldots & N-1+iN \end{bmatrix}$$

P pedig ezekből felépítve:

$$P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ebből már látszik, hogy bármit is rendelne egy ilyen profilhoz egy választási vagy sorrendi függvény, ellentmondásra jutnánk.

Ugyanígy járunk, ha az emberek száma végtelen, és azt a profilt vizsgáljuk, amelyben a következő $M \times M$-es mátrixok ismétlődnek,

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & M \\ 2 & 3 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M & 1 & \ldots & M-1 \end{bmatrix}$$

és $P = [p, p, \ldots]$.

Ha az alternatívák és a szavazók száma is végtelen, akkor a felső két esetet összekombinálva kapjuk az ellentmondásra vezető profilt.

3.6. Megjegyzés. *Ha létezik társadalmi választási függvény, akkor megadható Borda-konzisztens f és Condorcet-konzisztens f is. Ha létezik társadalmi sorrendi függvény, akkor megadható Borda-konzisztens F és Condorcet-konzisztens F is.*

A 2.7. Tétel bizonyítása során csak arra volt szükségünk, hogy valahogyan rendezni tudjuk a helyezésvektorokat, a rendezés módja érdektelen volt. Ha egy másfajta rendezést választunk, elérhetjük, hogy Borda-győztes létezése esetén, ez az alternatíva legyen f társadalmi választási függvény eredménye. Borda-számlálásnak nevezik azt az eljárást, amely során minden alternatívához hozzárendelnek egy pontszámot, ami úgy keletkezik, hogy a profilbeli minden i-edik helyezés után $M - i$ pont jár. A Borda-győztes alternatíva pedig az az alternatíva lesz, amelynek mindenkinél több pontja van (Kelly, 1988). A helyezésvektorok segítségével könnyen megkaphatjuk az egyes alternatívák Borda-pontjait. Csak a helyezésvektort kell összeszoroznunk az $[M - 1, \ldots, 1, 0]$ oszlopvektorral. Rendezzük a Borda-pontok alapján a helyezésvektorokat, ha pedig egy Borda-ponthoz többféle helyezésvektor is tartozik, akkor rendezzük ezeket mondjuk lexikografikusan. Innentől csináljuk ugyanazt, mint a 2.7. Tétel bizonyításában. Ha P szerint van Borda-győztes, akkor az így kapott f P-hez azt rendeli. Ha pedig létezik társadalmi sorrendi függvény, akkor F szokásos f-ből való konstrukciójával megadhatunk olyat is, amely Borda-sorrend létezése esetén ezt a sorrendet adja.

Amikor létezik anonim és semleges választási függvény, akkor adhatunk olyat is, amely Condorcet-győztes létezése esetén ezt rendeli a profilhoz. Egy alternatíva Condorcet-győztes, ha az egyéni sorrendek alapján minden páros többségi szavazásból minden más alternatívával szemben győztesen kerül ki (Gehrlein – Lepelley, 1998). Ezek alapján, ha egy P profil szerint a_i alternatíva Condorcet-győztes, akkor a P-hez tartozó Σ permutációcsoport minden elemének a_i fixpontja. Ez azért van, mert ha ez az alternatíva szerepelne egy P-t önmagába vivő permutáció 1 ciklusában, az azt is jelentené, hogy a permutáció elvégzése esetén egy másik alternatíva kerülne a helyébe, vagyis eredetileg is 2 Condorcet-győztes lett volna, ami nem fordulhat elő. Tehát Condorcet-győztest tartalmazó profilokhoz nyugodtan rendelheti f a győztest, míg a többi profilhoz rendelje például a lexikografikus rendezés szerinti módszerből adódó alternatívát. F-et készítsük ez alapján az f-ből.

4 Összevetés az Arrow-tétellel

Ha társadalmi választási függvényekről beszélünk, az Arrow-féle lehetetlenségi tétel megkerülhetetlen. Érdemes a két tétel feltételrendszerét összehasonlítani. Az Arrow-tételnek hatalmas irodalma van, rendkívül sok különböző kimondása ismert. Számunkra legszimpatikusabb a következő megfogalmazás volt, ahol a társadalmi jóléti függvény ugyanúgy sorrendprofilokhoz rendel egy sorrendet, mint a mi F társadalmi sorrendi függvényünk. Definiáljunk először néhány fogalmat:

(U) *Univerzalitás:* F társadalmi sorrendi függvényt univerzálisnak nevezzük, ha adott N és A alternatívahalmaz esetén értelmezési tartománya az összes $A' \subseteq A$ alaphalmazú profilok halmaza.

(P) *Pareto-feltétel:* Azt mondjuk, hogy F teljesíti a Pareto-feltételt, ha azokhoz a profilokhoz, amelyekben a szereplők mind azonos sorrendet állítanak fel, ezt a sorrendet rendeli.

(I) *Irreleváns alternatíváktól való függetlenség:* Azt mondjuk, hogy F teljesíti az irreleváns alternatíváktól való függetlenséget, ha bármely P profil és $A' \subseteq A$ alternatívahalmaz esetén $F(P|A') = F(P)|A'$.

(D) *Diktátormentesség:* Azt mondjuk, hogy $i \in N$ diktátor F-re nézve, ha $\forall P$ esetén $F(P) = p_i$. Ha nincs ilyen i, akkor azt mondjuk, hogy F diktátormentes.

Az Arrow-tétel azt mondja, hogy ha A legalább 3 elemű, N pedig nemüres, véges halmaz, akkor olyan F függvény, amely a fenti 4 tulajdonság mindegyikével rendelkezik, nem létezik (Cassels, 1981).

Látszólag a mi két feltételünknek semmi köze sincs az Arrow-tételbeli feltételekhez, de ha egy kicsit jobban végiggondoljuk, a mi technikai jellegű feltételeink nem is esnek olyan távol az Arrow-féle, egyfajta igazságosságot megkövetelő feltételektől. Könnyen látszik, hogy anonimitási feltételünk is kizárja diktátor létét. Az anonimitást a diktátormentesség egy szélsőséges erősítésének tekinthetjük, ami nem csak azt mondja, hogy ne legyen 1 kitüntetett szereplő, hanem azt is, hogy minden szereplő szavazata ugyanannyit érjen. Az univerzalitást egy anonim és semleges társadalmi sorrendi függvény teljesíti, hiszen azt kaptuk, hogy ha M számú alternatíva és rögzített N szereplő esetén adhatunk sorrendet, akkor ennél kevesebb alternatívaszám esetén is adhatunk. Az irreleváns alternatíváktól való függetlenséget nem teljesítik a kapott társadalmi sorrendi függvényeink. A semlegességfogalom egy teljesen más oldalról ragadja meg ugyanezt problémát, hiszen azt mondja, hogy a fontos alternatívák kicserélődésétől igenis függjön az eredmény.

A Pareto-feltételt szintén nem követeltük meg a kiindulásnál, de vegyük észre, hogy minden olyan esetben, amikor létezik anonim és semleges sorrendi függvény, akkor találunk olyat is, amelyik teljesíti a Pareto-feltételt. (A 2.7. Tétel bizonyításában használt lexikografikus rendezéssel kapott f-ekből készített F pont ilyen függvény. Ennek a belátásához elég arra gondolnunk, hogy a mindenki által k-dik helyre sorolt alternatíva helyezésvektora úgy fog kinézni, hogy benne a k-dik elem N lesz, az összes többi pedig 0).

Irodalom

1. Cassels, J. W. S., *Economics for Mathematicians*, London Mathematical Society Lecture Note Series 62, 66-69, 1981.

2. Gehrlein, W. and D. Lepelley, The Condorcet efficiency of approval voting and the probability of electing the Condorcet loser, *Journal of Mathematical Economics*, 29:3, 271-283, 1998.
3. Kelly, J., *Social Choice Theory*, Springer-Verlag, 1988.
4. Mas-Colell, A., M. Whinston and J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.
5. Moulin, H., *Axioms of cooperative decision making*, Chapter 9., Cambridge University Press, 1988.

ANONYMOUS AND NEUTRAL SOCIAL CHOICE FUNCTIONS

In this paper, we prove that there exists an anonymous and neutral social choice function if and only if $M \neq \sum \alpha_i n_i$, where M denotes the number of the alternatives, N the number of the agents, n_i a divisor of N and $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Furhermore, we prove that a social ranking function exists if and only if M is less, than the least prime divisor of N. As corollary, we show, that in case of existence, there might be found Borda- or Condorcet-consistent function. Finally, we compare our assumptions to those used along Arrow's impossibility theorem.

TUDOMÁNYOS ÉLET

X. Gazdaságmodellezési Szakértői Konferencia Budatétény, 2008. október 10.

Jubileumi, tizedik szakértői konferenciáját tartotta a Gazdaságmodellezési Társaság (GMT) 2008. október 10-én Budatétényben, a Vojnovich-Huszár villában. A kétévenként megrendezett szakértői konferenciának már hagyománya van. Lehetőséget ad a szakma művelőinek, hogy azokban az években is összejöjjenek egy tudományos eszmecserére, amikor épp nincs Operációkutatási Konferencia.

Ezeknek a konferenciáknak a jellemzőit az alábbiakban lehet összefoglalni:

- rövid, többnyire egynapos program,
- egy adott téma dominanciája, de nem kizárólagossága,
- a résztvevők száma nem túl nagy (50 körül),
- nem csak kész eredmények bemutatása, hanem beszámoló folyamatban lévő kutatásokról is.

Ez a konferencia eleget tett a fent felsorolt kritériumok mindegyikének. A vezető téma a biztosítás volt, amelyet e legkülönbözőbb aspektusokból vizsgáltak az előadók. Kovács Erzsébet, valamint az Augusztinovics Mária – Máté Levente szerzőpáros a nyugdíjbiztosítással, a modellezés-előrejelzés és az adatbázis problémáival foglalkoztak előadásukban. A nyugdíjrendszer fenntarthatóságát vizsgálta Mellár Tamás egy makroökonómiai modellben elhelyezve.

A biztosítás egyes aspektusai elméletibb és általánosabb síkon három előadás témájául is szolgált. Szüle Borbála a biztosítási kötelezettségek értékelésével foglalkozott egy kockázati tolerancia alapú modell keretében. Csóka Péter, P. Jean-Jacques Herings és Kóczy László a kooperatív játékelmélet eszközeit használta. Előadásukban az aggregált portfolió kockázatának megosztását tanulmányozták átruházható hasznosságú kooperatív játékok, ezen belül a kockázatelosztási játékok segítségével. Pintér Miklós az erkölcsi kockázat játékelméleti modelljének és a biztosításnak a kapcsolatát elemezte.

Komáromi Éva a biztosítási tartalékképzés modellezésére a matematikai programozás eszközeit használta. A csődelőrejelzéssel két előadás is foglalkozott. Kovács Edith és Szántai Tamás egy új, ,,hasznos információra''-ra épülő módszert ismertetett a csőd előrejelzésére, míg Hajdu Ottó a csődvalószínűség logit alapú becslésének mintavételi sajátosságaival foglalkozott.

Voltak olyan érdekes előadások is, amelyek nem kapcsolódtak szorosan a biztosításhoz. Zalai Ernő egy makroökonómiai modellt konstruált, amely a Neumann és a Leontief modellek közös általánosítása. Bessenyei István előadása szintén makroökonómiai témájú volt, a szociális támogatások makrogazdasági hatásait elemezte. Regionális problémával foglalkozott Mohácsi Márta előadása, amelyben az észak-alföldi régió felsőoktatási és munkaerő-piaci helyzetét vizsgálta. Vállalati szintű problémákkal foglalkozott Szabó György és Sulyok Dénes előadása. Raig Mária a strukturált képelemzés módszerének az adózók ellenőrzésénél történő hatékony gyakorlati alkalmazását ismertette.

A szakmai programhoz tartozott Szilágyi György visszaemlékezése Huszár Gézára, a magyar biztosításmatematika első, kiemelkedő művelőjére, a Közgazdasági Egyetem Gazdaságmatematika Tanszékének egykori vezetőjére, aki egyébként a konferencia színhelyéül szolgáló villa tulajdonosa és lakója volt egykoron. A Gazdaságmodellezési Társaság felhasználta ezt az alkalmat arra, hogy az idei Krekó Béla - díjat átadja Zalai Ernőnek, aki ezt a kitüntetést a gazdaságmodellezés területén kifejtett magas színvonalú tudományos munkájáért és a társaság működésének hatékony támogatásáért kapta.

A konferencia színhelye tökéletesen megfelelt egy ilyen jellegű rendezvénynek. A ház, a kert és a környék atmoszférája emlékezetes marad mindenki számára. Ugyancsak nagy élmény volt a házat gondozó művészcsalád —Fodor Péter és családja— által adott kamarazenei koncert és a színvonalas vendéglátás. A konferencia tökéletes megszervezése elsősorban a GMT jelenlegi elnökének, Ligeti Csáknak az érdeme. Ugyancsak köszönetet érdemel mindenki, aki a konferencia sikeréhez előadóként, elnökként és résztvevőként hozzájárult. A konferencia megerősítette a társaság tagságát abban a meggyőződésében, hogy ezt a hagyományt folytatni kell, legközelebb 2010-ben, ugyanis 2009-ben a GMT, a Magyar Operációkutatási Társaság és a Bolyai János Matematikai Társaság közös rendezésében ismét sor kerül az Operációkutatási Konferenciára.

Forgó Ferenc

CONTENTS

TARTALOM

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.szigma.ktk.pte.hu